

Vortrag Dipl.-Geophys. K. P. Sengpiel

"Zur Deutung von Simultanregistrierungen des erdelektrischen
Feldes an zwei Orten"

Sonnabend, den 2.10.1965

In der Tellurik versucht man durch gleichzeitige Registrierung der Variationen des erdelektrischen Feldes an einer Basis und an einer Wanderstation Auskunft über die Leitfähigkeitsstruktur des Untergrundes an der Wanderstation zu erhalten. Die theoretischen Beziehungen zwischen den beiden Stationen werden üblicherweise unter der Voraussetzung einer gutleitenden, homogenen Deckschicht über nichtleitendem Untergrund mit Hilfe von konformen Abbildungen gefunden. Als weitere Einschränkung werden die Erdströme als Gleichströme schwankender Intensität betrachtet.

Behandelt man jedoch - ihrem wahren Charakter entsprechend - die Erdströme als die von einem variablen äußeren Magnetfeld herrührenden Induktionsströme, so erhält man zusätzliche Informationen durch die Periode und die Phasenlage der Variationen zueinander.

Dieser Weg soll hier beschrrieben werden. Dabei wird unter jeder Station ein geschichteter Halbraum mit drei homogenen Schichten angenommen. Beide Stationen seien hinreichend weit vom Kontakt der beiden Modelle entfernt. Das anregende Magnetfeld sei schwach inhomogen, derart, daß an beiden Stationen die äußere Anregung noch etwa die gleiche ist.

Der erforderliche Rechengang, der zu den Ausdrücken für die elektromagnetischen Felder an der Oberfläche eines Dreischichtenfalls führt - bei äußerer Anregung durch ein mit $\cos \nu x$ ($\nu = 2\pi/L$, $L =$ räumliche Wellenlänge des Magnetfeldes) in x -Richtung variierendes Feld - sei hier nur grob skizziert:

Geeignete Umformung der Maxwellischen Gleichungen für quasistationäre Ströme zu einer Diffusionsgleichung

$$\nabla^2 \vec{E} = 4\pi i \omega \sigma(z) \vec{E}$$

(bei rein periodischer Anregung);

Aufsuchen von partikulären Lösungen mit Hilfe des Ansatzes

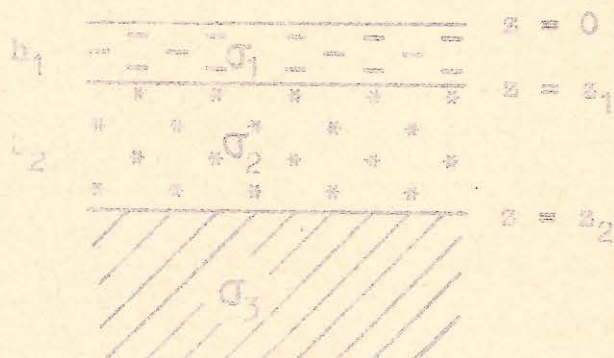
$$\vec{E} = Z(z) \vec{F}(x,y) e^{i\omega t}$$

(Price, 1962). Für die n-te Schicht eines homogen geschichteten Halbraums ergeben sich folgende Ausdrücke für die Felder ($e^{i\omega t}$ weggelassen):

$$\begin{aligned} E_{ny} &= v(A_n e^{-k_n z} + B_n e^{k_n z}) \sin vx \\ E_{nx} &= E_{nz} = 0 \\ (1) \quad H_{nx} &= \frac{v}{i\omega} k_n (-A_n e^{-k_n z} + B_n e^{k_n z}) \sin vx \\ H_{ny} &= 0 \\ H_{nz} &= -\frac{v^2}{i\omega} (A_n e^{-k_n z} + B_n e^{k_n z}) \cos vx \end{aligned}$$

mit $k_n = \sqrt{v^2 + 4\pi i \omega \sigma_n}$ und $k_0 = v$ (im Außenraum $z < 0$, $\sigma = 0$). Die Koeffizienten A_n und B_n werden speziell für den Dreischichtenfall über die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen $z = 0$, $z = z_1$ und $z = z_2$ bestimmt. Im folgenden interessieren nur die Felder an der Erdoberfläche $z = 0$; daher braucht nur der Koeffizient B_0 berechnet zu werden, während A_0 - ein Maß für die äußere Anregung - frei wählbar ist.

