



**GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM**  
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

---

# Scientific Technical Report

Jan M. Hagedoorn

Detlef Wolf

Jürgen Neumeyer

**Modellierung von atmosphärischen Einflüssen  
auf hochgenaue Schweremessungen  
mit Hilfe elastischer Erdmodelle**

---

2000

Scientific Technical Report STR00/15



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>vii</b>
<b>Summary</b>	<b>viii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Einflüsse auf SG-Daten . . . . .	1
1.2 Atmosphärische Einflüsse auf SG-Daten . . . . .	2
<b>2 Freiluft- und Deformationseffekt</b>	<b>5</b>
2.1 Grundlagen . . . . .	5
2.1.1 Erdmodell . . . . .	5
2.1.2 Kinematische Formulierung . . . . .	5
2.2 Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik . . . . .	8
2.2.1 Totalfelder . . . . .	8
2.2.2 Referenzfelder . . . . .	9
2.2.3 Inkrementielle Felder . . . . .	10
2.2.4 Vereinfachende Annahmen . . . . .	11
2.3 Lösung der inkrementiellen Feldgleichungen . . . . .	11
2.3.1 Zylinderkoordinaten . . . . .	11
2.3.2 Hankel-Transformation . . . . .	14
2.3.3 Propagatoren . . . . .	15
2.3.4 Lösung des DGL-Systems im Spektralbereich . . . . .	18
2.4 Rücktransformation der Lösung . . . . .	23
2.4.1 Hankel-Transformation des Auflastdrucks . . . . .	23
2.4.2 Inverse Hankel-Transformation . . . . .	25
<b>3 Luftmasseneffekt</b>	<b>26</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	26
3.2 Dichteverteilung in der Atmosphäre . . . . .	26
3.3 Temperaturverteilung in der Atmosphäre . . . . .	27
3.3.1 Standard-Temperaturprofil . . . . .	28
3.3.2 Variation des Standard-Temperaturprofils . . . . .	28
3.4 Attraktion durch die Luftmassen . . . . .	29
3.4.1 Ebenes Atmosphärenmodell . . . . .	29
3.4.2 Sphärisches Atmosphärenmodell . . . . .	32
<b>4 Numerische Umsetzung der Theorie</b>	<b>35</b>
4.1 Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags . . . . .	35
4.1.1 Modellparameter . . . . .	35
4.1.2 Geometrie der Auflastdruckverteilung . . . . .	35
4.1.3 Numerische Ausführung der inversen Hankel-Transformation . . . . .	37
4.2 Berechnung des Luftmassenbeitrags . . . . .	39
4.2.1 Diskretisierung der Atmosphärenmodelle . . . . .	39
4.2.2 Luftdruck- und Lufttemperaturverteilung . . . . .	39
4.2.3 Numerische Integration . . . . .	41

4.3	Hinweise zur Modellierung . . . . .	41
4.3.1	Wahl des Referenzzeitpunkts . . . . .	41
4.3.2	Hinweise zum Programm . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Einfluß der Modellannahmen auf die Berechnungen</b>	<b>43</b>
5.1	Einfluß der Annahmen zum Erdmodell . . . . .	43
5.1.1	Einfluß der Schichtung . . . . .	43
5.1.2	Einfluß der Kompressibilität . . . . .	43
5.1.3	Einfluß des IBO-Modells . . . . .	45
5.2	Einfluß der Annahmen zum Atmosphärenmodell . . . . .	47
5.2.1	Einfluß der Geometrie . . . . .	47
5.2.2	Einfluß des Dichteprofiles . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Reduktion der SG-Daten</b>	<b>52</b>
6.1	Angaben zu den SG-Daten . . . . .	52
6.2	Reduktion der SG-Daten hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags . . . . .	52
6.2.1	Zylindrisches Atmosphärenmodell . . . . .	52
6.2.2	Sphärisches Atmosphärenmodell . . . . .	55
6.3	Bewertung der Reduktion der SG-Daten . . . . .	58
6.3.1	Vergleich der unterschiedlichen Atmosphärenmodelle . . . . .	58
6.3.2	Vergleich mit anderen Reduktionsverfahren . . . . .	59
6.4	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	61
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zu Kapitel 2</b>	<b>65</b>
A.1	Feldgleichungen im Referenzzustand . . . . .	65
A.2	Inkrementielle Feldgleichungen in materieller Form . . . . .	66
A.3	Inkrementielle Feldgleichungen in materiell-lokaler Form . . . . .	68
A.4	Vereinfachte Feldgleichungen . . . . .	69
A.5	Feldgleichungen in Zylinderkoordinaten . . . . .	70
A.6	Hankel-Transformation der Feldgleichungen . . . . .	71
A.7	Eigenwertbestimmung . . . . .	74
A.8	Berechnung der Propagatoren . . . . .	74
A.9	Berechnung des gravitativen Lösungsvektors . . . . .	76
A.10	Berechnung der Grenzflächenbedingung für $z_1$ . . . . .	77
A.11	Hankel-Transformation des Auflastdrucks . . . . .	79
<b>B</b>	<b>Ergänzungen zu Kapitel 3</b>	<b>80</b>
B.1	Berechnung des Attraktionsintegrals für ebenes Atmosphärenmodell . . . . .	80
B.2	Berechnung des Attraktionsintegrals für sphärisches Atmosphärenmodell . . . . .	80
<b>C</b>	<b>Ergänzungen zu Kapitel 4</b>	<b>82</b>
C.1	Erdmodellparameter . . . . .	82
C.2	Numerische Integration . . . . .	82
<b>D</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>85</b>
D.1	Lateinische Symbole . . . . .	85
D.2	Griechische Symbole . . . . .	87

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Atmosphärische Einflüsse auf SG-Daten. . . . .	3
1.2	Meßgitter der meteorologischen Daten für das Atmosphärenmodell. . . . .	4
2.1	Elastischer Halbraum . . . . .	7
2.2	Lösungsweg der Hankel-Transformations-Methode . . . . .	12
2.3	Ebenes, geschichtetes Erdmodell . . . . .	13
2.4	Aufteilung der Oberfläche $z_1$ in Kreisringe . . . . .	24
3.1	Vergleich dreier Temperaturprofile. . . . .	29
3.2	Vertikaler Abstand zwischen Bezugsebene und Erdoberfläche. . . . .	30
3.3	Zur Dichtemittelung verwendeter Zylindermantel. . . . .	32
3.4	Zur Berechnung des Attraktionsintegrals verwendetes Kugelschalensegment. . . . .	33
4.1	Parameter von Erdmodell PSC . . . . .	36
4.2	Parameter von Erdmodell LC . . . . .	36
4.3	Lastspektren . . . . .	37
4.4	Spektren der Verschiebung und der Schwere . . . . .	38
4.5	Luftdruck- und Temperaturmeßwerte . . . . .	40
5.1	Oberflächenverschiebung (Einfluß der Schichtung) . . . . .	44
5.2	Deformationsbeitrag (Einfluß der Schichtung) . . . . .	44
5.3	Oberflächenverschiebung (Einfluß der Kompressibilität) . . . . .	45
5.4	Deformationsbeitrag (Einfluß der Kompressibilität) . . . . .	45
5.5	Summe von Freiluft- und Deformationsbeitrag . . . . .	46
5.6	Oberflächenverschiebung (Einfluß des IBO-Modells) . . . . .	46
5.7	Deformationsbeitrag (Einfluß des IBO-Modells) . . . . .	47
5.8	Luftmassenbeitrag (Einfluß der Atmosphärenhöhe) . . . . .	48
5.9	Luftmassenbeitrag (Einfluß der Modellgeometrie) . . . . .	48
5.10	Skalenhöhe (Einfluß des Temperaturprofils) . . . . .	49
5.11	Dichte (Einfluß der Skalenhöhe) . . . . .	50
5.12	Dichte (Einfluß des Temperaturprofils) . . . . .	51
5.13	Luftmassenbeiträge (unterschiedliche Dichteprofile) . . . . .	51
6.1	Zeitreihe der bearbeiteten SG-Daten . . . . .	53
6.2	Atmosphärischer Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement. . . . .	53
6.3	Luftmassenbeitrag zum Schwereinkrement (ebenes Atmosphärenmodell) . . . . .	54
6.4	Freiluftbeitrag zum Schwereinkrement. . . . .	54
6.5	Deformationsbeitrag zum Schwereinkrement. . . . .	55
6.6	Schwereresiduum (ebenes Atmosphärenmodell) . . . . .	55
6.7	Atmosphärischer Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement. . . . .	56
6.8	Luftmassenbeitrag zum Schwereinkrement (sphärisches Atmosphärenmodell) . . . . .	57
6.9	Schwereresiduum (sphärisches Atmosphärenmodell) . . . . .	57
6.10	Schwereresiduum für ebenes Atmosphärenmodell . . . . .	58
6.11	Schwereresiduum für sphärisches Atmosphärenmodell . . . . .	59
6.12	Schwereresiduum für Modell nach Neumeyer <i>et al.</i> (1998) . . . . .	60
6.13	Schwereresiduum für ebenes Atmosphärenmodell (R=900 km) . . . . .	60

6.14 Schwereresiduum für sphärisches Atmosphärenmodell (Temperaturprofilvariation)	61
--	----

## Tabellenverzeichnis

3.1	Temperaturgradienten des Standard-Temperaturprofils. . . . .	28
3.2	Vertikaler Abstand zwischen Bezugsebene und Erdoberfläche und relative Massenanteile . . . . .	30
3.3	Relativer Anteil des gesamten Luftmassenbeitrags . . . . .	31
C.1	Parameter von Erdmodell PSC. . . . .	83
C.2	Parameter von Erdmodell LC. . . . .	84



## Kurzfassung

Die Arbeit behandelt die Modellierung des atmosphärischen Gesamtbeitrags zum Schwereinkrement. Ziel ist die Reduktion von hochgenauen Schweremessungen, die mit dem Supraleit-Gravimeter am Ort des GeoForschungsZentrums Potsdam registriert wurden. Im einzelnen werden folgende Komponenten des atmosphärischen Gesamtbeitrags betrachtet: der Freiluft-, der Deformations- und der Luftmassenbeitrag.

Der Freiluft- und der Deformationsbeitrag werden mit Hilfe eines ebenen, kompressiblen, elastischen Erdmodells berechnet. Dazu wird die elastische Feldtheorie von Wolf (o.J.) benutzt, die ein Spezialfall der gravito-viskoelastischen Feldtheorie von Wolf (1997) ist. Für die Berechnung des Luftmassenbeitrags wird aus der U.S. Standard Atmosphere 1976 (NOAA, 1976) und synoptischen meteorologischen Daten ein einfaches Atmosphärenmodell entwickelt.

Ein weiterer Aspekt ist die Untersuchung des Einflusses mehrerer Modellannahmen auf die berechneten atmosphärischen Beiträge. Es kann gezeigt werden, daß bei der Schichtung des Erdmodells die Beschränkung auf die Hauptdiskontinuitäten nahe 400 km und 670 km Tiefe eine angemessene Näherung liefert. Im Gegensatz dazu hat die Verwendung eines inkompressiblen Erdmodells erhebliche Konsequenzen, d. h. die Kompressibilität des Materials darf nicht vernachlässigt werden. Für das Atmosphärenmodell ergibt sich bei Annahme ebener Geometrie eine unzureichende Genauigkeit. Deshalb wird ein sphärisches Atmosphärenmodell entwickelt, für das die Einflüsse des Temperaturprofils und der Skalenhöhe untersucht werden.

Ein Vergleich zwischen den Residuen nach Reduktion mit den hier betrachteten Modellen und den Residuen nach Reduktion mit anderen Verfahren wird zur Bewertung herangezogen. Die besten Ergebnisse werden mit dem neu entwickelten Modell mit sphärischer Atmosphäre erzielt.

## Summary

The investigation is concerned with the modelling of the total atmospheric contribution to the gravity increment. The objective is the reduction of high-accuracy gravity measurements recorded by the super-conducting gravimeter at the location of the GeoForschungsZentrum Potsdam. In particular, the following components of the total atmospheric contribution are considered: the free-air, the deformation and the air-mass contribution.

The free-air and the deformation contribution are calculated by means of a plane, compressible, elastic earth model. For this, the elastic field theory of Wolf (o.J.) is used, which is a special case of the gravito-viscoelastic field theory of Wolf (1997). For the calculation of the air-mass contribution, a simple atmosphere model is developed from the U.S. Standard Atmosphere 1976 (NOAA, 1976) and synoptic meteorological data.

Another aspect is the study of the influence of several model assumptions on the calculated atmospheric contributions. It can be shown that, regarding the stratification of the earth model, the restriction to the main discontinuities near 400 km and 670 km depth provides a reasonable approximation. In contrast to this, the use of an incompressible earth model has significant consequences, i.e. the compressibility of the material cannot be neglected. For the atmosphere model, the assumption of plane geometry results in insufficient accuracy. Therefore, a spherical atmosphere model is developed, for which the influences of the temperature profile and the scale-height are studied.

A comparison between the residuals after reduction with the models considered here and the residuals after reduction with different methods is used for assessment. The best results are obtained with the newly developed model with spherical atmosphere.



# 1. Einleitung

Supraleit-Gravimeter (SG) sind in der Lage, zeitliche Variationen des Schwerfelds bis zu einigen nGal ( $10^{-11} \text{ m s}^{-2}$ ) zu registrieren. Dies ermöglicht die Beobachtung von verschiedenen Massenverlagerungen als Quellen der Variationen des Schwerfelds.

Hierin liegt die Möglichkeit der Beobachtung von Variationen begründet, die z. B. durch Erdzeiten, Eigenschwingungen der Erde nach starken Erdbeben und translatorischen Oszillationen des festen Erdkerns verursacht werden. Jedoch existiert auch die Schwierigkeit der Trennung der unterschiedlichen Anteile der Variationen des Schwerfelds.

Meist ist nur ein Anteil von Interesse, doch werden alle gemeinsam registriert. So wird versucht, mit Hilfe zusätzlicher Informationen die nicht interessierenden Anteile abzuschätzen und die Meßdaten hinsichtlich dieser Anteile zu reduzieren. Je nach dem zu bestimmenden Anteil werden hierzu unterschiedliche Methoden genutzt.

Von besonderem Interesse ist der durch die wechselnde Luftmassenverteilung verursachte Anteil, da dieser nach dem durch die Gezeiten verursachten Anteil betragsmäßig am größten ist.

Im folgenden Abschnitt 1.1 werden die unterschiedlichen Einflüsse auf SG-Daten vorgestellt und auch unterschiedliche Methoden der quantitativen Bestimmung dieser Einflüsse besprochen. Danach werden in Abschnitt 1.2 die atmosphärischen Einflüsse auf SG-Daten angegeben, mit denen sich diese Arbeit befaßt.

## 1.1 Einflüsse auf SG-Daten

Eine Vielzahl von Einflüssen auf SG-Daten sind direkt mit der Massenverlagerung in Verbindung zu bringen. Hierzu zählt u. a. der Einfluß der Luftmassen, der Niederschläge, der Bodenfeuchte, des Grundwasserspiegels und der Schneebedeckung. Die erwähnten Gezeiten gehören auch hierzu. Viele der genannten Einflüsse haben neben dem direkten Effekt der Änderung der Attraktion einen indirekten Effekt, nämlich den der Deformation der Erde durch die variierende Auflast. Hierauf wird noch genauer in Abschnitt 1.2 bei der Betrachtung der atmosphärischen Einflüsse auf SG-Daten eingegangen. Ein anderer Einfluß auf SG-Daten ist der sich durch die Polwanderung verändernde Zentrifugalanteil des Schwerfelds an einem festen Ort.

Die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der unterschiedlichen Einflüsse lassen sich zwei Methoden zuordnen. Zu der ersten gehören statistische Verfahren, die den Regressionskoeffizienten für SG-Daten und charakteristische Meßwerte eines bestimmten Einflusses untersuchen. Als Beispiel sei hier der Luftdruck als charakteristische Meßgröße für die Luftmassenverlagerung angegeben. Diese statistischen Verfahren lassen sich noch ausweiten auf die Bestimmung frequenzabhängiger Regressionskoeffizienten, wie es z. B. von Neumeyer (1995) für den Einfluß der

Atmosphäre durchgeführt ist. Mit Neumeyer & Dittfeld (1997) sei hier noch ein weiteres Beispiel für die statistische Methode angegeben, nun allerdings zusätzlich für den Einfluß des Grundwasserspiegels. Die zweite Methode beschreibt physikalisch die unterschiedlichen Einflüsse. Mit Hilfe von charakteristischen Meßwerten und einem physikalischen Modell werden die entsprechenden Einflüsse berechnet. So wird z. B. aus den meteorologischen Meßwerten Temperatur und Luftdruck mit Hilfe eines Modells für die Dichteverteilung der Atmosphäre die Attraktion bestimmt (z. B. Merriam, 1992).

Für die meisten der genannten Einflüsse wurden Verfahren zur Bestimmung nach der ersten und/oder der zweiten Methode entwickelt<sup>1</sup>. Es wurden auch einige Untersuchungen zum Vergleich der Methoden vorgenommen. Hier sei auf Kroner & Jentzsch (1997, 1998, 1999) und Neumeyer *et al.* (1998) hingewiesen. Auf die zuletzt genannte Untersuchung wird noch eingegangen, da Ergebnisse dieser Untersuchung in Abschnitt 6.3 zum Vergleich herangezogen werden.

## 1.2 Atmosphärische Einflüsse auf SG-Daten

In diesem Abschnitt sollen die unterschiedlichen atmosphärischen Einflüsse auf SG-Daten besprochen werden. Die einzelnen Einflüsse sind in Abb. 1.1 skizziert und benannt. Durch die variierende Luftdruckverteilung auf der Oberfläche wird die Erde deformiert. Diese Deformation bewirkt die vertikale Verschiebung des Gravimeters. Die sich daraus ergebene Schwereänderung wird als *Freilufteffekt* bezeichnet. Der zweite Einfluß, der mit der Deformation der Erde verbunden ist, wird *Deformationseffekt* genannt und beschreibt die Schwereänderung durch die sich neu ergebene Dichteverteilung in der Erde. Auf die theoretische Beschreibung dieser beiden Effekte wird in Kapitel 2 eingegangen. Die dritte Schwereänderung ist durch die Variation der Luftmassenverteilung bedingt, d. h. die Änderung der *Newtonschen* Attraktion am Gravimeter durch die Luftmassen, und wird als *Luftmasseneffekt* bezeichnet. In Kapitel 3 wird ein Atmosphärenmodell vorgestellt, das es ermöglicht, diesen Einfluß anhand von meteorologischen Meßdaten zu berechnen.

Die zu Verfügung stehenden Daten des ECMWF<sup>2</sup> sind die Bodenwerte der Lufttemperatur und des Luftdrucks auf einem Meßgitter, in dem Potsdam (52.3806°N, 13.0682°E) annähernd im Mittelpunkt liegt (Abb. 1.2). Dieses Gitter mit einer räumlichen Auflösung von 0.5625° erstreckt sich von 42.750°N bis 62.875°N und von 2.250°W bis 28.125°E. Die meteorologischen Daten liegen in sechsständlichen Werten für den Zeitraum vom 01.07.1992 bis zum 27.03.1995 vor. Für den gleichen Zeitraum werden SG-Daten des Supraleit-Gravimeter TT70 des GFZ Potsdam herangezogen. Die verwendeten Daten sind gezeitenreduzierte Meßwerte, die zu stündlichen Werten gemittelt worden sind. Genauer wird auf die SG-Daten in Kapitel 6 eingegangen.

Nach der theoretischen Beschreibung der drei Schwerebeiträge wird in Kapitel 4 auf die

<sup>1</sup> Luftdruck und Deformation: z. B. Spratt (1982), Müller & Zürn (1983), Rabbel & Zschau (1985), Niebauer (1988), Sun *et al.* (1995), Boy & Hinderer (1999). Niederschläge: z. B. Bower & Courtier (1998), Neumeyer *et al.* (1999). Ozeanische Auflasten: z. B. Lambert *et al.* (1998).

<sup>2</sup> European Centre of Medium Range Weather Forecasts, Reading, Great Britain.

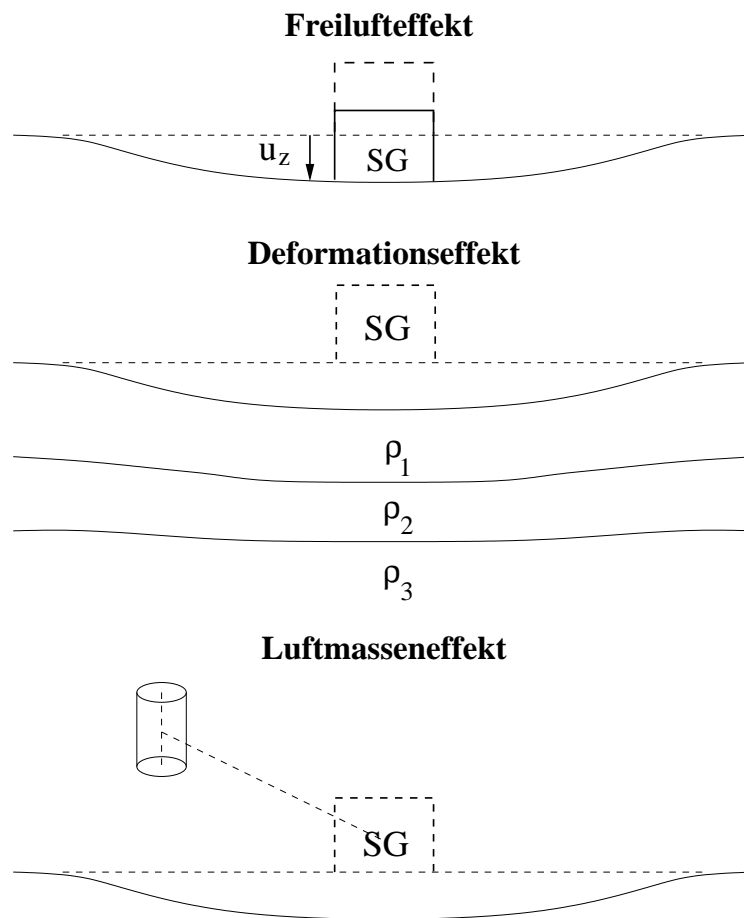


Abbildung 1.1: Atmosphärische Einflüsse auf SG-Daten.

numerische Umsetzung der Theorie zur Modellierung der drei Beiträge eingegangen. Nach einer Untersuchung der Einflüsse verschiedener Modellannahmen in Kapitel 5 werden in Kapitel 6 die reduzierten SG-Daten besprochen.

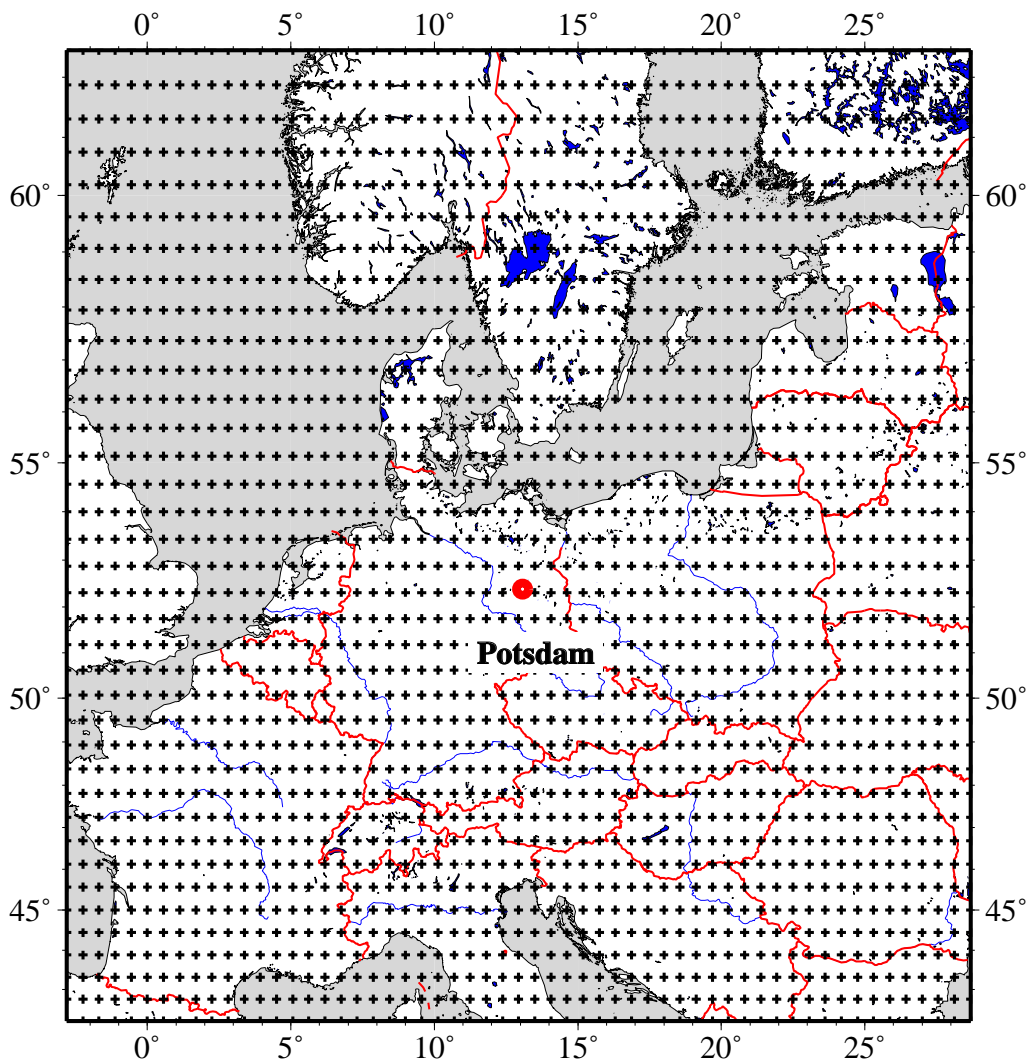


Abbildung 1.2: Meßgitter der meteorologischen Daten für das Atmosphärenmodell.

## 2. Theorie und Berechnung des Freiluft- und Deformationseffekts

In diesem Kapitel werden der Freiluft- und Deformationseffekt mit Hilfe der Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik berechnet. Hierzu werden die relevanten Feldgleichungen hergeleitet und der Lösungsweg aufgezeigt. Eine ähnliche Vorgehensweise, jedoch für ein viskoelastisches Kontinuum, findet sich bei Wolf (1985a) und Thoma & Wolf (1999).

In Abschnitt 2.1 wird auf die Geometrie, das Erdmodell und die kinematische Formulierung der Gleichungen eingegangen, und anschließend werden in Abschnitt 2.2 die Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik zusammengestellt. Die Lösung dieser Gleichungen wird in Abschnitt 2.3 beschrieben. Da sich die Rücktransformation in den Raumbereich nur numerisch ausführen läßt, wird darauf gesondert in Abschnitt 2.4 eingegangen.

### 2.1 Grundlagen

#### 2.1.1 Erdmodell

In Abb. 1.2 ist ersichtlich, über welches Gebiet sich die Auflastdruckverteilung erstreckt. Da nur eine begrenzte Umgebung Potsdams betrachtet wird<sup>1</sup>, kann im folgenden wie auch von Wolf (1986, 1987) und Thoma & Wolf (1999) ein *ebenes* Erdmodell benutzt werden (siehe hierzu Wolf, 1984; Amelung & Wolf, 1994). Insbesondere wird ein kompressibler, elastischer Halbraum betrachtet, der als *Hookescher Körper* mit den Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  sowie der Volumendichte  $\rho$  parametrisiert werden kann. Dieser Halbraum soll in beliebig viele Schichten aufgeteilt sein, wobei innerhalb jeder Schicht  $l$  die Größen  $\lambda_l$ ,  $\mu_l$  und  $\rho_l$  als stetig angenommen werden.

#### 2.1.2 Kinematische Formulierung

Die hier verwendete Notation, die in der Kontinuumsmechanik gebräuchlich ist, wird ausführlich von Wolf (1997, Kapitel 2) besprochen. Im folgenden werden bis zur Transformation der Feldgleichungen in Zylinderkoordinaten (Abschnitt 2.3.1) die kartesischen Indizes  $(i, j, \dots = 1, 2, 3)$  verwendet. Es ist zu beachten, daß  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol und  $\epsilon_{ijk}$  das Levi-Civita-Symbol ist und die *Einsteinsche* Summationskonvention benutzt wird.

Der betrachtete geschichtete Halbraum wird als Kontinuum aufgefaßt und mit  $\mathcal{X}$  bezeichnet. Der Halbraum ist in  $L$  Schichten  $\mathcal{X}_l$  aufgeteilt, wobei diese durch  $L$  Grenzflächen  $\partial\mathcal{X}_l$  getrennt sind. Die obere Grenzfläche  $\partial\mathcal{X}_1$  ist somit die Erdoberfläche, die Grenze zur Atmosphäre. Der

---

<sup>1</sup> In der Modellierung werden maximal Abstände von 1100 km vom Aufpunkt Potsdam betrachtet.



Halbraum  $\mathcal{X}$  läßt sich demnach wie folgt beschreiben (Abb. 2.1):

$$\mathcal{X} = \bigcup_{l=1}^L (\mathcal{X}_l \cup \partial\mathcal{X}_l). \quad (2.1)$$

Bei einem Auflastdruck werden die Partikeln des Kontinuums unterschiedlich verschoben. Bezeichnet man die deformierten Schichten mit  $\mathcal{R}_l$  und die entsprechenden Grenzflächen mit  $\partial\mathcal{R}_l$ , so ergibt die Vereinigung von Schichten und Grenzflächen den Halbraum im gestörten Zustand (Abb. 2.1):

$$\mathcal{R} = \bigcup_{l=1}^L (\mathcal{R}_l \cup \partial\mathcal{R}_l). \quad (2.2)$$

Wird zu jedem Zeitpunkt  $t$  die aktuelle Position  $r_i$  einer Partikel als Funktion ihrer Referenzposition  $X_i$  im Ausgangszustand und seiner Verschiebung  $u_i$  beschrieben, ergibt sich die Lagrange-Formulierung:

$$r_i = r_i(\mathbf{X}, t) = X_i + u_i(\mathbf{X}, t), \quad X_i \in \bigcup_{l=1}^L \mathcal{X}_l. \quad (2.3)$$

Für eine beliebige Feldgröße  $f_{ij\dots}$  wird in dieser Formulierung ihr Wert an der aktuellen Position  $r_i$  als Funktion der Referenzposition  $X_i$  und der Zeit  $t$  angegeben:

$$f_{ij\dots} = f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t), \quad X_i \in \bigcup_{l=1}^L \mathcal{X}_l. \quad (2.4)$$

Hingegen ist in der Euler-Formulierung die Referenzposition  $X_i$  eine Funktion der aktuellen Position  $r_i$  und der Verschiebung  $U_i$ :

$$X_i(\mathbf{r}, t) = r_i - U_i(\mathbf{r}, t), \quad r_i \in \bigcup_{l=1}^L \mathcal{R}_l. \quad (2.5)$$

Die Euler-Formulierung für beliebige Feldgrößen ergibt sich dann zu

$$F_{ij\dots} = F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t), \quad r_i \in \bigcup_{l=1}^L \mathcal{R}_l. \quad (2.6)$$

In (2.3) und (2.5) ist angenommen, daß die  $X_i$ - und  $r_i$ -Koordinatensysteme identisch sind (Abb. 2.1).

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß  $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$  und  $F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t)$  so oft wie nötig nach  $X_i$  bzw.  $r_i$  differenzierbar sind. Die Gradienten der Feldgrößen werden im folgenden in der Indexnotation dargestellt:

$$f_{ij\dots,k}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial X_k} f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t), \quad (2.7)$$

$$F_{ij\dots,k}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r_k} F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

Vergleicht man (2.7) und (2.8) unter Berücksichtigung von  $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) = F_{ij\dots}[\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t]$ , so zeigt sich, daß die Gradienten im allgemeinen ungleich sind:  $f_{ij\dots,k}(\mathbf{X}, t) \neq F_{ij\dots,k}[\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t]$ .