Nach Auflösung des inhomogenen Gleichungssystems von sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten ergibt sich für den Dreischichtenfall:



$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 \frac{M - N}{M + N} \\ (2) \quad M &= v(R - S) \\ N &= k_1(R + S) \end{aligned}$$

$$R = [(k_2 + k_1)(k_3 + k_2)e^{k_2 h_2} + (k_2 - k_1)(k_3 - k_2)e^{-k_2 h_2}] \cdot e^{k_1 h_1}$$

$$S = [(k_2 - k_1)(k_3 + k_2)e^{k_2 h_2} + (k_2 + k_1)(k_3 - k_2)e^{-k_2 h_2}] \cdot e^{-k_1 h_1}$$

Für den 2- und 1-Schichtenfall vereinfachen sich diese Beziehungen wie folgt:

Zweischichtenfall

$$(3) \quad \begin{aligned} R(\text{II}) &= (k_2 + k_1) e^{k_1 h} \\ S(\text{II}) &= (k_2 - k_1) e^{-k_1 h} \end{aligned}$$

Homogener Halbraum

$$(4) \quad \begin{aligned} R(\text{I}) &= 2k_1 \\ S(\text{I}) &= 0 \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Felder an der Erdoberfläche folgendermaßen angeben:

$$(5) \quad \begin{aligned} H_x &= -\frac{v^2 A_0}{i\omega} \cdot \frac{2N}{M+N} \sin vx \\ H_y &= 0 \\ H_z &= -\frac{v^2 A_0}{i\omega} \cdot \frac{2M}{M+N} \cos vx \\ E_y &= v A_0 \cdot \frac{2M}{M+N} \sin vx \\ E_x &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Je nachdem, ob sich das 3-Schichtenmodell nun auf die Basis B oder die Wanderstation W bezieht, erhalten die Symbole H, E, M, N und x im folgenden den Index B oder W. Die Modelle B und W sollen sich nur durch die Mächtigkeit z_1 und die Leitfähigkeit σ_1 der obersten Schicht (gutleitende Sedimente) unterscheiden; für die zwei unteren Schichten gelten für B und W die gleichen Konstanten.

Aus den gleichzeitigen Registrierungen der zwei Stationen kann man das Amplitudenverhältnis $q = |E_W/E_B|$ und die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \arg E_W - \arg E_B$ des elektrischen Horizontalvektors in

Abhängigkeit von der Periode T der Variationen bestimmen. (Wie dies am zweckmäßigsten geschieht, soll noch untersucht werden.)

Diese Größen q und $\Delta\varphi$ müssen also für geeignete Parameter aus dem Vergleich der Felder an Modell B und W ebenfalls in Abhängigkeit von der Periode berechnet werden. Das Ziel ist, durch Vergleich der aus den Feldmessungen gewonnenen Kurven $q = f(T)$ und $\Delta\varphi = g(T)$ mit den berechneten q und $\Delta\varphi$ das Modell unter der Wanderstation W zu bestimmen, wenn es unter der Basis B zumindest teilweise bekannt ist.

Der theoretische Feldvergleich ergibt (nach Gl. 5) für das Amplitudenverhältnis q eine Beziehung der Form

$$(6) \quad q = \left| \frac{E_W}{E_B} \right| = \left| \frac{M}{M+N} \right|_W \cdot \left| \frac{M+N}{M} \right|_B$$

Für schwach inhomogenes Magnetfeld ($v^2 \ll 4\pi\omega\varrho_1$) erhält man daraus mit $M = v(R - S)$, $N = k_1(R + S)$

$$(7) \quad q = \sqrt{m} \left| \frac{R - S}{R + S} \right|_W \cdot \left| \frac{R + S}{R - S} \right|_B ; \quad m = \frac{\varrho_1 W}{\varrho_1 B}$$

Die Phasendifferenz wird entsprechend

$$(8) \quad \Delta\varphi = \arg\left(\frac{R - S}{R + S}\right)_W - \arg\left(\frac{R - S}{R + S}\right)_B$$

Die Berechnung von Betrag und Argument der komplexen Ausdrücke R und S ist sehr mühsam und ohne elektronische Rechenmaschinen kaum zu leisten. Man kann jedoch die obigen Beziehungen mit dem "scheinbaren spezifischen Widerstand ϱ_s " nach Cagniard in Verbindung bringen. Die Werte für ϱ_s wurden für eine Anzahl von Modellen von R. Latka (München) auf der IBM 7090 berechnet und liegen am Institut für Angewandte Geophysik der Universität München vor.

Die Definitionsgleichung für den scheinbaren spezifischen Widerstand ϱ_s , bezogen auf den spezifischen Widerstand ϱ_1 der obersten Schicht lautet:

$$(9) \quad \frac{\varrho_s}{\varrho_1} = \left| \frac{E_Y}{H_X} \right|^2 \cdot \frac{2T}{\varrho_1}$$

Auf Grund der Gleichungen (5) wird

$$\frac{E_Y}{H_X} = -\frac{i\omega}{v} \cdot \frac{M}{N} = -\frac{i\omega}{k_1} \cdot \frac{R - S}{R + S}$$

Für $v^2 \ll 4\pi\omega\sigma_n$ ist $k_1 \approx \sqrt{4\pi i\omega\sigma_1}$ und damit

$$(10) \quad \left| \frac{E_y}{E_x} \right|^2 = \frac{\varrho_1}{2\pi} \left| \frac{R-S}{R+S} \right|^2$$