Für alle Feldgrößen wird in dieser Arbeit die Lagrange-Formulierung benutzt. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Feldgrößen innerhalb der einzelnen Schichten  $\mathcal{X}_l$  stetig sind. Hingegen sind an den Grenzflächen  $\partial\mathcal{X}_l$  Unstetigkeiten zugelassen:

$$[f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{-}^{+} = f_{ij\dots}^{+}(\mathbf{X}, t) - f_{ij\dots}^{-}(\mathbf{X}, t) \neq 0, \quad X_i \in \partial\mathcal{X}_l, \quad (2.9)$$

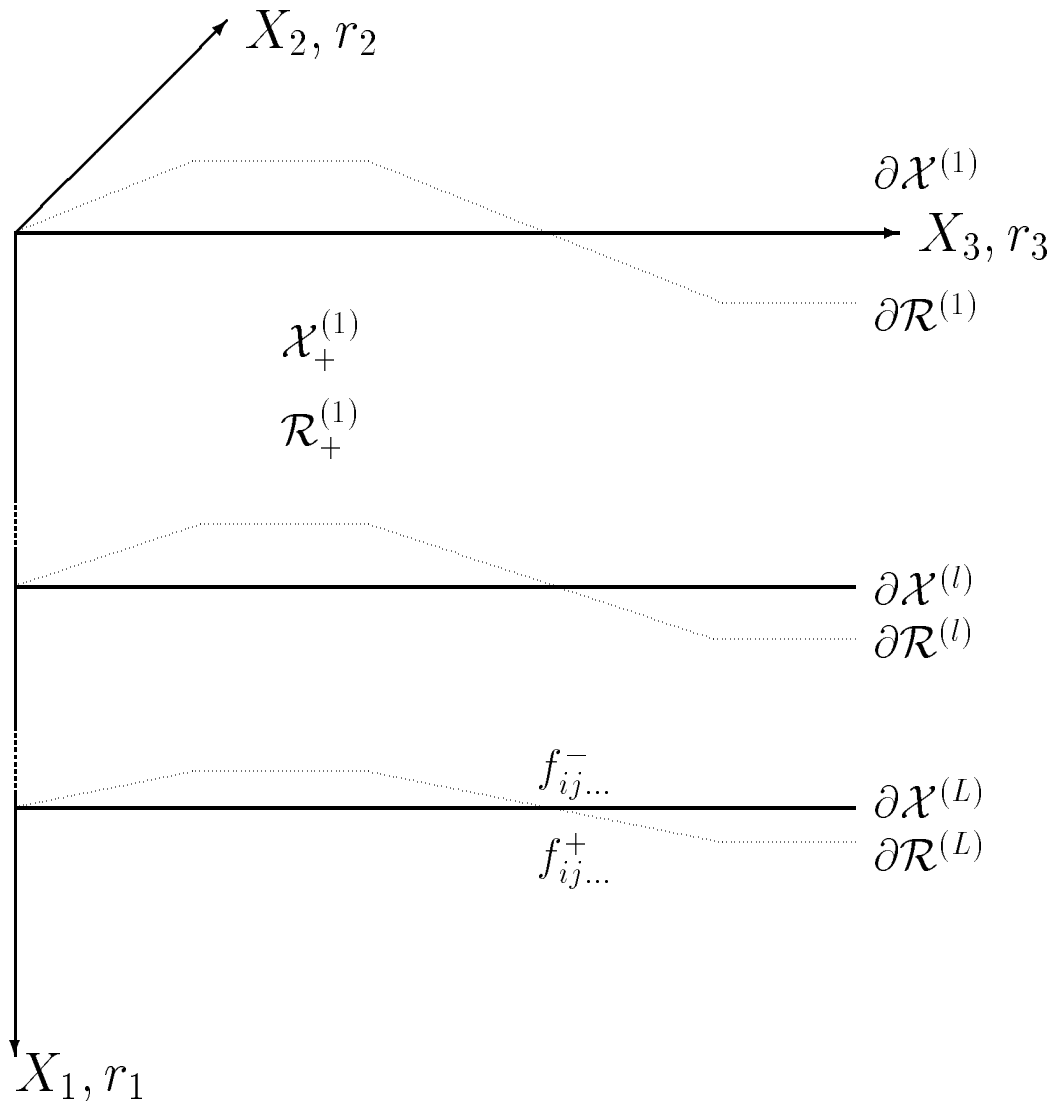


Abbildung 2.1: Elastischer Halbraum mit  $L$  Schichten im Referenzzustand und im aktuellen Zustand.

wobei mit  $f_{ij\dots}^+(\mathbf{X}, t)$  und  $f_{ij\dots}^-(\mathbf{X}, t)$  der innere bzw. äußere Grenzwert der Feldgröße bezeichnet wird.

Die Variation von Feldgrößen bedingt durch Störeinflüsse wird durch die Abweichung des Totalwerts der Feldgröße vom Referenzwert beschrieben<sup>2</sup>:

$$f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) + f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t), \quad (2.10)$$

wobei  $f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) := f_{ij\dots}(\mathbf{X}, 0)$  den für  $t = 0$  angenommenen Referenzwert bezeichnet. Die Größe  $f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t)$  beschreibt die Änderung der von  $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$  für eine Partikel des Kontinuums bei der Auslenkung aus ihrer Referenzposition. Deshalb wird  $f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t)$  als *materielles Inkrement* bezeichnet. Daneben wird in dieser Arbeit noch das *lokale Inkrement*  $f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t)$  verwendet, das

<sup>2</sup> Zur störungstheoretischen Betrachtung siehe Wolf (1997, Abschnitt 2.3), Wierczkowski (1999, Abschnitt 2.2).

die Änderung einer Feldgröße an einem festen Ort beschreibt. Bei infinitesimalen Störungen läßt sich mit Hilfe des *advectiven Inkrements* folgender Zusammenhang zwischen lokalem und materiellem Inkrement angeben (Wolf, 1997, Abschnitt 2.3):

$$f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) + f_{ij\dots,k}^{(0)}(\mathbf{X}) u_k(\mathbf{X}, t). \quad (2.11)$$

## 2.2 Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik

Ausgangspunkt für die Ableitung der in dieser Arbeit verwendeten Feldgleichungen und deren Lösungen sind die Gleichungen der Totalfelder für ein isotropes, homogen geschichtetes Kontinuum. Diesen Gleichungen liegen die verallgemeinerten Beziehungen von Wolf (1997) zugrunde. Für die mechanischen Feldgrößen finden sich die hier verwendeten Gleichungen auch in Wolf (1985b). Der betrachtete *elastostatische* Fall stellt eine Näherung dar, die sich durch die gegenüber den Eigenperioden der Erde großen Anregungsperioden der Luftdruckvariationen begründen läßt. Diese Anregungsperioden sind klein gegenüber den Relaxationszeiten des Halbraums, was die Vernachlässigung viskoelastischer Effekte rechtfertigt.

### 2.2.1 Totalfelder

Für die Totalfelder gilt der Definitionsbereich:  $\cup_{l=1}^L \mathcal{X}_l$ . Es werden demnach die jeweiligen Größen innerhalb der Schichten beschrieben. Mit den oben genannten Vereinfachungen läßt sich aus der Impulserhaltung die hier relevante Form der Bewegungsgleichung ableiten:

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad \tau_{ij,j} + \rho^{(0)} g_i = 0. \quad (2.12)$$

Dabei bezeichnet  $\tau_{ij}$  die (asymmetrische) Piola-Kirchhoff-Spannung,  $\rho$  die Volumenmassendichte und  $g_i$  die Schwere. Aus der Massenerhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \rho j = \rho^{(0)}. \quad (2.13)$$

Die Jakobi-Determinante  $j$  hat folgende Definition:

$$\text{Jakobi-Determinante:} \quad j := \det[r_{i,j}]. \quad (2.14)$$

Für den elastischen Fall gilt bei Isotropie die *Hookesche* Materialgleichung:

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{ij} = t_{ij}^{(0)} + \delta_{ij} \lambda e_{kk} + 2\mu e_{ij}. \quad (2.15)$$

Dabei bezeichnet  $t_{ij}$  die (symmetrische) Cauchy-Spannung,  $e_{ij}$  die Verzerrung und  $\lambda$  sowie  $\mu$  die Lamé-Konstanten. Für die Lösung der Feldgleichungen wird der Zusammenhang zwischen der Piola-Kirchhoff-Spannung in (2.12) und der Cauchy-Spannung in (2.15) benötigt<sup>3</sup>:

$$r_{i,k} \tau_{jk} = j t_{ij}. \quad (2.16)$$

<sup>3</sup> Eine Ableitung dieses Zusammenhanges findet sich bei Wolf (1997, Abschnitt 3.2.1).

Die Potentialgleichung lautet in der Lagrange-Formulierung:

$$\text{Potentialgleichung:} \quad j(\phi_{,ij}X_{i,k}X_{j,k} + \phi_{,i}X_{i,jj}) = -4\pi\gamma\rho^{(0)}. \quad (2.17)$$

Hier ist  $\phi$  das Schwerepotential und  $\gamma$  bezeichnet die *Newtonsche* Gravitationskonstante. Für die Schwere gilt in der Lagrange-Formulierung folgende Beziehung:

$$\text{Schweredefinition:} \quad g_i := \phi_{,j}X_{j,i}. \quad (2.18)$$

Um die Veränderung der Feldgrößen beim Übergang durch die Grenzflächen zu beschreiben, gelten entsprechende Grenzflächenbedingungen mit dem Definitionsbereich  $\cup_{l=1}^L \partial\mathcal{X}_l$ :

$$\text{Verschiebung:} \quad [r_i]_{-}^{+} = 0, \quad (2.19)$$

$$\text{Traktion:} \quad [n_j t_{ij}]_{-}^{+} = -q_i, \quad (2.20)$$

$$\text{Potential:} \quad [\phi]_{-}^{+} = 0, \quad (2.21)$$

$$\text{Schwere:} \quad [n_i \phi_{,j} X_{j,i}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.22)$$

wobei  $q_i$  den Grenzflächendruck und  $n_i$  die Einheitsnormale zur Grenzfläche bezeichnet, die parallel zu  $g_i$  gewählt ist.

### 2.2.2 Referenzfelder

Bei den Referenzfeldern wird vorausgesetzt, daß sich der Halbraum im Referenzzustand im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, was in der Erde näherungsweise erfüllt ist. Im Referenzzustand ist:  $r_i^{(0)} = X_i$ . Ferner gilt für die Ableitung der Position die Beziehung  $r_{i,j}^{(0)} = X_{i,j} = \delta_{ij}$ . Aus (2.13) folgt  $j^{(0)} = 1$ , und mit der Beziehung für die Ableitung der Position ergibt sich aus (2.16)  $\tau_{ij}^{(0)} = t_{ij}^{(0)}$ . Mit  $p := -\frac{1}{3}t_{ii}$  als Definition des mechanischen Drucks,  $e_{ij}^{(0)} = 0$  und der Abwesenheit deviatorischer Spannungen bei hydrostatischem Gleichgewicht folgt außerdem (Anhang A.1)

$$t_{ij}^{(0)} = -p^{(0)}\delta_{ij}. \quad (2.23)$$

Damit reduzieren sich (2.12), (2.13), (2.17) und (2.18) auf folgende Formen:

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad p_{,i}^{(0)} = \rho^{(0)}g_i^{(0)}, \quad (2.24)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \rho = \rho^{(0)}, \quad (2.25)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad \phi_{,ii}^{(0)} = -4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.26)$$

$$\text{Schweredefinition:} \quad g_i^{(0)} = \phi_{,i}^{(0)}. \quad (2.27)$$

Die zugehörigen Grenzflächenbedingungen ergeben sich aus (2.19)–(2.22) zu:

$$\text{Verschiebung:} \quad [r_i^{(0)}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.28)$$

$$\text{Druck:} \quad [p^{(0)}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.29)$$

$$\text{Potential:} \quad [\phi^{(0)}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{Schwere:} \quad [n_i^{(0)}\phi_{,i}^{(0)}]_{-}^{+} = 0. \quad (2.31)$$

Es ist zu beachten, daß im Referenzzustand Dichtediskontinuitäten zugelassen sind:  $[\rho^{(0)}]_{-}^{+} = \rho^{\pm}$ .

### 2.2.3 Inkrementielle Felder

Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben worden ist, werden die Feldgrößen nun in den Anteil des Referenzfeldes und den des materiellen Inkrements zerlegt. Für die Cauchy-Spannung  $t_{ij}$ , die Piola-Kirchhoff-Spannung  $\tau_{ij}$ , das Potential  $\phi$ , die Schwere  $g_i$ , den Druck  $p$  und die Jakobi-Determinante  $j$  wird diese Aufteilung nach (2.10) durchgeführt. Damit werden die Feldgleichungen in *materieller* Form abgeleitet. Bei der Ableitung wird der Zusammenhang von Cauchy- und Piola-Kirchhoff-Spannung sowie die Feldgleichungen der Referenzfelder berücksichtigt und vorausgesetzt, daß die Störungen infinitesimal sind. Es ergeben sich folgende Beziehungen (Anhang A.2):

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad t_{ij,j}^{(\delta)} + p_{,j}^{(0)} u_{j,i} - p_{,i}^{(0)} u_{j,j} + \rho^{(0)} g_i^{(\delta)} = 0, \quad (2.32)$$

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{ij}^{(\delta)} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.33)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad \phi_{,ii}^{(\delta)} - 2\phi_{,ij}^{(0)} u_{i,j} - \phi_{,i}^{(0)} u_{i,jj} = 4\pi\gamma\rho^{(0)} u_{i,i}, \quad (2.34)$$

$$\text{Schweredefinition:} \quad g_i^{(\delta)} = \phi_{,i}^{(\delta)} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,i}. \quad (2.35)$$

Entsprechend ergeben sich die Grenzflächenbedingungen in *materieller* Form (Anhang A.2):

$$\text{Verschiebung:} \quad [u_i]_-^+ = 0, \quad (2.36)$$

$$\text{Traktion:} \quad [n_j^{(0)} t_{ij}^{(\delta)}]_-^+ = -q_i, \quad (2.37)$$

$$\text{Potential:} \quad [\phi^{(\delta)}]_-^+ = 0, \quad (2.38)$$

$$\text{Schwere:} \quad [n_i^{(0)} (\phi_{,i}^{(\delta)} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,i})]_-^+ = 0. \quad (2.39)$$

Die in (2.11) eingeführte Aufspaltung des materiellen Inkrements in ein lokales und ein advektives Inkrement soll nun auf die Feldgrößen angewendet werden. Eine Ausnahme ist die Cauchy-Spannung  $t_{ij}$  für die weiterhin das materielle Inkrement  $t_{ij}^{(\delta)}$  benutzt wird. Damit ergibt sich für die inkrementiellen Feldgleichungen die *materiell-lokale* Form (Anhang A.3):

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad t_{ij,j}^{(\delta)} + (p_{,j}^{(0)} u_j)_{,i} - g_i^{(0)} (\rho^{(0)} u_j)_{,j} + \rho^{(0)} g_i^{(\Delta)} = 0, \quad (2.40)$$

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{ij}^{(\delta)} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.41)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad \phi_{,ii}^{(\Delta)} = 4\pi\gamma (\rho^{(0)} u_i)_{,i}, \quad (2.42)$$

$$\text{Schweredefinition:} \quad g_i^{(\Delta)} = \phi_{,i}^{(\Delta)}. \quad (2.43)$$

Ebenso werden die Grenzflächenbedingungen durch die genannte Aufspaltung in die *materiell-lokale* Form überführt:

$$\text{Verschiebung:} \quad [u_i]_-^+ = 0, \quad (2.44)$$

$$\text{Traktion:} \quad [n_j^{(0)} t_{ij}^{(\delta)}]_-^+ = -q_i, \quad (2.45)$$

$$\text{Potential:} \quad [\phi^{(\Delta)}]_-^+ = 0, \quad (2.46)$$

$$\text{Schwere:} \quad [n_i^{(0)} (\phi_{,i}^{(\Delta)} - 4\pi\gamma\rho^{(0)} u_i)]_-^+ = 0. \quad (2.47)$$

### 2.2.4 Vereinfachende Annahmen

Im einzelnen werden zusätzlich folgende Annahmen gemacht:

- Der Referenzzustand ist inkompressibel (Homogenität von  $\rho^{(0)}$ ):  $\rho_{,i}^{(0)} = 0$ .
- Der Referenzwert der Schwere ist konstant:  $g_i^{(0)} = \text{const.}$
- Das lokale Inkrement der Schwere wird in der Bewegungsgleichung vernachlässigt:  $g_i^{(\Delta)} = 0$ .
- Die Kompressibilität wird in der Bewegungs- und in der Potentialgleichung vernachlässigt:  $u_{i,i} = 0$ .

Damit lassen sich (2.40)–(2.43) in folgende Gleichungen überführen (Anhang A.4):

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad t_{ij,j}^{(\delta)} = -\rho^{(0)} g_j^{(0)} u_{j,i}, \quad (2.48)$$

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{ij}^{(\delta)} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.49)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad \phi_{,ii}^{(\Delta)} = 0, \quad (2.50)$$

$$\text{Schweredefinition:} \quad g_i^{(\Delta)} = \phi_{,i}^{(\Delta)}. \quad (2.51)$$

Die Bewegungsgleichung (2.48), die Materialgleichung (2.49) und die Potentialgleichung (2.50) bilden ein Differentialgleichungssystem (DGL-System), das im folgenden gelöst wird. Es gelten weiterhin die Grenzflächenbedingungen (2.44)–(2.47), die zur Lösung des DGL-Systems herangezogen werden.

## 2.3 Lösung der inkrementiellen Feldgleichungen

Um das partielle DGL-System (2.48)–(2.50) zu lösen, werden die Gleichungen zuerst in Zylinderkoordinaten überführt. Durch Hankel-Transformation gelingt es, aus den skalaren Gleichungen ein System gewöhnlicher DGLs erster Ordnung abzuleiten. Mit Hilfe von Propagatoren läßt sich hieraus eine Übertragungsfunktion für den beschriebenen Halbraum gewinnen. Wenn nun die Auflastdruckverteilung durch Hankel-Transformation in ein Lastspektrum überführt wird, ist durch Multiplikation mit der Übertragungsfunktion die Lösung im Spektralbereich (Wellenzahlbereich) gegeben. Mit Hilfe der inversen Hankel-Transformation läßt sich schließlich die Lösung im Raumbereich bestimmen.

### 2.3.1 Zylinderkoordinaten

Die bisher verwendeten kartesischen Koordinaten, die in der Indexnotation mit  $X_i$  bzw.  $r_i$  bezeichnet werden, sollen nun in die Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  überführt werden. Dazu dient die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} X_1 &= r \cos \varphi, \\ X_2 &= r \sin \varphi, \\ X_3 &= z. \end{aligned} \quad (2.52)$$

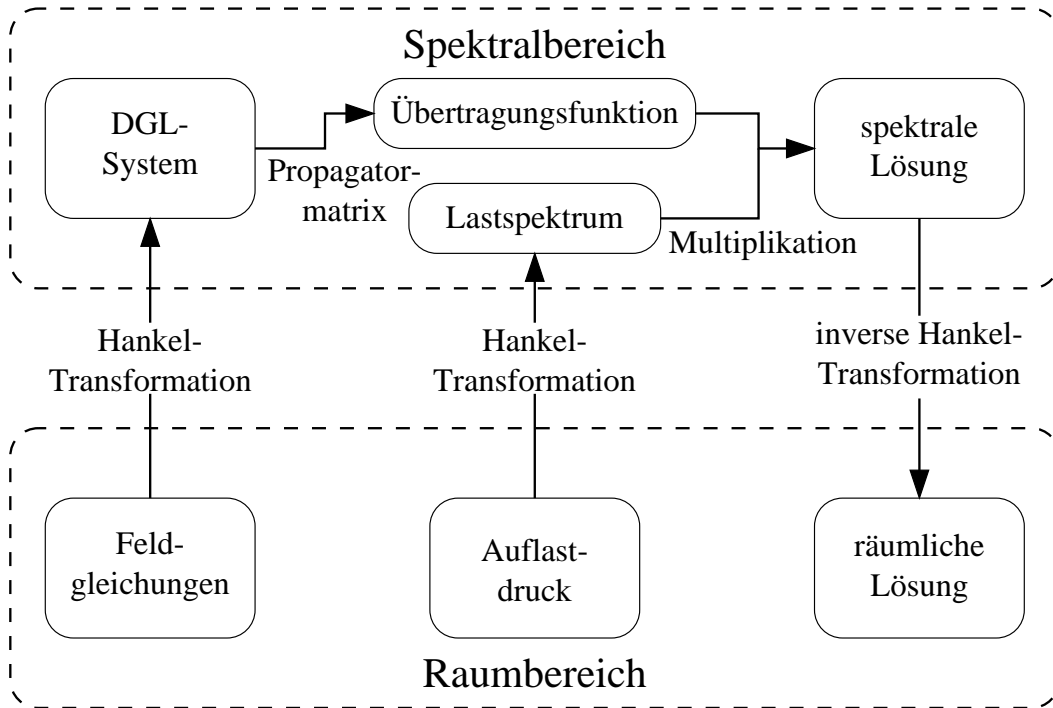


Abbildung 2.2: Lösungsweg der Hankel-Transformations-Methode.

Hier bezeichnet  $r$  den axialen Abstand,  $\varphi$  den Azimut und  $z$  die Tiefe. Mit der Einführung des Zylinderkoordinatensystems werden die Grenzflächen  $\partial\mathcal{X}_l$  durch die Angabe ihrer Tiefe  $z_l$  gekennzeichnet (Abb. 2.3). Mit der Annahme einer axialsymmetrischen Auflastdruckverteilung verschwinden die partiellen Ableitung in  $\varphi$ -Richtung und die Verschiebung  $u_\varphi$ <sup>4</sup>. Hieraus folgt, daß die Spannungskomponenten  $t_{z\varphi}$  und  $t_{\varphi z}$  verschwinden. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden im folgenden Text die Hochindizes für die materiellen und lokalen Inkremente weglassen. Weiterhin wird für die Dichte  $\rho^{(0)}$  im Referenzzustand nun das Symbol  $\rho$  verwendet. Da nur die  $z$ -Komponente der Schwere und des Auflastdrucks ungleich Null ist, soll diese Komponente vereinfacht mit  $g$  bzw. mit  $q$  bezeichnet werden. Für die skalaren Formen der Bewegungs-, Material- und Potentialgleichung ergibt sich (Anhang A.5)

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad t_{rr,r} + t_{rz,z} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\varphi\varphi}) + \rho g u_{z,r} = 0, \quad (2.53)$$

$$t_{rz,r} + t_{zz,z} + \frac{1}{r} (t_{rz}) + \rho g u_{z,z} = 0. \quad (2.54)$$

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{rr} = \lambda \left( \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + u_{z,z} \right) + 2\mu u_{r,r}, \quad (2.55)$$

$$t_{zz} = \lambda \left( \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + u_{z,z} \right) + 2\mu u_{z,z}, \quad (2.56)$$

$$t_{\varphi\varphi} = \lambda \left( \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + u_{z,z} \right) + \frac{2\mu}{r} u_r, \quad (2.57)$$

<sup>4</sup> Im folgenden werden mit den Indizes  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  die Komponenten der jeweiligen Größe in Zylinderkoordinaten gekennzeichnet.

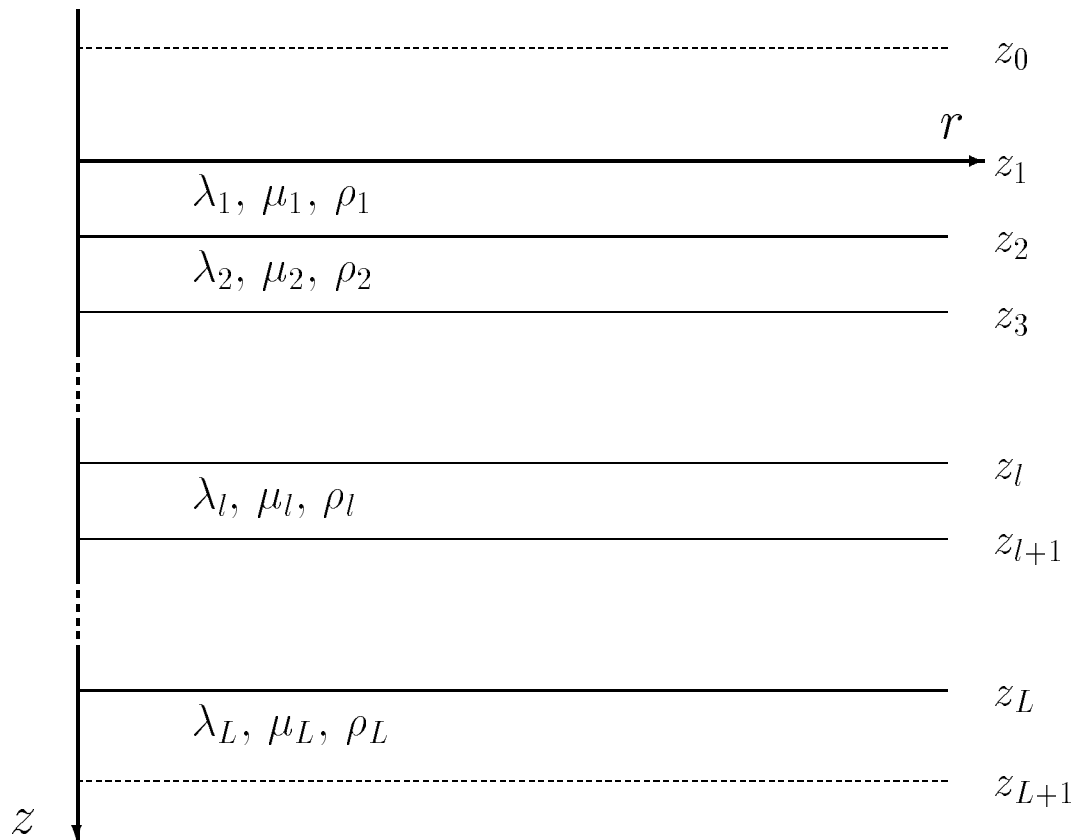


Abbildung 2.3: Ebenes, geschichtetes Erdmodell, in dem  $z_l$  die Tiefe der jeweiligen Grenzfläche,  $\lambda_l, \mu_l$  die Lamé-Konstanten und  $\rho_l$  die Dichte der jeweiligen Schicht bezeichnet.

$$t_{rz} = \mu (u_{r,z} - u_{z,r}). \quad (2.58)$$

**Potentialgleichung:** 
$$\frac{1}{r} (r\phi_{,r})_{,r} + \phi_{,zz} = 0. \quad (2.59)$$

Für die skalaren Gleichungen gelten die Definitionsbereiche  $r \in [0, \infty[$  und  $z \in ]z_l, z_{l+1}[$ . Zusätzlich erfüllt sein muß  $z_1 \leq z_l < z_{l+1}$ , wobei allerdings für die Potentialgleichung  $z_l < z_{l+1}$  gilt. Nach Einsetzen von (2.55) und (2.58) in (2.53) ergibt sich mit der Voraussetzung, daß  $\lambda$  und  $\mu$  konstant sind, folgender Zusammenhang:

$$\lambda \left( -\frac{1}{r^2} u_r + \frac{1}{r} u_{r,r} + u_{z,rz} \right) + 2\mu u_{r,rr} + t_{rz,z} + \frac{2\mu}{r} \left( u_{r,r} - \frac{1}{r} u_r \right) + \rho g u_{z,r} = 0. \quad (2.60)$$

Somit besteht das DGL-System aus den Gleichungen (2.54), (2.56), (2.57), (2.59) und (2.60).

Für die Grenzflächenbedingungen ergibt sich in Zylinderkoordinaten

$$[u_r]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.61)$$

$$[u_z]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.62)$$

$$[t_{rz}]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.63)$$

$$[t_{zz}]_{\pm}^{\pm} = -q, \quad (2.64)$$



$$[\phi]_-^+ = 0, \quad (2.65)$$

$$[\phi_{,z} - 4\pi\gamma\rho u_z]_-^+ = 0. \quad (2.66)$$

Die Grenzflächenbedingungen gelten nur für die Grenzflächen  $z_l$ , wobei diese mit Ausnahme der Grenzflächenbedingungen für das Potentials nur für  $z_1 \leq z_l$  gelten.

### 2.3.2 Hankel-Transformation

Das DGL-System ist abhängig von den Variablen  $r$  und  $z$ . Um dieses partielle DGL-System in ein gewöhnliches System erster Ordnung mit  $z$  als einziger Variablen zu überführen, wird die Hankel-Transformation bezüglich  $r$  angewendet. Diese Transformation und die zugehörige inverse Hankel-Transformation sind wie folgt definiert (Sneddon, 1995):

$$F^{[\nu]}(k, z) := \mathcal{H}_\nu[f(r, z)] := \int_0^\infty r f(r, z) J_\nu(kr) dr, \quad (2.67)$$

$$f(r, z) = \mathcal{H}_\nu^{-1}[F^{[\nu]}(k, z)] = \int_0^\infty k F^{[\nu]}(k, z) J_\nu(kr) dk. \quad (2.68)$$

Hier ist  $k$  die Hankel-Wellenzahl und  $J_\nu$  die Besselfunktion  $\nu$ -ter Ordnung. Die Hankel-Transformation wird im folgenden auf die Gleichungen des DGL-Systems angewendet. Wie in der Definition werden die transformierten Größen zur Unterscheidung in Großbuchstaben geschrieben.

Aus (2.58) folgt nach Hankel-Transformation (Anhang A.6)

$$U_{r,z}^{[1]}(k, z) = \frac{1}{\mu} T_{rz}^{[1]}(k, z) + k U_z^{[0]}(k, z). \quad (2.69)$$

Die Transformation von (2.56) führt auf den Zusammenhang

$$U_{z,z}^{[0]}(k, z) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) - \frac{k}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z), \quad (2.70)$$

während aus (2.60) die Beziehung

$$T_{rz,z}^{[1]}(k, z) = \frac{4\mu(\lambda + \mu)k^2}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z) + \frac{\lambda k}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) + \rho g k U_z^{[0]}(k, z) \quad (2.71)$$

abgeleitet werden kann. Die Hankel-Transformation von (2.54) liefert folgenden Ausdruck:

$$T_{zz,z}^{[0]}(k, z) = -k T_{rz}^{[1]}(k, z) - \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) + \frac{\lambda \rho g k}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z). \quad (2.72)$$

Die Transformation von (2.59) führt zu der Beziehung

$$\Phi_{,zz}^{[0]}(k, z) = k^2 \Phi^{[0]}(k, z). \quad (2.73)$$

Es ist zu beachten, daß (2.73) die einzige DGL zweiter Ordnung ist. Deshalb werden aus dieser Gleichung die beiden folgenden DGLs erster Ordnung abgeleitet:

$$G^{[0]}(k, z) = \Phi_{,z}^{[0]}(k, z), \quad (2.74)$$

$$G_{,z}^{[0]}(k, z) = k^2 \Phi^{[0]}(k, z), \quad (2.75)$$

wobei  $G^{[0]}$  die Hankel-transformierte Schwere bezeichnet. Somit ist ein DGL-System erster Ordnung in der Variablen  $z$  aufgestellt. Vereinfacht läßt sich dieses in der Form

$$Y_{i,z}(k, z) = A_{ij}Y_j(k, z) \quad (2.76)$$

zusammenfassen. Hierbei bezeichnet  $Y_i$  den Vektor der Hankel-transformierten Größen und  $A_{ij}$  die Koeffizientenmatrix, die sich aus den Gleichungen des Systems ergibt:

$$Y_i(k, z) := \begin{pmatrix} U_r^{[1]}(k, z) \\ U_z^{[0]}(k, z) \\ T_{rz}^{[1]}(k, z) \\ T_{zz}^{[0]}(k, z) \\ \Phi^{[0]}(k, z) \\ G^{[0]}(k, z) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

$$A_{ij} := \frac{1}{\lambda + 2\mu} \begin{pmatrix} 0 & (\lambda + 2\mu)k & \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4\mu(\lambda + 2\mu)k^2 & \rho(\lambda + 2\mu)gk & 0 & \lambda k & 0 & 0 \\ \rho\lambda gk & 0 & -(\lambda + 2\mu)k & -\rho g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)k^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Die Grenzflächenbedingungen in der Hankel-transformierten Form ergeben sich aus (2.61)–(2.66) und lauten

$$[U_r^{[1]}(k, z)]_-^+ = 0, \quad (2.79)$$

$$[U_z^{[0]}(k, z)]_-^+ = 0, \quad (2.80)$$

$$[T_{rz}^{[1]}(k, z)]_-^+ = 0, \quad (2.81)$$

$$[T_{zz}^{[0]}(k, z)]_-^+ = -Q^{[0]}(k, z), \quad (2.82)$$

$$[\Phi^{[0]}(k, z)]_-^+ = 0, \quad (2.83)$$

$$[\Phi_{,z}^{[0]}(k, z) - 4\pi\gamma\rho U_z^{[0]}(k, z)]_-^+ = 0. \quad (2.84)$$

### 2.3.3 Propagatoren

Der gewählte Lösungsweg erfordert, daß die Lösung an der unteren Grenzfläche  $z_L$  (Abb. 2.3) bestimmt ist und von dort an die Oberfläche  $z_1$  fortgepflanzt wird. Hierzu dienen *Grenzflächenpropagatoren*, die die Lösung durch beliebige Grenzflächen fortsetzen, sowie *Schichtpropagatoren*, die die Lösung durch beliebige homogene Schichten fortsetzen. Zuerst soll der Grenzflächenpropagator aus den Grenzflächenbedingungen (2.79)–(2.84) abgeleitet werden.

### Grenzflächenpropagator

Der Grenzflächenpropagator soll die Lösung unterhalb einer Grenzfläche  $z_l$  auf die Oberseite derselben fortpflanzen (Abb. 2.3). Wenn angenommen wird, daß nur auf der Oberfläche  $z_1$  eine Auflastdruckverteilung vorliegt, ist sonst  $Q^{[0]}(k, z) = 0$ , und (2.82) vereinfacht sich zu  $[T_{zz}^{[0]}(k, z)]_-^+ = 0$ . Im folgenden wird der Hankel-transformierte Auflastdruck auf der Oberfläche  $z_1$  mit  $Q$  bezeichnet und zur Vereinfachung der Hochindex [0] bzw. [1] der Hankel-transformierten Größen sowie das Argument  $k$  unterdrückt. Für interne Grenzflächen läßt sich aus den Grenzflächenbedingungen (2.79)–(2.84) die Beziehung

$$Y_i^-(z_l) = N_{ij}(z_l)Y_j^+(z_l) \quad (2.85)$$

ableiten, wobei der Grenzflächenpropagator  $N_{ij}(z_l)$  für  $z_l > z_1$  durch

$$N_{ij}(z_l) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4\pi\gamma\Delta\rho_l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

gegeben ist und  $\Delta\rho_l$  den Dichtesprung

$$\Delta\rho_l := \rho_l - \rho_{l-1} \quad (2.87)$$

bezeichnet. Der Hochindex  $-$  bzw.  $+$  kennzeichnet den Wert des Vektors an der Ober- bzw. Unterseite der jeweiligen Grenzfläche.

Da auf der Oberfläche  $z_1$  eine Auflastdruckverteilung zugelassen wird, gilt hier

$$\begin{aligned} [T_{zz}(z_1)]_-^+ &= -Q, \\ T_{zz}^-(z_1) &= T_{zz}^+(z_1) + Q. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Der Übergang durch die Oberfläche  $z_1$  läßt sich allerdings für alle Feldgrößen erst nach der Betrachtung des Schichtpropagators und dessen Definitionsbereichs durch (2.141) angeben.

### Schichtpropagator

Der im folgenden abzuleitende Schichtpropagator soll die Lösung des DGL-Systems (2.76) innerhalb einer Schicht fortpflanzen. Für den Schichtpropagator  $D_{ij}(z_{l+1}, z_l)$  soll die Beziehung

$$Y_i^+(z_l) = D_{ij}(z_{l+1}, z_l)Y_j^-(z_{l+1}), \quad (2.89)$$

gelten, d. h. die Lösung wird von der Tiefe  $z_{l+1}$  nach  $z_l$  fortgepflanzt.