Gl. (9) und (10) ergeben also

$$(11) \quad \frac{\varrho_s}{\varrho_1} = \left| \frac{R-S}{R+S} \right|^2$$

Aus (7) und (11) erhält man für das Quadrat des Amplitudenverhältnisses q

$$(12) \quad q^2 = \left| \frac{E_W}{E_B} \right|^2 = m \cdot \frac{\varrho_{sW}^*}{\varrho_{sB}^*}; \quad \varrho_s^* = \frac{\varrho_s}{\varrho_1}$$

als Grundlage zur Berechnung der theoretischen Abhängigkeit $q = f(T)$. In der Praxis ist es allerdings nützlich, q gegen den dimensionslosen Parameter $\varrho_{1B} T / z_{1B}^2$ aufzutragen und ϱ_{1B} und z_{1B} gleich 1 zu setzen. Andere Werte für ϱ_{1B} und z_{1B} ergeben lediglich Verschiebungen der Kurve in Richtung der Abszisse.

Auf die gleiche Weise lassen sich die Phasendifferenzen zwischen den Variationen an Basis und Wanderstation berechnen, und zwar nach

$$(13) \quad \Delta\varphi = \frac{1}{2}(\arg \varrho_{sW}^* - \arg \varrho_{sB}^*)$$

Man ist nunmehr in der Lage, eine Sammlung von Musterkurven herzustellen. Die wichtigsten zu variierenden Parameter sind $m = \varrho_{1W}/\varrho_{1B}$ und $n = z_{1W}/z_{1B}$. Als weitere Parameter treten auf:

$$\mu_{2B} = \varrho_{2B}/\varrho_{1B}, \quad v_{2B} = z_{2B}/z_{1B}, \quad \mu_{3B} = \varrho_{3B}/\varrho_{1B}$$

Die entsprechenden Parameter für die Wanderstation W sind durch die Wahl von m und n bereits festgelegt, da

$$\mu_{2W} = \mu_{2B}/m \quad (\varrho_{2W} = \varrho_{2B}), \quad v_{2W} \approx v_{2B}/n \quad (z_{2W} \approx z_{2B}, z_2 \gg z_1),$$

$$\mu_{3W} = \mu_{3B}/m \quad (\varrho_{3W} = \varrho_{3B}).$$

Die folgenden vier Figuren zeigen drei Beispiele für den Amplitudenvergleich und ein Beispiel für den Phasenvergleich. Für W und B gilt jeweils ein 3-Schichtenmodell mit $\varrho_1 < \varrho_2 > \varrho_3$, $z_1 \ll z_2$. Es ergeben sich allgemein bei q^2 und $\Delta\varphi$ sehr deutliche Periodenabhängigkeiten. (s. Fig. 1-4)

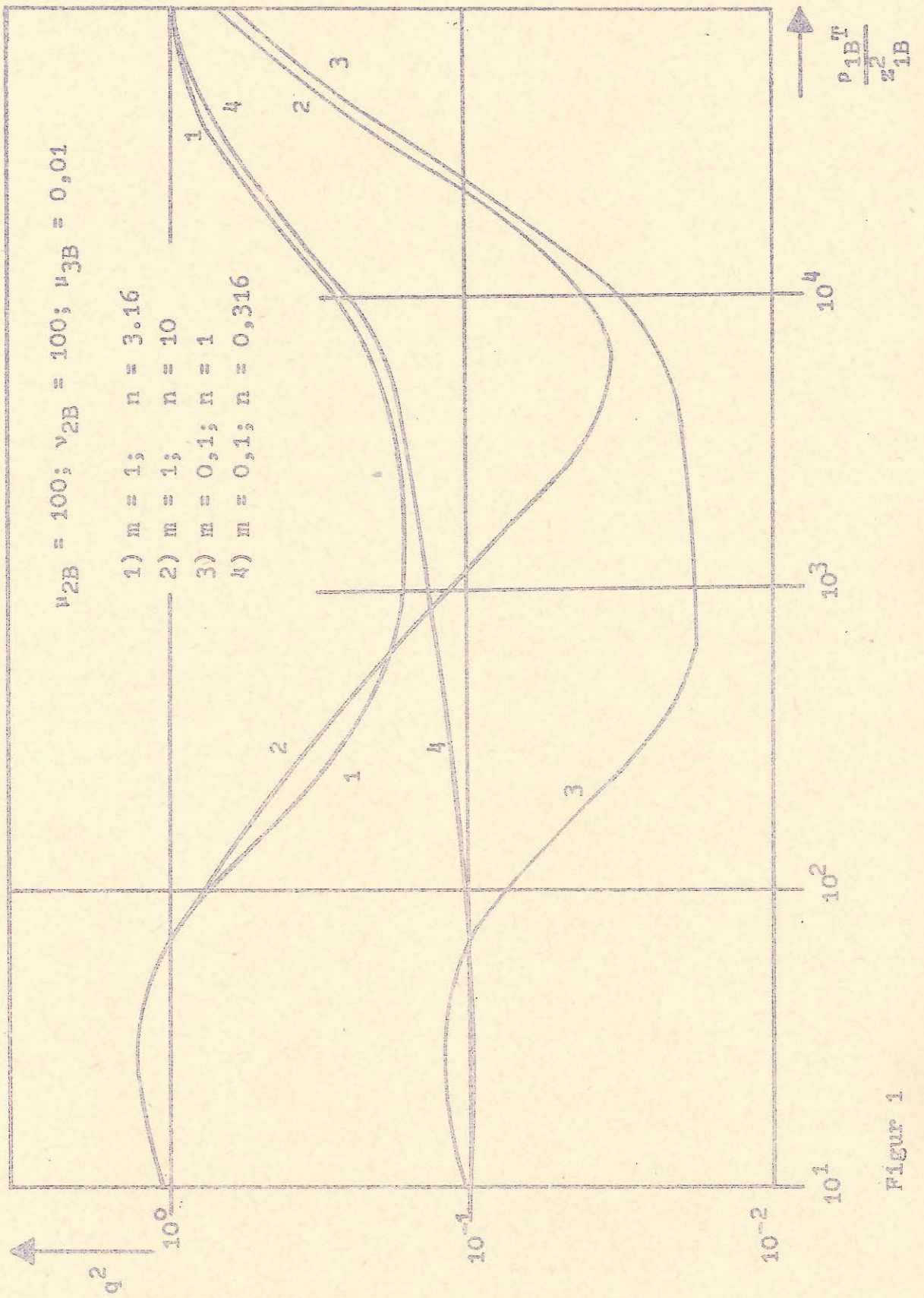


Figure 1