Die Bestimmung des Propagators für ein beliebiges lineares DGL-System erster Ordnung behandeln Gantmacher (1958) und Gilbert & Backus (1966). Für den hier beschriebenen kompressiblen, elastischen Halbraum wird für die mechanischen Feldgröße ein derartiger Propagator

von Wolf (o.J.) abgeleitet. Zur Konstruktion eines Propagators werden die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix  $A_{ij}$  des Systems benötigt.

Die Blockstruktur von  $A_{ij}$  erlaubt, die Matrix in zwei Untermatrizen  $A_{ij}^{(1)}$  und  $A_{ij}^{(2)}$  aufzuspalten. Werden die vier DGLs der mechanischen Feldgrößen ( $U_r, U_z, T_{rz}, T_{zz}$ ) als mechanisches System und die beiden DGLs der gravitativen Feldgrößen ( $\Phi, G$ ) als gravitatives System bezeichnet, läßt sich die Blockstruktur von  $A_{ij}$  dadurch erklären, daß das mechanische und das gravitative System entkoppelt sind. Durch diese Aufspaltung lassen sich die Eigenwerte der Matrizen getrennt bestimmen und ebenso zwei Propagatoren, die sich anschließend zu einem kombinierten Propagator zusammensetzen lassen. Auf die Aufspaltung der Matrix  $A_{ij}$  in  $A_{ij}^{(1)}$  und  $A_{ij}^{(2)}$  sowie die Eigenwertbestimmung der beiden Matrizen wird in Anhang A.7 eingegangen. Für

$$A_{ij}^{(1)} := \frac{1}{\lambda + 2\mu} \begin{pmatrix} 0 & (\lambda + 2\mu)k & \frac{\lambda+2\mu}{\mu} & 0 \\ -\lambda k & 0 & 0 & 1 \\ 4\mu(\lambda + \mu)k^2 & \rho(\lambda + 2\mu)gk & 0 & \lambda k \\ \rho\lambda gk & 0 & -(\lambda + 2\mu)k & -\rho g \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

lassen sich folgende Eigenwerte finden:

$$\begin{aligned} a_1 &= k, \\ a_2 &= -k, \\ a_3 &= k \left( \sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha \right), \\ a_4 &= -k \left( \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha \right), \end{aligned} \quad (2.91)$$

wobei  $\alpha$  durch

$$\alpha := \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)k} \quad (2.92)$$

gegeben ist. Für

$$A_{ij}^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

ergeben sich die Eigenwerte

$$\begin{aligned} a_5 &= k, \\ a_6 &= -k. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Sind die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix eines linearen DGL-Systems erster Ordnung bekannt und voneinander verschieden, so kann der Propagator durch (Gantmacher, 1958, S. 108)

$$D_{ij}(z_{l+1}, z_l) = \sum_{n=1}^N \frac{(A_{ij} - a_1 \delta_{ij}) \dots (A_{ij} - a_{n-1} \delta_{ij}) (A_{ij} - a_{n+1} \delta_{ij}) \dots (A_{ij} - a_N \delta_{ij})}{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) (a_n - a_{n+1}) \dots (a_n - a_N)} \exp[-a_n(z_{l+1} - z_l)] \quad (2.95)$$

angegeben werden. Hier ist  $a_n$  der  $n$ -te Eigenwert von  $A_{ij}$ . Für die Komponenten des mechanischen Schichtpropagators  $D_{ij}^{(1)}$  läßt sich folgender Ausdruck finden (Anhang A.8):

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{(1)}(z_{l+1}, z_l) &= \frac{1}{4\alpha k^3} [A_{ij}^{(1)3} + (1 + 2\alpha)kA_{ij}^{(1)2} - (1 - 2\alpha)k^2A_{ij}^{(1)} - \delta_{ij}k^3] \exp[-k(z_{l+1} - z_l)] \\
&+ \frac{1}{4\alpha k^3} [A_{ij}^{(1)3} - (1 - 2\alpha)kA_{ij}^{(1)2} - (1 + 2\alpha)k^2A_{ij}^{(1)} - \delta_{ij}k^3] \exp[k(z_{l+1} - z_l)] \\
&- \frac{1}{4\alpha k^2(k - \alpha a_3)} [A_{ij}^{(1)3} - a_4A_{ij}^{(1)2} - k^2A_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}k^2a_4] \exp[-a_3(z_{l+1} - z_l)] \\
&- \frac{1}{4\alpha k^2(k - \alpha a_4)} [A_{ij}^{(1)3} - a_3A_{ij}^{(1)2} - k^2A_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}k^2a_3] \exp[-a_4(z_{l+1} - z_l)].
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Hier bezeichnet  $A_{ij}^{(1)2}$  und  $A_{ij}^{(1)3}$  das Ergebnis der zweifachen bzw. dreifachen Matrixmultiplikation von  $A_{ij}^{(1)}$  mit sich selbst. Der gravitative Schichtpropagator  $D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l)$  ergibt sich mit (2.95) und den Eigenwerten von  $A_{ij}^{(2)}$  zu

$$D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp[-k(z_{l+1} - z_l)] + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} \exp[k(z_{l+1} - z_l)]. \tag{2.97}$$

Mit dem mechanischen Schichtpropagator (2.96) und dem gravitativen Schichtpropagator (2.97) läßt sich  $D_{ij}(z_{l+1}, z_l)$  angeben:

$$D_{ij}(z_{l+1}, z_l) = \begin{pmatrix} D_{ij}^{(1)}(z_{l+1}, z_l) & 0 \\ 0 & D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) \end{pmatrix}, \tag{2.98}$$

wobei durch die Nullen angedeutet ist, daß die übrigen Elemente der  $(6 \times 6)$ -Matrix  $D_{ij}(z_{l+1}, z_l)$  verschwinden.

### 2.3.4 Lösung des DGL-Systems im Spektralbereich

Mit den Propagatoren aus Abschnitt 2.3.3 ist es möglich, eine Lösung des DGL-Systems von der unteren Grenzfläche  $z_L$  an die Oberfläche  $z_1$  fortzusetzen. Dazu wird der Lösungsvektor  $Y_i^+(z_L)$  an der unteren Grenzfläche benötigt. Um diesen zu bestimmen, wird neben den Grenzflächenbedingungen zusätzlich gefordert, daß die Feldgrößen für ihren jeweiligen Definitionsbereich regulär sind, d. h. endliche Werte annehmen. Mit Hilfe der Grenzflächenbedingungen und der Regularitätsbedingung läßt sich der Lösungsvektor  $Y_i^+(z_l)$  bestimmen. Für das weitere Vorgehen wird  $Y_i^+$  entsprechend der Aufspaltung des Schichtpropagators in einen mechanischen Anteil,  $Y_i^{(1)}$ , und einen gravitativen Anteil,  $Y_i^{(2)}$ , aufgespalten:

$$Y_i^{(1)}(z) := \begin{pmatrix} U_r(z) \\ U_z(z) \\ T_{rz}(z) \\ T_{zz}(z) \end{pmatrix}, \tag{2.99}$$

$$Y_i^{(2)}(z) := \begin{pmatrix} \Phi(z) \\ G(z) \end{pmatrix}. \tag{2.100}$$

Zuerst wird der mechanische Lösungsvektor  $Y_i^{(1)}(z)$  bestimmt. Hierzu wird die zusätzliche Grenzfläche  $z_{L+1}$  eingeführt (Abb. 2.3) und der Grenzwertübergang  $z_{L+1} \rightarrow \infty$  betrachtet. Damit die Lösungen im Halbraum unter der Grenzfläche  $z_L$  endlich bleiben, muß gelten:  $\lim_{z_{L+1} \rightarrow \infty} Y_i^{(1)+}(z_{L+1}) = 0$ . Für die weitere Betrachtung wird der mechanische Schichtpropagator  $D_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1})$  folgendermaßen zerlegt:

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1}) &:= \frac{1}{4\alpha k^3} \underbrace{[A_{ij}^{(1)3} + (1 + 2\alpha)k A_{ij}^{(1)2} - (1 - 2\alpha)k^2 A_{ij}^{(1)} - \delta_{ij}k^3]}_{B_{ij}} \\ &\quad \exp[-k(z_L - z_{L+1})] \\ &\quad - \frac{1}{4\alpha k^2 (k - \alpha a_3)} \underbrace{[A_{ij}^{(1)3} - a_4 A_{ij}^{(1)2} - k^2 A_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}k^2 a_4]}_{C_{ij}} \\ &\quad \exp[-a_3(z_L - z_{L+1})], \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1}) &:= \frac{1}{4\alpha k^3} [A_{ij}^{(1)3} - (1 - 2\alpha)k A_{ij}^{(1)2} - (1 + 2\alpha)k^2 A_{ij}^{(1)} - \delta_{ij}k^3] \\ &\quad \exp[k(z_L - z_{L+1})] \\ &\quad - \frac{1}{4\alpha k^2 (k - \alpha a_4)} [A_{ij}^{(1)3} - a_3 A_{ij}^{(1)2} - k^2 A_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}k^2 a_3] \\ &\quad \exp[-a_4(z_L - z_{L+1})] \end{aligned} \quad (2.102)$$

Für den mechanischen Schichtpropagator<sup>5</sup> folgt

$$D_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1}) = H_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1}) + K_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1}). \quad (2.103)$$

Für  $z_{L+1} \rightarrow \infty$  verschwindet  $K_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1})$  wegen der negativen Exponenten<sup>6</sup>. Damit der Lösungsvektor  $Y_i^{(1)-}(z_{L+1})$  verschwindet, müssen die Beziehungen

$$B_{ij} Y_j^{(1)+}(z_L) = 0, \quad (2.104)$$

$$C_{ij} Y_j^{(1)+}(z_L) = 0 \quad (2.105)$$

erfüllt sein. Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich  $U_r^+(z_L)$  und  $U_z^+(z_L)$  durch  $T_{rz}^+(z_L)$  und  $T_{zz}^+(z_L)$  ausdrücken:

$$U_r^+(z_L) = \frac{(B_{12}C_{13} - B_{13}C_{12}) T_{rz}^+(z_L) + (B_{12}C_{14} - B_{14}C_{12}) T_{zz}^+(z_L)}{B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}}, \quad (2.106)$$

$$U_z^+(z_L) = \frac{(B_{13}C_{11} - B_{11}C_{13}) T_{rz}^+(z_L) + (B_{14}C_{11} - B_{11}C_{14}) T_{zz}^+(z_L)}{B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}}. \quad (2.107)$$

Zur besseren Übersicht werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$S_1 := \frac{B_{12}C_{13} - B_{13}C_{12}}{B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}}, \quad (2.108)$$

<sup>5</sup> Hier wird  $D_{ij}^{(1)}(z_L, z_{L+1})$  benutzt, da  $Y_i^{(1)+}(z_L)$  von  $z_L$  nach  $z_{L+1}$  fortgesetzt wird. Damit ergeben sich auch die im Vergleich zu (2.96) veränderten Exponenten.

<sup>6</sup> Der Eigenwert  $a_4$  ist negativ.

$$S_2 := \frac{B_{12}C_{14} - B_{14}C_{12}}{B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}}, \quad (2.109)$$

$$Z_1 := \frac{B_{13}C_{11} - B_{11}C_{13}}{B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}}, \quad (2.110)$$

$$Z_2 := \frac{B_{14}C_{11} - B_{11}C_{14}}{B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}}. \quad (2.111)$$

Damit ergeben sich für (2.106) und (2.107) die vereinfachten Beziehungen

$$U_r^+(z_L) = S_1 T_{rz}^+(z_L) + S_2 T_{zz}^+(z_L), \quad (2.112)$$

$$U_z^+(z_L) = Z_1 T_{rz}^+(z_L) + Z_2 T_{zz}^+(z_L). \quad (2.113)$$

Nun läßt sich der Lösungsvektor  $Y_i^{(1)+}(z_L)$  in einer Form schreiben, die nur von den Spannungskomponenten  $T_{rz}^+(z_L)$  und  $T_{zz}^+(z_L)$  abhängig ist:

$$Y_i^{(1)+}(z_L) = \begin{pmatrix} S_1 T_{rz}^+(z_L) + S_2 T_{zz}^+(z_L) \\ Z_1 T_{rz}^+(z_L) + Z_2 T_{zz}^+(z_L) \\ T_{rz}^+(z_L) \\ T_{zz}^+(z_L) \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

Um eine Lösung an der unteren Grenzfläche zu bestimmen, werden die Grenzflächenbedingungen (2.81) und (2.82) für die beiden Spannungskomponenten an der Oberfläche  $z_1$  verwendet:

$$[T_{rz}(z_1)]_+^+ = 0, \quad (2.115)$$

$$T_{zz}^+(z_1) = -Q + T_{zz}^-(z_1). \quad (2.116)$$

Dazu muß jedoch der Lösungsvektor (2.114) an die Oberfläche fortgesetzt werden. Da hier nur die vier mechanischen Feldgrößen betrachtet werden, sind die Größen an den Grenzflächen stetig, d. h. es ist kein Grenzflächenpropagator  $N_{ij}(z_l)$  notwendig. Dies ist auch daran zu erkennen, daß die entsprechende  $(4 \times 4)$ -Untermatrix in (2.86) die Einheitsmatrix ist. Mit der Definition

$$D_{ij}^{(1)\Pi}(z_L) := \prod_{l=1}^{L-1} D_{ij}^{(1)}(z_{l+1}, z_l) \quad (2.117)$$

folgt dann der Ausdruck für die Feldfortsetzung an die Oberfläche:

$$Y_i^{(1)+}(z_1) = D_{ij}^{(1)\Pi}(z_L) Y_j^{(1)+}(z_L). \quad (2.118)$$

Für die Lösung  $Y_i^{(1)+}(z_1)$  gelten die Grenzflächenbedingungen (2.115) und (2.116) für die Spannungskomponenten an der Oberfläche. Mit den Definitionen

$$M_{11} := S_1 D_{31}^{(1)\Pi}(z_L) + Z_1 D_{32}^{(1)\Pi}(z_L) + D_{33}^{(1)\Pi}(z_L), \quad (2.119)$$

$$M_{12} := S_2 D_{31}^{(1)\Pi}(z_L) + Z_2 D_{32}^{(1)\Pi}(z_L) + D_{34}^{(1)\Pi}(z_L), \quad (2.120)$$

$$M_{21} := S_1 D_{41}^{(1)\Pi}(z_L) + Z_1 D_{42}^{(1)\Pi}(z_L) + D_{43}^{(1)\Pi}(z_L) \\ + \rho g \left( S_1 D_{21}^{(1)\Pi}(z_L) + Z_1 D_{22}^{(1)\Pi}(z_L) + D_{23}^{(1)\Pi}(z_L) \right), \quad (2.121)$$

$$M_{22} := S_2 D_{41}^{(1)\Pi}(z_L) + Z_2 D_{42}^{(1)\Pi}(z_L) + D_{44}^{(1)\Pi}(z_L) \\ + \rho g \left( S_2 D_{21}^{(1)\Pi}(z_L) + Z_2 D_{22}^{(1)\Pi}(z_L) + D_{24}^{(1)\Pi}(z_L) \right) \quad (2.122)$$

ergibt sich aus den Grenzflächenbedingungen und (2.118) dann

$$M_{11} T_{rz}^+(z_L) + M_{12} T_{zz}^+(z_L) = 0, \quad (2.123)$$

$$M_{21} T_{rz}^+(z_L) + M_{22} T_{zz}^+(z_L) = -Q. \quad (2.124)$$

Diese Grenzflächenbedingungen lassen sich vereinfacht wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{rz}^+(z_L) \\ T_{zz}^+(z_L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

Mit der *Cramerschen* Regel (Bronstein & Semendjajew, 1997, S. 259) lassen sich die beiden Spannungskomponenten an der Grenzfläche  $z_L$  als Funktion des Hankel-transformierten Auflastdrucks  $Q$  bestimmen:

$$T_{rz}^+(z_L) = \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} Q, \quad (2.126)$$

$$T_{zz}^+(z_L) = -\frac{M_{11}}{\det M_{ij}} Q. \quad (2.127)$$

Mit diesen Ausdrücken kann nun der Lösungsvektor (2.99) der mechanischen Feldgrößen als Funktion von  $Q$  dargestellt werden:

$$Y_i^{(1)+}(z_L) = \begin{pmatrix} S_1 \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} + S_2 \frac{-M_{11}}{\det M_{ij}} \\ Z_1 \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} + Z_2 \frac{-M_{11}}{\det M_{ij}} \\ \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} \\ \frac{-M_{11}}{\det M_{ij}} \end{pmatrix} Q. \quad (2.128)$$

Bei der Bestimmung des gravitativen Lösungsvektors  $Y_i^{(2)+}(z_L)$  wird zuerst der entsprechende Schichtpropagator zerlegt. Mit den Definitionen

$$H_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp[-k(z_{l+1} - z_l)], \quad (2.129)$$

$$K_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} \exp[k(z_{l+1} - z_l)] \quad (2.130)$$

folgt für den gravitativen Schichtpropagator

$$D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) = H_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) + K_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l). \quad (2.131)$$