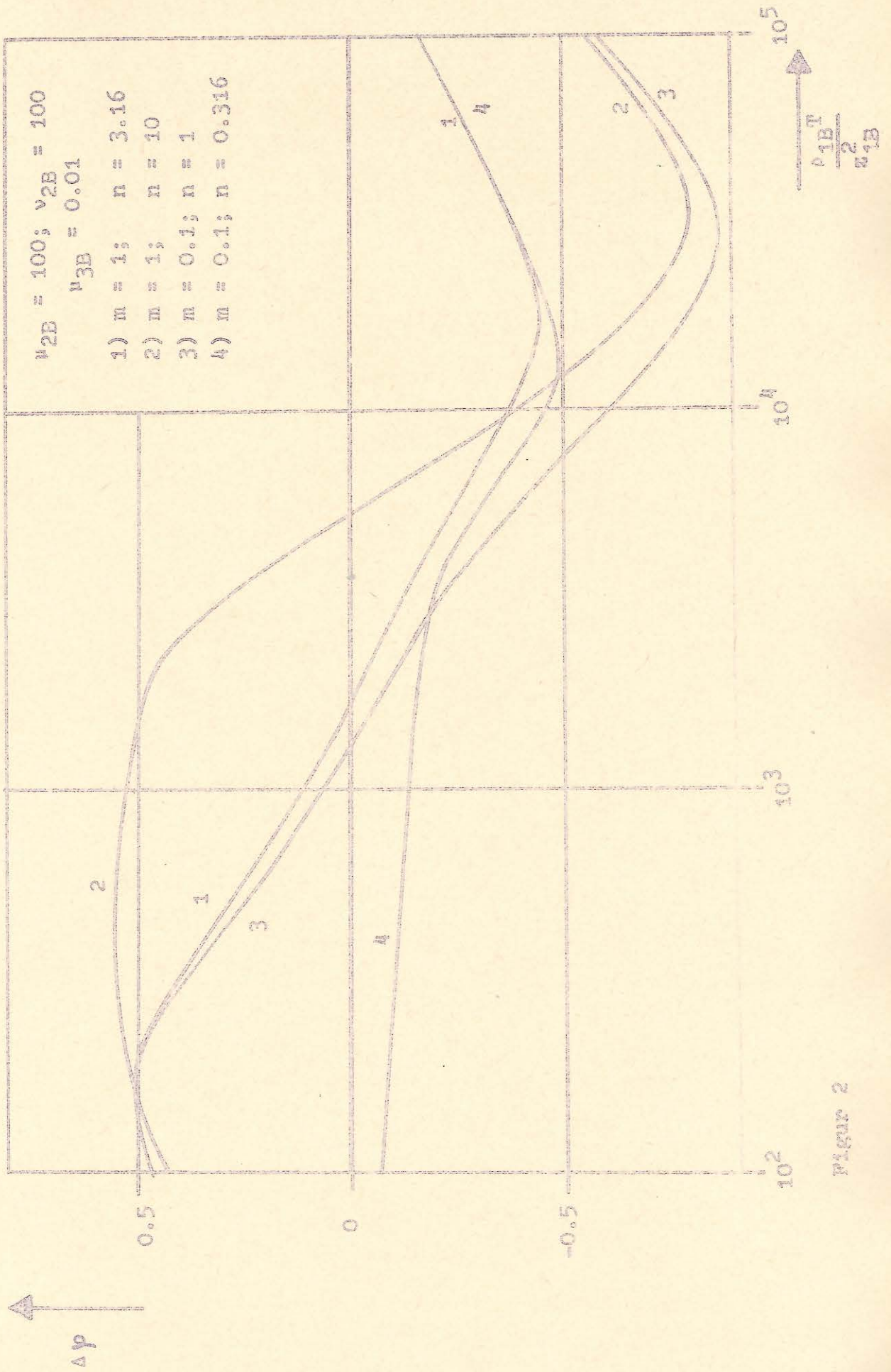
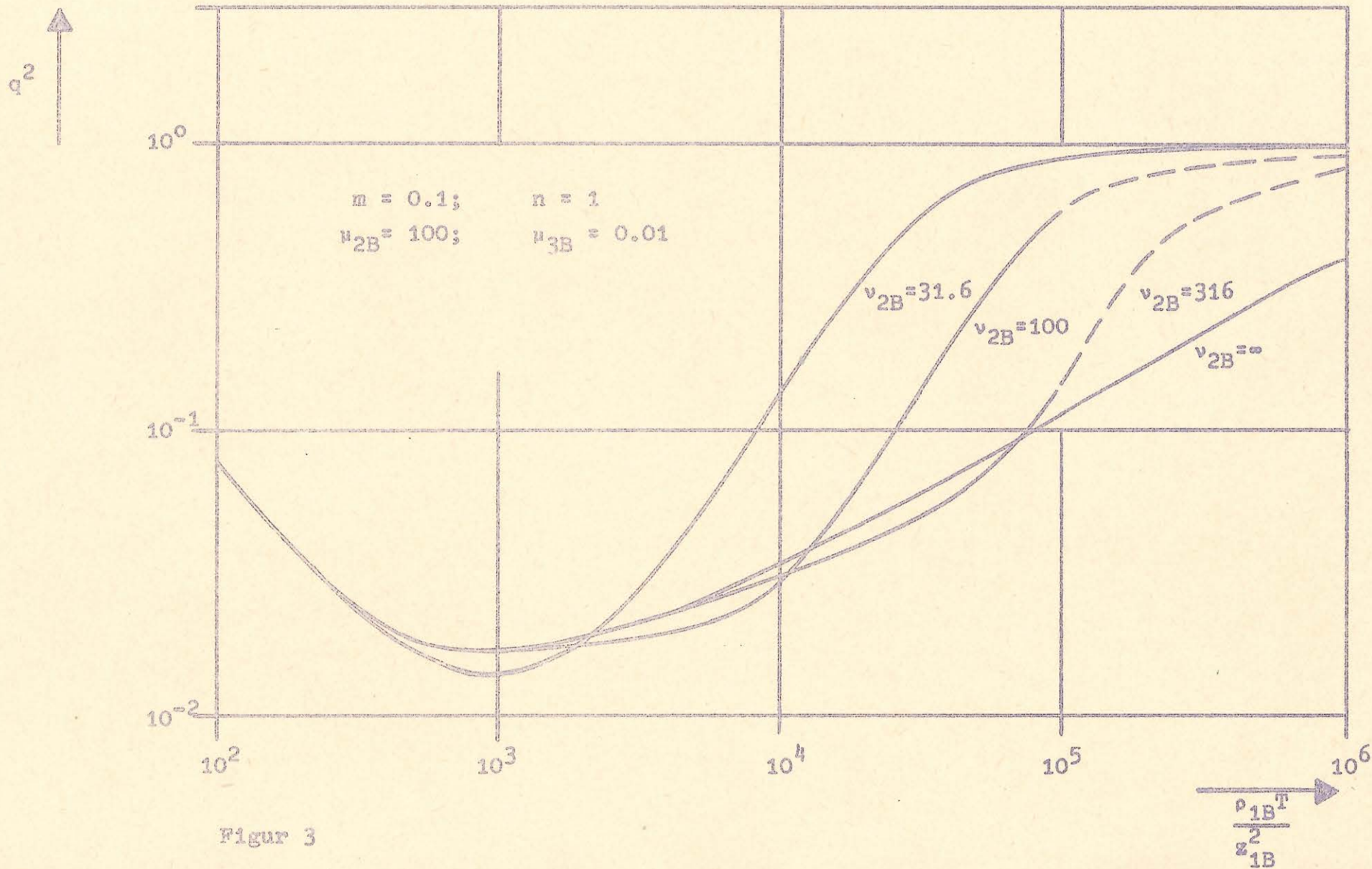


Figure 2



Figur 3

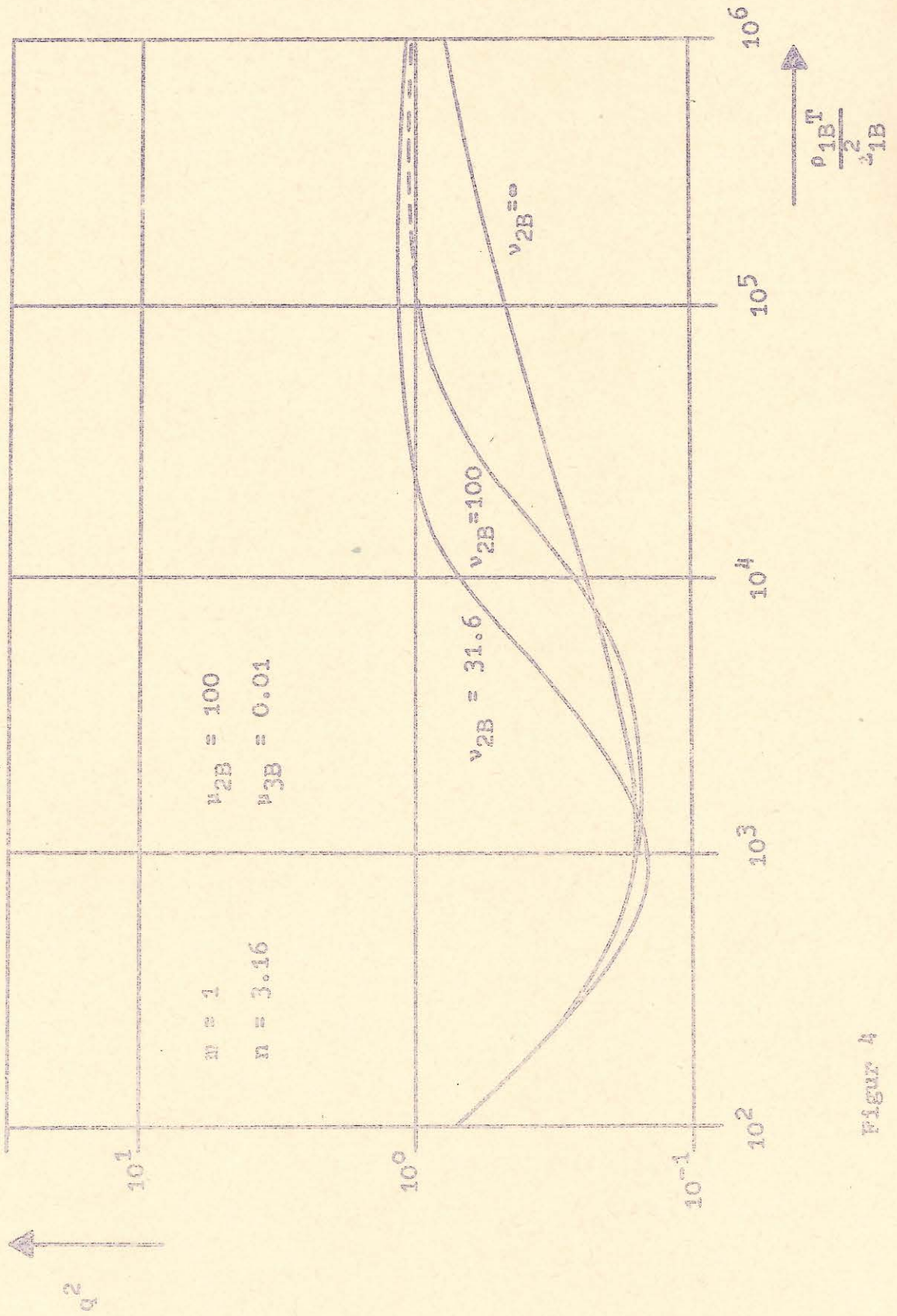


Figure 4

Gilt jedoch für die Basis ein 2-Schichtenmodell mit $\varrho_{1B} = \varrho_{2W} \gg \varrho_{2B}$, wie es für die Messungen von A. Berkold und mir aus den Jahren 1963 und 1964 anzunehmen ist, als die Basis (Falkenstein) im Kristallin des Bayerischen Waldes stand, so erhält man - wie damals beobachtet - auch in der Theorie eine nur schwache Periodenabhängigkeit von q . Als Beispiel dafür dient das nach einem groben Verfahren bestimmte Amplitudenverhältnis q_{BW} (Bernau/Falkenstein), dessen Werte um eine mögliche theoretische Kurve streuen. (s. Fig. 5).