Für die gravitativen Feldgrößen erstreckt sich der Definitionsbereich über den gesamten Raum, so daß nicht nur die Grenzwerte für  $z_{L+1} \rightarrow \infty$  betrachtet werden müssen, sondern auch die zusätzliche Grenzfläche  $z_0$  eingeführt wird (Abb. 2.3) und der Grenzübergang  $z_0 \rightarrow -\infty$  betrachtet wird. Für beide Grenzwertprozesse müssen die Feldgrößen endlich bleiben. Hieraus folgt, daß der gravitative Schichtpropagator (2.97) nur im Bereich von  $z \in [z_1, z_L]$  gilt. Für  $z_0 \rightarrow -\infty$  verschwindet  $H_{ij}^{(2)}(z_1, z_0)$ , jedoch folgt  $K_{ij}^{(2)}(z_1, z_0) \rightarrow \pm\infty$ , so daß für  $z < z_1$  nur  $H_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l)$



den gravitativen Schichtpropagator darstellt. Wird der Grenzübergang  $z_{L+1} \rightarrow \infty$  betrachtet, verschwindet  $K_{ij}^{(2)}(z_L, z_{L+1})$ <sup>7</sup>. Jedoch gilt  $H_{ij}^{(2)}(z_L, z_{L+1}) \rightarrow \infty$ , und somit läßt sich definieren

$$D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) := \begin{cases} H_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) & : z_{l+1}, z_l \in ]-\infty, z_1] \\ H_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) + K_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) & : z_{l+1}, z_l \in [z_1, z_L] \\ K_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) & : z_{l+1}, z_l \in [z_L, \infty[ \end{cases} . \quad (2.132)$$

Um  $Y_i^{(2)+}(z_L)$  zu bestimmen, wird verlangt, daß bei Abwesenheit von Auflasten und Vertikalverschiebungen  $Y_i^{(2)-}(z_1) = 0$  erfüllt ist. In diesem Fall sind Potential und Schwere stetig, und es gilt

$$Y_i^{(2)+}(z_L) = Y_i^{(2)-}(z_L). \quad (2.133)$$

Mit dem gravitativen Schichtpropagator  $D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l)$  ergibt sich unter den genannten Voraussetzungen

$$0 = \prod_{l=1}^{L-1} D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) Y_j^{(2)-}(z_L). \quad (2.134)$$

Mit der Definition

$$D_{ij}^{(2)\Pi}(z_L) := \prod_{l=1}^{L-1} D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp -kz_L + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} \exp kz_L \quad (2.135)$$

folgt aus (2.134)

$$0 = D_{ij}^{(2)\Pi}(z_L) Y_j^{(2)-}(z_L). \quad (2.136)$$

Dies ist nur erfüllt, wenn  $Y_i^{(2)-}(z_L) = 0$  ist (Anhang A.9). Mit (2.133) ist dann der gravitative Lösungsvektor an der unteren Grenzfläche  $z_L$  zu

$$Y_i^{(2)+}(z_L) = 0 \quad (2.137)$$

bestimmt.

Die Grenzfläche  $z_1$  zeichnet sich dadurch aus, daß sie die Grenze des Halbraums ist und für den gravitativen Schichtpropagator eine Grenze eines Definitionsbereichs darstellt. In (2.132) ist angegeben, daß für  $z < z_1$  der gravitative Schichtpropagator durch  $H_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l)$  gegeben ist. Der von  $K_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l)$  durch die Grenzfläche  $z_1$  fortgepflanzte Anteil muß verschwinden. Dies wird durch die folgenden Grenzflächenbedingungen für  $z_1$  berücksichtigt (Anhang A.10):

$$\Phi^-(z_1) = \Phi^+(z_1) - \frac{2\pi\gamma}{k} \sum_{l=1}^L \Delta\rho_l U_z^+(z_l) \exp kz_l, \quad (2.138)$$

$$G^-(z_1) = G^+(z_1) + 2\pi\gamma \sum_{l=1}^L \Delta\rho_l U_z^+(z_l) \exp kz_l. \quad (2.139)$$

<sup>7</sup> Hier wird  $D_{ij}^{(2)}(z_L, z_{L+1})$  benutzt, da  $Y_i^{(2)+}(z_L)$  von  $z_L$  nach  $z_{L+1}$  fortgesetzt wird. Damit ergeben sich auch die im Vergleich zu (2.97) veränderten Exponenten.

Mit dem Grenzflächenpropagator

$$N_{ij}(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\pi\gamma}{k}\Delta\rho_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2k} \\ 0 & -2\pi\gamma\Delta\rho_1 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

werden die Grenzflächenbedingungen (2.138) und (2.139) berücksichtigt (Anhang A.10). Für die mechanischen Feldgrößen ist bei  $z_1$  zu beachten, daß der Auflastdruck  $Q$  gemäß (2.88) berücksichtigt wird. Für den Lösungsvektor ergibt sich

$$Y_i^-(z_1) = N_{ij}(z_1)Y_j^+(z_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.141)$$

Der Lösungsvektor  $Y_i^+(z_1)$  läßt sich mit Hilfe der Propagatoren (2.86) und (2.98) aus  $Y_i^+(z_L)$  berechnen, und nach Einsetzen von (2.86) und (2.98) in (2.141) folgt

$$Y_i^-(z_1) = N_{ij}(z_1) \prod_{l=1}^{L-1} [D_{jk}(z_{l+1}, z_l)N_{km}(z_{l+1})] Y_m^+(z_L) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

## 2.4 Rücktransformation der Lösung

Die inverse Hankel-Transformation ist der einzige Schritt des Lösungswegs, der numerisch ausgeführt werden muß. Für die numerische Implementierung der inversen Hankel-Transformation muß der in (2.141) eingehende Hankel-transformierte Auflastdruck bekannt sein. Der Hankel-transformierte Auflastdruck wird in Abschnitt 2.4.1 angegeben, so daß die Lösung im Spektralbereich berechnet werden kann. Die inverse Hankel-Transformation der spektralen Lösung wird in Abschnitt 2.4.2 behandelt.

### 2.4.1 Hankel-Transformation des Auflastdrucks

Bei der Herleitung der Lösung im Spektralbereich ist Axialsymmetrie für den Auflastdruck vorausgesetzt worden. Die Luftdruckwerte werden dazu zunächst über Kreisinge gemittelt, und

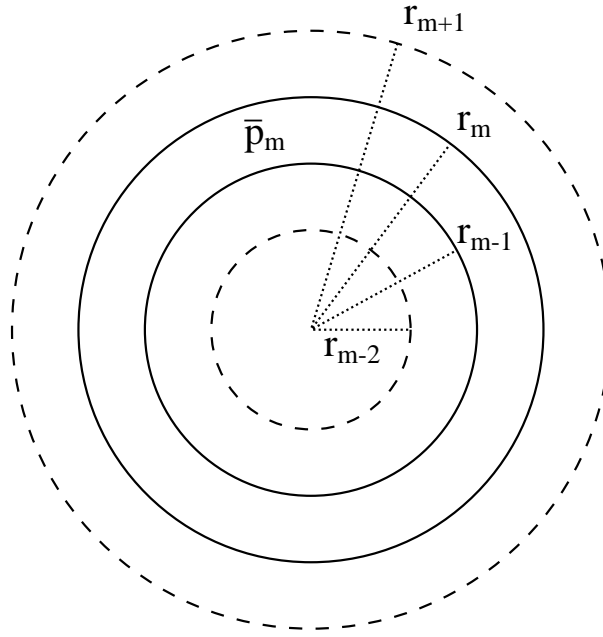


Abbildung 2.4: Aufteilung der Oberfläche  $z_1$  in Kreisringe.

jedem Kreisring  $m$  wird ein gemittelter Luftdruckwert  $\bar{p}_m$  zugeordnet (Abb. 2.4). Diese Mittelung der Luftdruckwerte ist möglich, da die Feldgrößen nur für  $r = 0$  berechnet werden und daher nur der radiale Abstand des jeweiligen Auflastdruckpunkts nicht aber dessen Azimut von Bedeutung ist. Wird die Oberfläche  $z_1$  in  $M$  Kreisringe mit den Radien  $r_m$  aufgeteilt und sind die entsprechenden gemittelten Luftdruckwerte  $\bar{p}_m$  bekannt, läßt sich die Hankel-Transformierte des Auflastdrucks für den  $m$ -ten Kreisring wie folgt beschreiben (Anhang A.11):

$$Q_m = \frac{\bar{p}_m}{k} [r_m J_1(r_m k) - r_{m-1} J_1(r_{m-1} k)]. \quad (2.143)$$

Durch Addition der Lösungen für alle Kreisringe ergibt sich die Lösung für die Auflastdruckverteilung im Spektralbereich:

$$Q = \sum_{m=1}^M \frac{\bar{p}_m}{k} [r_m J_1(r_m k) - r_{m-1} J_1(r_{m-1} k)]. \quad (2.144)$$

## 2.4.2 Inverse Hankel-Transformation

Mit der Substitution von (2.128) und (2.137) in (2.142) ergibt sich

$$\begin{aligned}
Y_i^-(z_1) = & N_{ij}(z_1) \prod_{l=1}^{L-1} [D_{jk}(z_{l+1}, z_l) N_{km}(z_{l+1})] \left[ \begin{array}{c} S_1 \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} + S_2 \frac{-M_{11}}{\det M_{ij}} \\ Z_1 \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} + Z_2 \frac{-M_{11}}{\det M_{ij}} \\ \frac{M_{12}}{\det M_{ij}} \\ \frac{-M_{11}}{\det M_{ij}} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\
& + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] Q, \tag{2.145}
\end{aligned}$$

wobei  $Q$  durch (2.144) ausgedrückt werden kann. Als nächster Schritt ist die in (2.68) angegebene inverse Hankel-Transformation auf die Komponenten von  $Y_i^-(z_1)$  anzuwenden. Da dem Argument  $k$  und dem Hochindex [0] bzw. [1] der Hankel-transformierten Feldgrößen nun wieder Bedeutung zukommt, sollen diese wieder mit vollständigen Symbolen bezeichnet werden. Formal ergibt sich

$$y_i^-(r, z_1) = \mathcal{H}_\nu^{-1} [Y_i^-(k, z_1)] = \int_0^\infty k Y_i^-(k, z_1) J_\nu(kr) dk. \tag{2.146}$$

Bei der komponentenweisen Anwendung der inversen Hankel-Transformation ist die Ordnung der Besselfunktion  $J_\nu$  entsprechend der Ordnung der Hankel-Transformierten der jeweiligen Größe zu wählen. Im hier betrachteten Fall ist  $r = 0$ . Dadurch vereinfacht sich die inverse Hankel-Transformation, denn es gilt  $J_0(0) = 1$  und  $J_1(0) = 0$  (Bronstein & Semendjajew, 1997, S. 465). Hieraus folgt, daß  $u_r^-(0, z_1)$  und  $t_{rz}^-(0, z_1)$  verschwinden. Für die verbleibenden Feldgrößen ergibt sich die vereinfachte Beziehung

$$\begin{pmatrix} u_z^-(0, z_1) \\ t_{zz}^-(0, z_1) \\ \phi^-(0, z_1) \\ g^-(0, z_1) \end{pmatrix} = \int_0^\infty k \begin{pmatrix} U_z^{[0]-}(k, z_1) \\ T_{zz}^{[0]-}(k, z_1) \\ \Phi^{[0]-}(k, z_1) \\ G^{[0]-}(k, z_1) \end{pmatrix} dk. \tag{2.147}$$

Die Berechnung des Integrals auf der rechten Seite von (2.147) muß numerisch ausgeführt werden. Die numerische Integrationsformel wird in Abschnitt 4.1.3 behandelt. Somit läßt sich der Deformationsbeitrag zum Schwereinkrement  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  durch

$$g_{\text{def}}^{(\Delta)} := g^-(0, z_1) \tag{2.148}$$

bestimmen, und der Freiluftbeitrag ist durch  $u_z^-(0, z_1) g_{,z}^{(0)}$  gegeben.

### 3. Theorie und Berechnung des Luftmasseneffekts

Nachdem in Kapitel 2 der Freiluft- und Deformationseffekt behandelt worden ist, soll nun der Luftmasseneffekt berechnet werden. Zuerst wird auf die Methode der Berechnung eingegangen (Abschnitt 3.1), daran anschließend werden die erforderlichen Beziehungen für das Dichteprofil (Abschnitt 3.2) und das Temperaturprofil (Abschnitt 3.3) abgeleitet. Mit diesen Beziehungen ist es dann möglich, das die Attraktion durch die Atmosphäre beschreibende Integral zu lösen (Abschnitt 3.4).

#### 3.1 Grundlagen

Mit den zur Verfügung stehenden Oberflächenwerten der Lufttemperatur und des Luftdrucks für das verwendete Meßgitter (Abb. 1.2) wird zunächst für jeden Gitterpunkt ein Dichteprofil berechnet. Aus der resultierenden Dichteverteilung der ebenen Atmosphäre werden dann Mittelwerte für Zylindermäntel bestimmt (Abb. 3.3). Durch Variation der Radien und Berücksichtigung aller Zylindermäntel ist es dann möglich, die Atmosphäre kontinuierlich auszufüllen. Diese Verfahren, analog zu den kreisringgemittelten Auflastdruckwerten, vereinfacht die Lösung des Attraktionsintegrals.

Es zeigt sich, daß die Annahme einer ebenen Atmosphäre eine erhebliche Einschränkung darstellt, da sie das betrachtete Atmosphärenvolumen beschränkt (Abschnitt 3.4.1 und 5.2). Deshalb wird ein sphärisches Atmosphärenmodell entwickelt. Jedem Dichteprofilwert wird ein Kugelschalensegment (Abb. 3.4) zugeordnet, wobei die Berücksichtigung aller Kugelschalensegmente die Atmosphäre über dem Meßgitter (Abb. 1.2) ausfüllt.

#### 3.2 Dichteverteilung in der Atmosphäre

Zur Beschreibung der Dichteverteilung in der Atmosphäre sind Annahmen erforderlich, die es ermöglichen, aus den Oberflächenwerten der Lufttemperatur und des Luftdrucks die Dichteverteilung zu bestimmen. Es wird vorausgesetzt, daß sich die Luft wie ein ideales Gas verhält. Dann läßt sich der Druck  $p_{\text{air}}$  an jedem Punkt der Atmosphäre mit Hilfe des idealen Gasgesetzes angeben:

$$p_{\text{air}}(z) = \frac{\rho_{\text{air}}(z) R^* \theta_{\text{air}}(z)}{M_{\text{air}}(z)}. \quad (3.1)$$

Hier ist  $\rho_{\text{air}}$  die Volumenmassendichte der Luft und  $\theta_{\text{air}}$  deren Temperatur. Mit  $R^*$  wird die Gaskonstante<sup>1</sup> bezeichnet, und  $M_{\text{air}}(z)$  ist die Molmasse der Luft. Die positive  $z$ -Achse ist hier

---

<sup>1</sup>  $R^* = 8.314511 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

von der Oberfläche in die Atmosphäre gerichtet (Abb. 3.3 bzw. Abb. 3.4). Durch Umstellen von (3.1) ergibt sich die Dichte der Atmosphäre zu

$$\rho_{\text{air}}(z) = \frac{p_{\text{air}}(z) M_{\text{air}}(z)}{R^* \theta_{\text{air}}(z)}. \quad (3.2)$$

Mit der barometrischen Höhenformel ist

$$p_{\text{air}}(z) = p_{\text{air}}(0) \exp\left(-\int_0^z \frac{d\hat{z}}{H_{\text{air}}(\hat{z})}\right). \quad (3.3)$$

Die Skalenhöhe  $H_{\text{air}}(z)$  in (3.3) ist wie folgt definiert:

$$H_{\text{air}}(z) := \frac{R^* \theta_{\text{air}}(z)}{M_{\text{air}}(z) g(z)}, \quad (3.4)$$

wobei  $g$  die  $z$ -abhängige Schwere bezeichnet. Wird vorausgesetzt, daß die Luft trocken ist, kann die betrachtete Schicht der Atmosphäre als chemisch homogen angenommen werden. (Diese Annahme gilt näherungsweise für die Homosphäre bis ca. 100 km Höhe.) Für die Molmasse läßt sich dann der Mittelwert  $\overline{M}_{\text{air}}$ <sup>2</sup> verwenden und aus (3.2)–(3.4) für die Dichte  $\rho_{\text{air}}$  folgender Ausdruck ableiten:

$$\rho_{\text{air}}(z) = \rho_{\text{air}}(0) \frac{\theta_{\text{air}}(0)}{\theta_{\text{air}}(z)} \exp\left(-\int_0^z \frac{\overline{M}_{\text{air}} g(\hat{z})}{R^* \theta_{\text{air}}(\hat{z})} d\hat{z}\right). \quad (3.5)$$

Neben den Oberflächenwerten der Temperatur und des Luftdrucks gehen in diese Beziehung auch die Temperatur  $\theta_{\text{air}}$  und die Schwere  $g$  als Funktionen der Höhe  $z$  ein.