Die experimentelle Prüfung des hier beschriebenen Verfahrens, wobei insbesondere die mittlere Leitfähigkeit und die Mächtigkeit der Deckschicht ermittelt werden soll, ist in Vorbereitung. Zu diesem Zweck wird z. Zt. ein Profil vermessen, das von den Kalkalpen nordwärts quer durch die Molasse bis in den Fränkischen Jura verläuft und entlang dessen der Untergrund bereits durch seismische Refraktionsmessungen und zwei Tiefbohrungen, die das Kristallin erreicht haben, genauer untersucht wurde.

Bemerkung: Der Vergleich von Simultanregistrierungen an Basis und Wanderstation ist prinzipiell nur deshalb notwendig, um den jeweils unbekanntem, die äußere Anregung charakterisierenden Koeffizienten A_0 zu eliminieren. Dieses A_0 kommt aber sowohl in dem elektrischen Feld als auch in den Ausdrücken für die Magnetfeldkomponenten vor. Es ist daher auch denkbar, den Feldvergleich für E und H (ähnlich wie nach Cagniard nur an getrennten Stationen) oder für die Magnetfelder allein durchzuführen, und zwar sowohl für deren Vertikalkomponente H_z als auch für die Horizontalkomponente H_x .

a) Vergleich der Vertikalkomponenten: Nach Gl. (5) erhält man für das Verhältnis der Vertikalkomponenten an Station W und B bei dem angegebenen Modell

$$(14) \quad \frac{H_{zW}}{H_{zB}} = \left(\frac{M}{M+N} \right)_W \cdot \left(\frac{M+N}{M} \right)_B = \frac{E_{yW}}{E_{yB}},$$

also dieselbe Information, wie beim Vergleich der elektrischen Felder. Eine Abschätzung zeigt, daß (bei homogen geschichtetem Halbraum) erst im Falle sehr langer Perioden und stärker inhomogener Magnetfelder die Amplitude der H_z -Variationen in die Größenordnung der zugehörigen E-Feld-Variationen kommt. Denn es ist an einem Ort