Für die Höhenabhängigkeit der Schwere läßt sich für einen festen Referenzwert  $g_0$  an der Oberfläche<sup>3</sup> aus der Taylorreihenentwicklung folgende lineare Näherung gewinnen:

$$g(z) = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_E}\right). \quad (3.6)$$

Hier ist mit  $R_E$ <sup>4</sup> der mittlere Erdradius bezeichnet. Die Breitenabhängigkeit der Schwere wird vernachlässigt, da diese für das betrachtete Problem nur ca. 1% der Höhenabhängigkeit beträgt. Die Bestimmung des Temperaturprofils  $\theta_{\text{air}}(z)$  wird im folgenden Abschnitt behandelt.

### 3.3 Temperaturverteilung in der Atmosphäre

Das Problem bei der Bestimmung des Temperaturprofils  $\theta(z)_{\text{air}}$  besteht darin, daß die das Temperaturprofil beschreibenden Temperaturgradienten gewöhnlich aus Meßdaten abgeleitete Standardwerte sind. Somit gilt auch die zugehörige Temperaturverteilung nur für diese Standardsituation in der Atmosphäre. Es werden auch saisonal variierte Standard-Temperaturprofile betrachtet (z. B. Sun, 1995, S. 51 u. 94), jedoch lassen sich damit nicht die Variationen zwischen

<sup>2</sup>  $\overline{M}_{\text{air}} = 0.0289644 \text{ kg mol}^{-1}$  (NOAA, 1976).

<sup>3</sup> In dieser Arbeit wird der Referenzwert  $g_0 = 9.81261664 \text{ m s}^{-2}$  benutzt.

<sup>4</sup> In dieser Arbeit wird  $R_E = 6371 \text{ km}$  benutzt.

den hier relevanten sechsstündlichen Temperaturwerten beschreiben. Daher wird im folgenden ein Standard-Temperaturprofil unter Berücksichtigung der aktuellen Temperaturmeßwerte an der Oberfläche modifiziert.

### 3.3.1 Standard-Temperaturprofil

Das hier verwendete Standard-Temperaturprofil (U.S. Standard Atmosphere, NOAA, 1976) stellt eine Linearisierung des Temperaturverlaufs dar, d. h. die in den einzelnen Schichten vorgegebenen Temperaturgradienten beschreiben eine stückweise lineare Veränderung der Temperatur mit der Höhe. Bei der Bestimmung des Luftmasseneffekts werden hier die unteren 30 km der Atmosphäre berücksichtigt. Der folgende Ausdruck beschreibt das Standard-Temperaturprofil für die  $n$ -te Schicht unter Verwendung der Temperaturgradienten  $l_n$  aus Tabelle 3.1:

$$\theta_{\text{air}}(z) = \theta_{\text{air}}(z_n) + l_n(z - z_n), \quad z \in [z_n, z_{n+1}]. \quad (3.7)$$

Als Oberflächenwert der Lufttemperatur wird  $\theta_{\text{air}}(0) = 288.15$  K verwendet.

Tabelle 3.1: Temperaturgradienten des Standard-Temperaturprofils.

$n$	$z_n$ (km)	$l_n$ (K/km)
0	0	-6.5
1	11	0.0
2	20	1.0
3	30	

### 3.3.2 Variation des Standard-Temperaturprofils

Für die Untersuchung, welchen Einfluß das Temperaturprofil auf den Luftmasseneffekt hat (Abschnitt 5.2), wird vom Standard-Temperaturprofil ausgegangen. Zur Berücksichtigung der aktuellen Oberflächenwerte der Lufttemperatur wird jedoch der Temperaturverlauf bis zu einer Höhe von 1500 m durch einen Gradienten beschrieben, der aus dem Standard-Temperaturwert in 1500 m Höhe und dem Temperaturmeßwert an der Oberfläche bestimmt wird.

Eine Variante dieses Temperaturprofils wird berechnet, indem der Temperaturgradient für die unteren 1500 m der Atmosphäre aus dem Standard-Temperaturwert in 1500 m Höhe und gemittelten Temperaturwerten<sup>5</sup> an der Oberfläche bestimmt wird (Temperaturprofil A).

<sup>5</sup> Es werden gleitende Mittelwerte der Temperaturmeßwerte an der Oberfläche bestimmt, wobei das Mittelungsintervall 31 Tage beträgt.

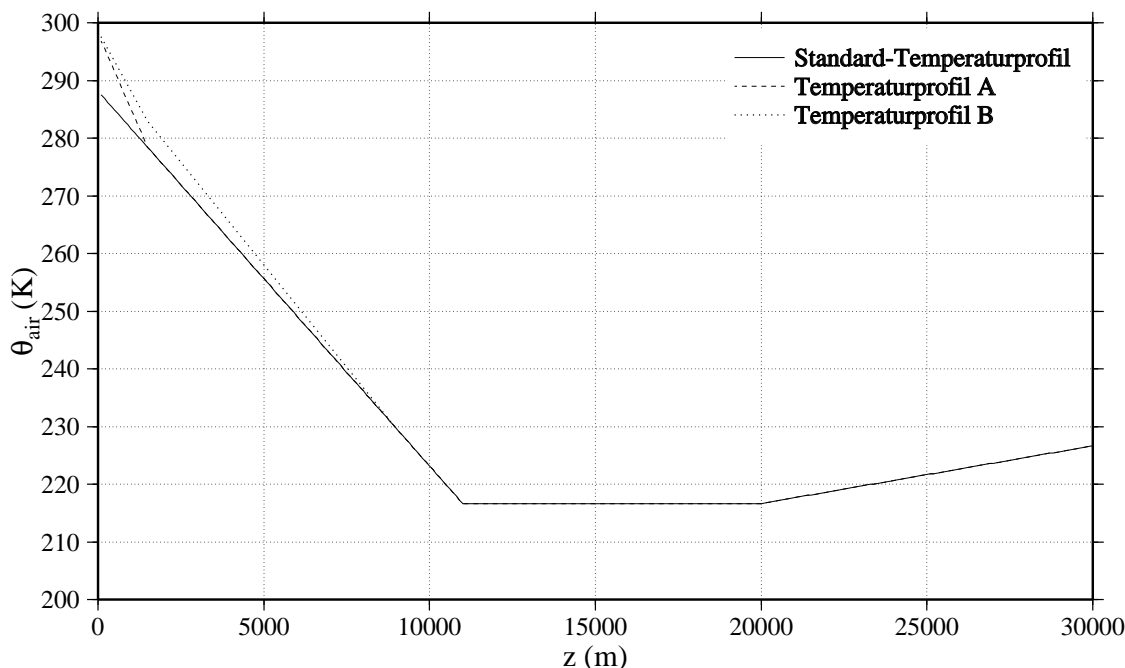


Abbildung 3.1: Vergleich dreier Temperaturprofile.

Beim sphärischen Atmosphärenmodell wird außerdem ein Temperaturprofil verwendet, bei dem zuerst aus dem gemittelten Temperaturwert an der Oberfläche und dem Standard-Temperaturwert in 9000 m Höhe der zugehörige Gradient bestimmt wird. Aus dem aktuellen Oberflächenwert der Lufttemperatur und dem mittels dieses Gradienten berechneten Temperaturwert in 1500 m Höhe läßt sich dann der bodennahe Gradient ermitteln (Temperaturprofil B).

Der Unterschied zwischen den Temperaturprofilen ist in Abb. 3.1 gezeigt, wobei der Oberflächenwert der Lufttemperatur der modifizierten Profile 298.15 K beträgt.

## 3.4 Attraktion durch die Luftmassen

Die Dichteverteilung der Atmosphäre dient als Grundlage der Berechnung des Luftmassenbeitrags. Im folgenden wird ein ebenes Atmosphärenmodell betrachtet (Abschnitt 3.4.1). Zunächst wird die Mittelung der Dichtewerte und die dazu verwendete Geometrie beschrieben, anschließend wird das Attraktionsintegral berechnet. Danach wird ein sphärisches Atmosphärenmodell untersucht (Abschnitt 3.4.2) und die Berechnung des entsprechenden Attraktionsintegrals vorgenommen.

### 3.4.1 Ebenes Atmosphärenmodell

#### Geometrie und Mittelung

Im folgenden wird die Topographie des Meßgebietes vernachlässigt, d. h. alle Oberflächenwerte werden der Ebene  $z = 0$  zugeordnet. Diese Ebene stellt gleichzeitig die Grenzfläche des ebenen Halbraums dar, der zur Berechnung des Freiluft- und des Deformationseffekts verwendet worden



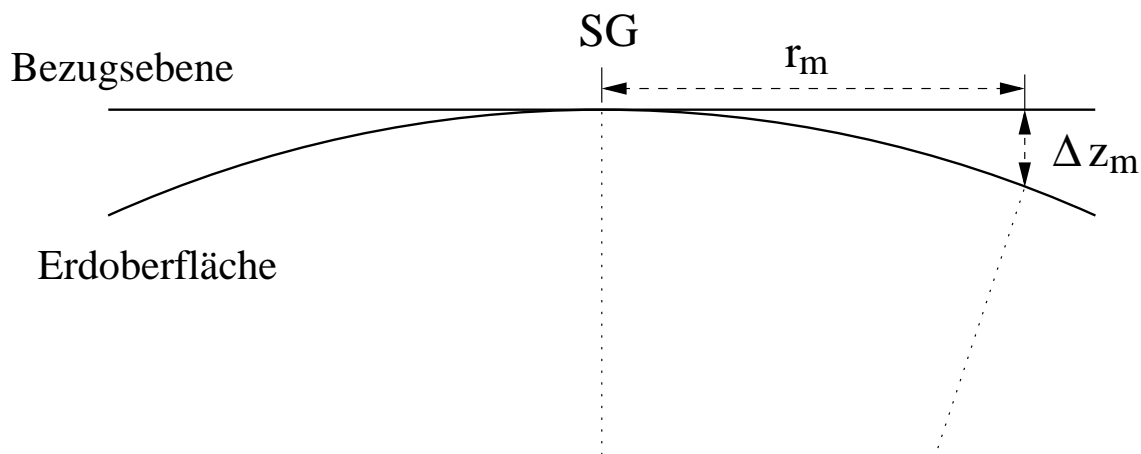


Abbildung 3.2: Vertikaler Abstand zwischen Bezugsebene und Erdoberfläche.

ist.

Die vereinfachende Annahme eines ebenen Bezugsniveaus für die atmosphärische Dichteverteilung hat zur Folge, daß die radiale Ausdehnung des Atmosphärenmodells beschränkt werden muß. Der Grund hierfür ist, daß der vertikale Abstand zwischen der Bezugsebene und der Kugeloberfläche der Erde mit radialem Abstand vom Gravimeterstandort zunimmt (Abb. 3.2). Für einen Punkt der Ebene in einem bestimmten radialen Abstand  $r_m$  vom Gravimeterstandort läßt sich der vertikale Abstand  $\Delta z_m$  zwischen Kugeloberfläche und Ebene berechnen. Der bei korrekter Berücksichtigung der Sphärizität unterhalb der Ebene liegende relative Massenanteil läßt sich dann ebenfalls berechnen und ist in Tabelle 3.2 angegeben. Dabei beziehen sich die radialen Abstände auf die Mitte der jeweils 25 km breiten Zylindermäntel und die prozentualen Angaben der Massenanteile auf die jeweilige Gesamtmasse eines Zylindermantels von 30 km Höhe. In Tabelle 3.3 werden für die verschiedenen Zylindermäntel (Abb. 3.3) die Anteile des gesamten Luftmassenbeitrags angegeben. Die prozentualen Angaben der Anteile beziehen sich auf das Gesamtvolumen mit einem Radius von 150 km und einer Höhe von 30 km. Für die Berechnungen in Tabelle 3.2 und 3.3 ist als Vereinfachung eine isotherme Atmosphäre angenommen worden.

Tabelle 3.2: Vertikaler Abstand zwischen Bezugsebene und Erdoberfläche und zugehöriger relativer Massenanteil für verschiedene radiale Abstände.

$r_m$ (km)	$\Delta z_m$ (m)	Relativer Massenanteil
37.5	110.4	1.5 %
62.5	306.6	4.2 %
87.5	600.9	8.0 %
112.5	993.3	12.9 %
137.5	1483.9	18.7 %

Tabelle 3.3: Relativer Anteil des gesamten Luftmassenbeitrags für verschiedene Zylindermäntel.

$r_{m-1}$ (km)	$r_m$ (km)	Relativer Anteil
0	25	59.0 %
25	50	21.3 %
50	75	9.4 %
75	100	5.1 %
100	125	3.1 %
125	150	2.1 %

Dabei wird aus den Oberflächenwerten des Luftdrucks und der Lufttemperatur die Dichte berechnet, die dann mit konstanter Skalenhöhe ohne Berücksichtigung des Temperaturverlaufs in die Höhe fortgesetzt wird. Für die Berechnung des Luftmassenbeitrags verringert sich der durch das beschränkte Integrationsgebiet verursachte Fehler mit zunehmenden Radius. Bei einem Radius von 75 km werden nach Tabelle 3.3 annähernd 90 % des gesamten Luftmassenbeitrags erfaßt. Der Fehler bei der Berechnung des Luftmassenbeitrags durch die nicht berücksichtigten Massen unter der Bezugsebene wird jedoch größer, je größer der Radius des Integrationsgebiets gewählt wird. Für den Zylindermantel mit einem Radius von 100 km sollten ca. 8 % der Masse unterhalb der Bezugsebene liegen, und dieser Anteil ist daher im Modell nicht korrekt berücksichtigt. Der im folgenden in der Berechnung benutzt Bereich wird auf radiale Abstände von maximal 75 km begrenzt. Es werden dann ca. 90 % des gesamten Luftmassenbeitrags erfaßt, wobei ca. 6 % der Masse nicht korrekt berücksichtigt werden.

Aufgrund dieser Einschränkung beim ebenen Atmosphärenmodell wird als Alternative im nächsten Abschnitt ein sphärisches Atmosphärenmodell entwickelt. Zunächst wird jedoch die Lösung des Attraktionsintegrals für das ebene Atmosphärenmodell behandelt.

### Lösung des Attraktionsintegrals

Für das Schwerepotential  $\phi$  einer beliebigen Dichteverteilung  $\rho(X_1, X_2, X_3)$  im Raum  $\mathcal{X}$  gilt

$$\phi = -\gamma \int_{X_1} \int_{X_2} \int_{X_3} \frac{\rho(X_1, X_2, X_3)}{|X_i|} dX_1 dX_2 dX_3. \quad (3.8)$$

Die  $z$ -Komponente der Schwere ist durch

$$g_z := -\phi_{,z} \quad (3.9)$$

definiert. Werden Zylinderkoordinaten verwendet, folgt aus (3.8) und (3.9) die Beziehung

$$g_z = \gamma \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[ \rho(r, \varphi, z) \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{,z} dr d\varphi dz. \quad (3.10)$$

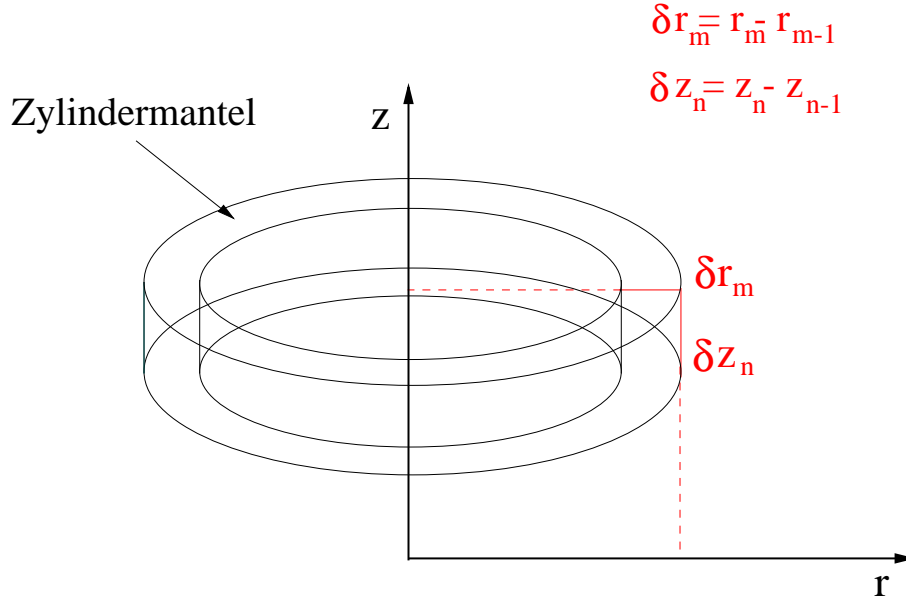


Abbildung 3.3: Zur Dichtemittlung verwendeter Zylindermantel.