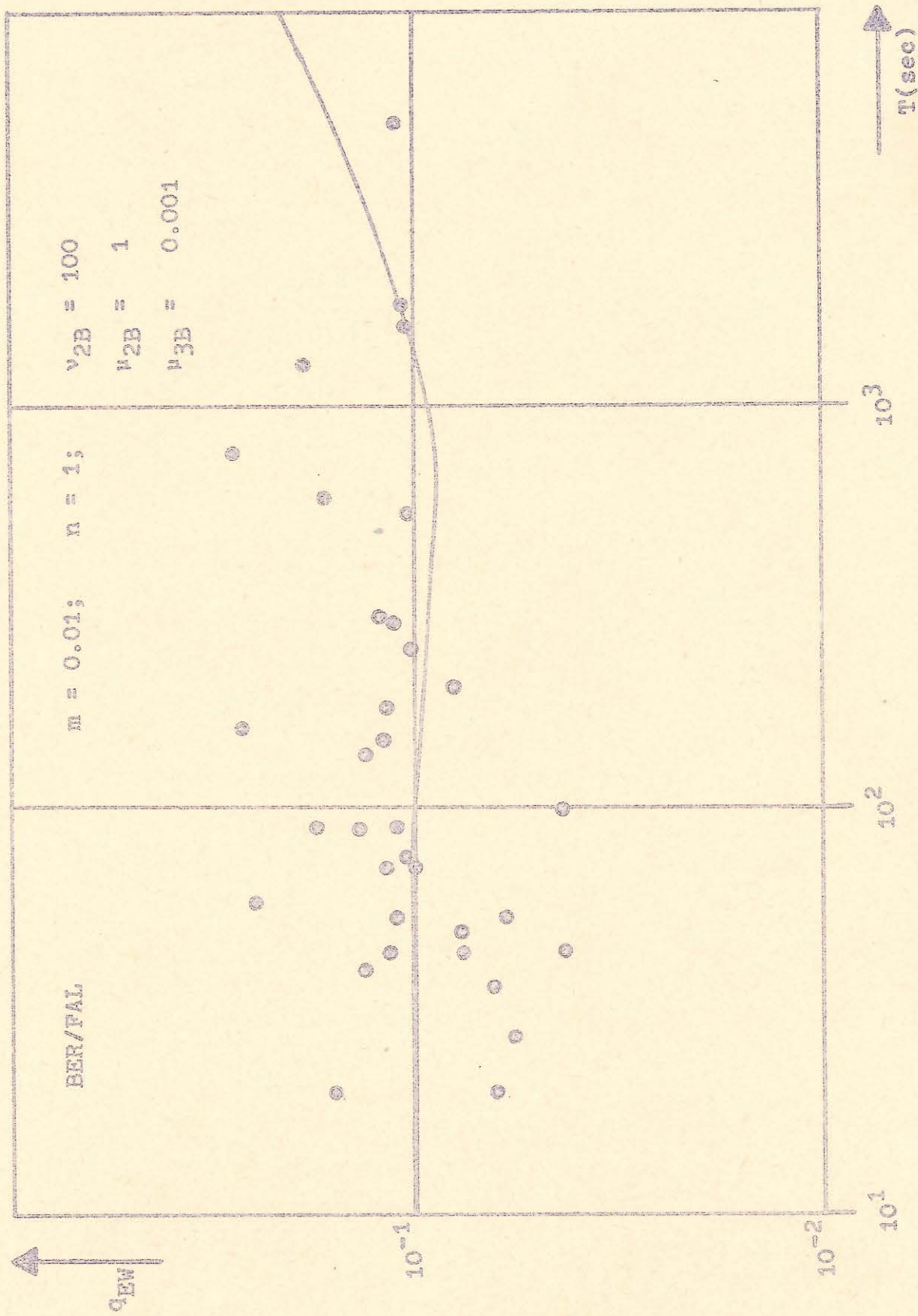


FIGURE 5

$$(15) \quad \frac{H_z}{E_y} = - \frac{\gamma}{k_0} \frac{\cos \nu x}{\sin \nu x}; \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{H_z}{E_y} \right| = \frac{\gamma}{\omega} \operatorname{ctg} \nu x = \frac{T}{L} \operatorname{ctg} \nu x$$

Der formale, ortsabhängige Faktor $\operatorname{ctg} \nu x$ kann o. E. d. A. gleich 1 gesetzt werden. Dann erhält man für ein inhomogenes Magnetfeld mit einer räumlichen Wellenlänge $L = 10000 \text{ km}$ und einer Periode $T = 100 \text{ sec}$

$$\left| \frac{H_z}{E_y} \right| = 10^{-7} (\text{cgs}) = 10^{-2} \frac{\text{V}}{\text{km}};$$

das ergibt bei einer mittleren Empfindlichkeit der Registriergeräte von $2 \text{ mm}/\gamma$ bzw. $2,5 \text{ mm}/\text{mV}/\text{km}$ ein Amplitudenverhältnis von $1 : 125$ zugunsten der E-Feldregistrierung. Dies gilt, wie gesagt, nur, wenn der Untergrund weitgehend horizontale Schichtung aufweist.

b) Vergleich der Horizontalkomponenten: Auf Grund von Gl. (5) wird

$$(16) \quad \frac{H_{xW}}{H_{xB}} = \left(\frac{N}{M+N} \right)_W \cdot \left(\frac{M+N}{N} \right)_B \\ = \frac{k_{1W}(R+S)_W}{k_{1B}(R+S)_B} \cdot \frac{\sqrt{(R-S)}_B + k_{1B}(R+S)_B}{\sqrt{(R-S)}_W + k_{1W}(R+S)_W} \rightarrow 1 \quad \text{für } \nu \rightarrow 0.$$

Das bedeutet, daß für schwach inhomogene Felder die Horizontalkomponente des Magnetfeldes über zwei Modellen mit beliebiger inhomogener Schichtung gleich ist, d. h. die Horizontalkomponente trägt in diesem Fall zur Induktion von Strömen im Untergrund nicht bei.

In der Magnetotellurik nach Cagniard wird das Verhältnis E_y/H_x an jedem Meßpunkt benötigt. Nach dem eben Gesagten müßte es (wenn die Cagniardschen Voraussetzungen erfüllt sind) genügen, nur an einem Ort H_x und mit den Wanderstationen E zu registrieren, da nur letzteres die Struktur des Untergrundes widerspiegelt.

c) Ersetzen der E-Feldregistrierung durch eine Magnetfeldregistrierung: Es ist theoretisch durchaus möglich, die Impedanz E_y/H_x in der Form H_z/H_x auszudrücken. Dafür erhält man nach Gl. (5):

$$\frac{H_z}{H_x} = \frac{M}{N} \cdot \operatorname{ctg} \nu x \rightarrow \frac{R-S}{k_1(R+S)} \quad \text{für } \nu \rightarrow 0$$

und daraus mit $k_1 \approx \sqrt{4\pi i \omega \sigma_1}$

$$(17) \quad \left| \frac{H_z}{H_x} \right|^2 = \frac{T}{8\pi^2} \varrho_1 \left| \frac{R-S}{R+S} \right|^2.$$

Die Definitionsgleichung für den scheinbaren spezifischen Widerstand ist also in diesem Fall

$$(18) \quad \varrho_s = \frac{8\pi^2}{T} \left(\frac{H_z}{H_x} \right)^2$$

$$\text{(gegenüber } \varrho_s = 2T \left| \frac{E_y}{H_x} \right|^2 \text{ sonst).}$$

Man kann also die Cagniardschen ϱ_s -Kurven ohne weiteres auch dann zur Bestimmung der Leitfähigkeitsstruktur des Untergrundes verwenden, wenn man nur gleichzeitige Registrierungen von H_x und H_z besitzt; der scheinbare spezifische Widerstand ϱ_s ist dann jedoch nach Gl. (18) zu berechnen.