Im folgenden wird die Dichteverteilung in der Atmosphäre betrachtet, d. h.  $\rho = \rho_{\text{air}}$ . Die Dichtewerte werden entsprechend ihrer Höhe über der Bezugsebene und ihres radialen Abstands zum Gravimeterstandort Zylindermänteln zugeordnet (Abb. 3.3). Aus den einem Zylindermantel zugeordneten Dichtewerten werden dann deren Mittelwerte  $\bar{\rho}_{\text{air } mn}$  berechnet. Weiterhin bezeichnet  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  die  $z$ -Komponente des Luftmassenbeitrags zum Schwereinkrement. Da sich der Beitrag auf einen festen Bezugspunkt, den Standort des Gravimeters im Referenzzustand, bezieht, handelt es sich um ein lokales Inkrement, das durch den folgenden Ausdruck gegeben ist (Anhang B.1):

$$g_{\text{air}}^{(\Delta)} := 2\pi\gamma \sum_{m,n} \bar{\rho}_{\text{air } mn} [\sqrt{r_m^2 + z_n^2} - \sqrt{r_{m-1}^2 + z_n^2} - \sqrt{r_m^2 + z_{n-1}^2} + \sqrt{r_{m-1}^2 + z_{n-1}^2}]. \quad (3.11)$$

### 3.4.2 Sphärisches Atmosphärenmodell

#### Geometrie

Wie beim ebenen Atmosphärenmodell wird auch hier die Topographie des Meßgebietes vernachlässigt. Jedoch werden die Oberflächenwerte nun der Kugeloberfläche mit dem mittleren Erdradius  $R_E$  zugeordnet. Die Attraktion jedes Kugelschalensegments (Abb. 3.4) wird separat berechnet, d. h. es entfällt eine Mittelung um eine Symmetrieachse, wie sie beim ebenen Atmosphärenmodell vorgenommen worden ist. Die maximale Höhe des berücksichtigten Volumens des sphärischen Atmosphärenmodells beträgt 30 km, und der maximale radiale Abstand auf der Referenzfläche (Kugeloberfläche mit Radius  $R_E$ ) beträgt 900 km.

### Lösung des Attraktionsintegrals

Für das sphärische Atmosphärenmodell werden Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $\vartheta$  benutzt, die mit folgender Koordinatentransformation eingeführt werden:

$$\begin{aligned} X_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ X_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ X_3 &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hier bezeichnet  $r$  den radialen Abstand,  $\vartheta$  den Winkel zwischen der  $X_3$ -Achse und dem Vektor  $X_i$  und  $\varphi$  den Azimut (Abb. 3.4). Aus (3.8) ergibt sich dann in Kugelkoordinaten

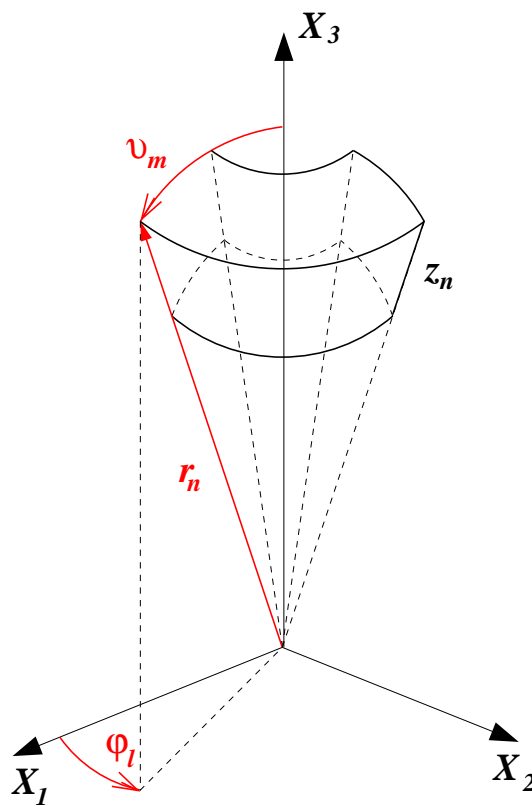


Abbildung 3.4: Zur Berechnung des Attraktionsintegrals verwendetes Kugelschalensegment.

$$\phi(R_E, 0, 0) = -\gamma \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 2r R_E \cos \vartheta + R_E^2}} dr d\vartheta d\varphi, \quad (3.13)$$

wobei der Aufpunkt auf der  $X_3$ -Achse und der Kugeloberfläche mit dem Radius  $R_E$  gewählt ist. Im folgenden wird die Dichteverteilung in der Atmosphäre betrachtet, d. h.  $\rho = \rho_{\text{air}}$ . Die berücksichtigte Atmosphäre wird entsprechend der Anzahl der maximal 900 km vom Aufpunkt entfernten Meßgitterpunkte in Kugelschalensegmente (Abb. 3.4) aufgeteilt. Die Dichtewerte werden

gemäß ihrer Höhe  $z_n$  über der Kugeloberfläche<sup>6</sup> und den Meßgitterpunkten einzelnen Kugelsegmenten zugeordnet und mit  $\rho_{\text{air } mnl}$  bezeichnet. Für  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  ergibt sich dann (Anhang B.2)

$$\begin{aligned}
 g_{\text{air}}^{(\Delta)} &= \frac{\gamma}{R_E} \sum_{m,n,l} \rho_{\text{air } mnl} (\phi_l - \phi_{l-1}) \\
 & [(z_n + R_E) \sqrt{(z_n + R_E)^2 - 2(z_n + R_E)R_E \cos \vartheta_m + R_E^2} \\
 & - (z_{n-1} + R_E) \sqrt{(z_{n-1} + R_E)^2 - 2(z_n + R_E)R_E \cos \vartheta_m + R_E^2} \\
 & - (z_n + R_E) \sqrt{(z_n + R_E)^2 - 2(z_n + R_E)R_E \cos \vartheta_{m-1} + R_E^2} \\
 & + (z_{n-1} + R_E) \sqrt{(z_{n-1} + R_E)^2 - 2(z_n + R_E)R_E \cos \vartheta_{m-1} + R_E^2}]. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup> Es gilt jetzt  $z_n := r_n - R_E$ .

## 4. Numerische Umsetzung der Theorie

In Kapitel 2 und 3 ist die Theorie zur Berechnung der drei atmosphärischen Beiträge zum Schwereinkrement dargestellt worden. Nun soll die numerische Umsetzung der Theorie behandelt werden.

### 4.1 Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags

Im folgenden wird auf die Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags eingegangen. Dazu werden zuerst die Parameter des verwendeten Erdmodells angegeben (Abschnitt 4.1.1). Anschließend wird die kreisringförmige Geometrie der Auflastdruckverteilung besprochen (Abschnitt 4.1.2). Zuletzt wird auf die numerische Implementierung der inversen Hankel-Transformation eingegangen (Abschnitt 4.1.3).

#### 4.1.1 Modellparameter

Für das verwendete ebene Erdmodell ist in Abschnitt 2.2.1 elastisches Materialverhalten vorausgesetzt worden. Mit der Annahme homogener Schichten gemäß Abschnitt 2.3.1 folgt, daß die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  sowie die Dichte  $\rho$  für die  $L$  Schichten vorgegeben werden müssen (Abb. 4.1). Die hier verwendeten Parameter von Erdmodell **PSC** werden vom PREM-Erdmodell (Dziewonski & Anderson, 1981) abgeleitet. Hierzu werden die oberen 2100 km der Erde in 29 Schichten aufgeteilt und die jeweiligen Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  sowie die Dichte  $\rho$  so gewählt, daß sie eine treppenförmige Näherung des Verlaufs im PREM-Erdmodell darstellen. Die Parameterwerte für die unterste Schicht gelten für den Halbraum unter der tiefsten Grenzfläche. Desweiteren wird in Abschnitt 5.1.1 das vierschichtige Erdmodell **LC** benutzt, dessen Parameter  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\rho$  in Abb. 4.2 gezeigt sind. In Abschnitt 5.1.2 wird außerdem das inkompressible Erdmodell **PSI** verwendet, das in der Schichtung und den Parametern  $\mu$  und  $\rho$  Erdmodell **PSC** entspricht. Die Parameterwerte aller Erdmodelle sind in Anhang C.1 gelistet.

#### 4.1.2 Geometrie der Auflastdruckverteilung

Wie in Abschnitt 2.4.1 geschildert worden ist, werden die Luftdruckwerte des Meßgitters Kreisringen (Abb. 2.4) zugeordnet und für jeden Kreisring  $m$  der Mittelwert  $\bar{p}_m$  berechnet. Jeder dieser Kreisringe ist  $r_m - r_{m-1} = 44$  km breit und der maximale Radius  $r_M$  beträgt 1100 km. Zusätzlich wird jetzt beachtet, daß Luftdruckänderungen über dem Meer nicht zu Laständerungen führen sollen, d. h. es wird hier also das Modell des *inverted barometer ocean* (IBO) (z. B. Spratt, 1982; Boy & Hinderer, 1999) vorausgesetzt. Hierbei wird davon ausgegangen, daß kleine

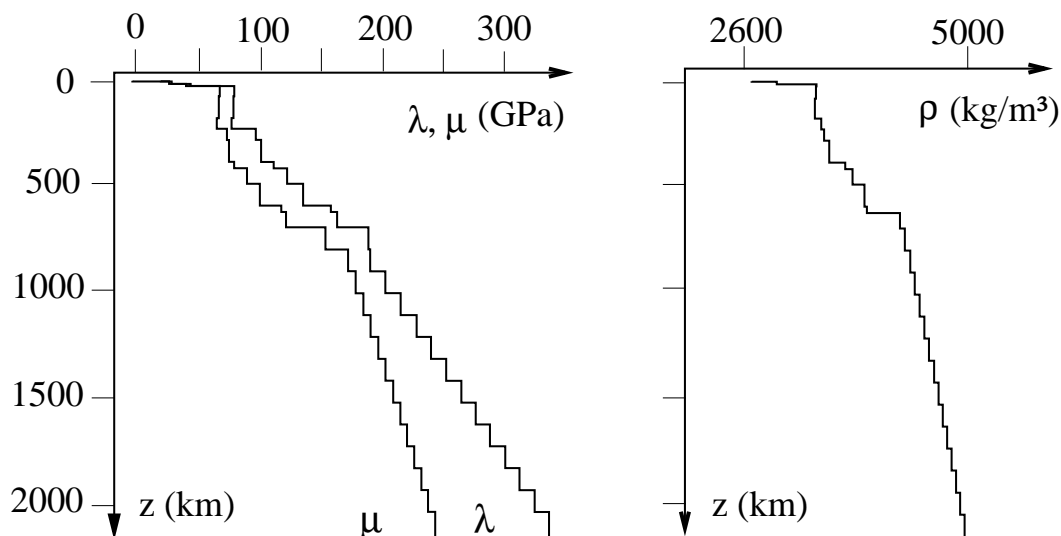


Abbildung 4.1: Verteilung der Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  und der Dichte  $\rho$  für vereinfachtes PREM-Erdmodell PSC.

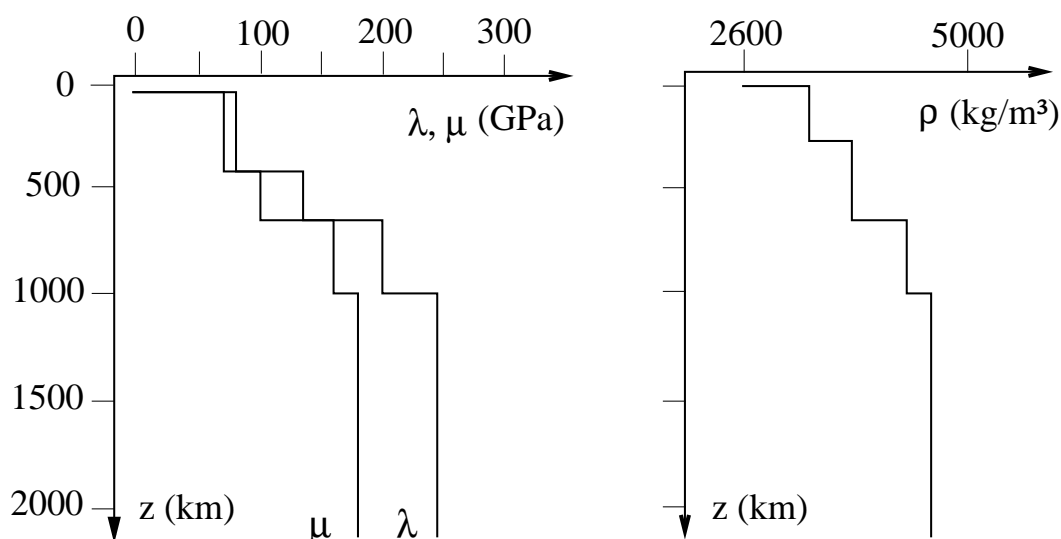


Abbildung 4.2: Verteilung der Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  und der Dichte  $\rho$  für vierschichtiges Erdmodell LC.

Änderungen des Auflastdrucks über dem Meer von den damit verbundenen Wasserverdrängungen kompensiert werden.

In Abb. 4.3 sind neben Spektren synthetischer Lasten auch beispielhaft vier Lastspektren aus Luftdruckdaten des Meßgitters abgebildet. Dabei sind die normierten<sup>1</sup> Lastspektren als Funktion der normierte Wellenzahl  $\kappa = kR_E$  aufgetragen. Die synthetischen Auflasten bestehen aus einem oder mehreren 44 km breiten Kreisringen, deren äußere Radien angegeben sind und auf die ein konstanter Druck wirkt, so daß kreisförmige Auflasten entstehen. An den Spektren

<sup>1</sup> Die Spektren sind jeweils auf ihre Wert für  $\kappa = 0.1$  normiert.

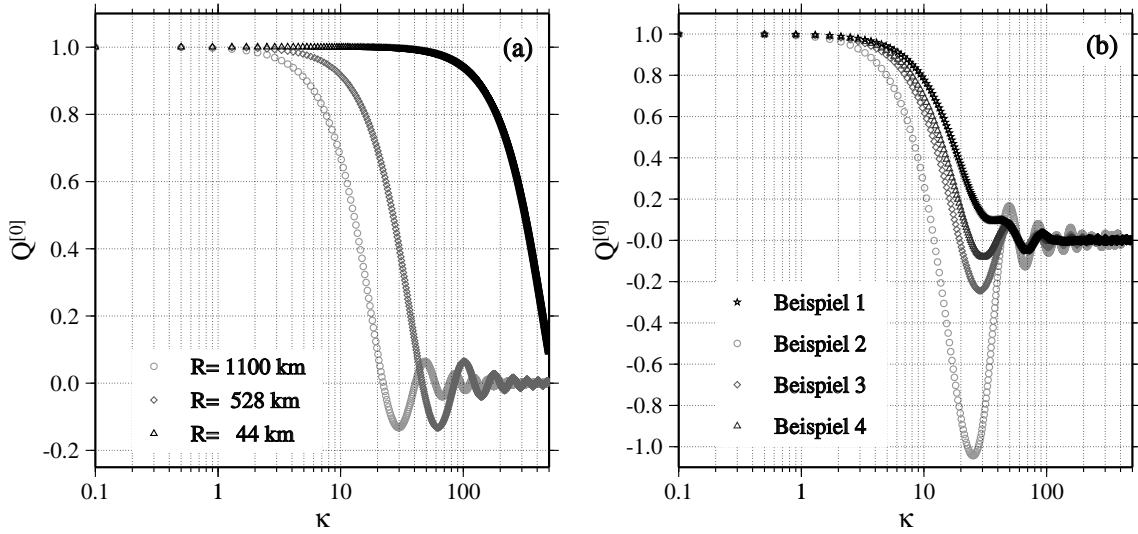


Abbildung 4.3: (a): Spektren des Drucks für homogene, kreisförmige Auflasten mit unterschiedlichen Radien.

(b): Spektren des Drucks für gemessene Auflastdruckverteilungen.

in Abb. 4.3a ist zu erkennen, daß beim kleinsten Lastring (Radius von 44 km) erst für  $\kappa > 100$  die Amplitude abklingt und bei  $\kappa = 499$  auf ca. 10% abgefallen ist. Für die synthetischen Auflasten mit Lastringen bis zu 528 km und 1100 km erfolgt die Abnahme bereits bei kleineren Wellenzahlen.

Wie unterschiedlich die Lastspektren für gemittelte Luftdruckwerte des Meßgitters sind, ist an den Spektren in Abb. 4.3 b zu erkennen. Alle Auflastdruckverteilungen haben hier eine radiale Ausdehnung von 1100 km. Es fällt auf, daß die Spektren zwischen  $\kappa = 10$  und  $\kappa = 100$  in ihren Amplituden deutlich voneinander abweichen. Allen gemeinsam ist allerdings das Abklingen der Amplitude auf einige Prozent für  $\kappa > 400$ . Für die numerische inverse Hankel-Transformation sind desweiteren die Spektren der Oberflächenvertikalverschiebung und der Schwere von Interesse und werden zum Auffinden der Obergrenze der berücksichtigten Wellenzahlen in Abschnitt 4.1.3 betrachtet.

### 4.1.3 Numerische Ausführung der inversen Hankel-Transformation

Bisher ist die Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags im Spektralbereich dargestellt worden. Weiterhin ist in Abschnitt 2.4.2 darauf verwiesen worden, daß die inverse Hankel-Transformation nur numerisch durchgeführt werden kann. Zur Berechnung der Felder im Raumbereich (radialer Bereich) ist die inverse Hankel-Transformation durchzuführen, die durch (2.68) gegeben ist. Für  $r = 0$  und  $\nu = 0$  vereinfacht sich sie sich zu

$$f^-(0, z_1) = \int_0^{\infty} k F^{[0]-}(k, z_1) dk. \quad (4.1)$$

Für die Felder in (2.147) kann (4.1) nur numerisch berechnet werden, und es wird eine Nähe-



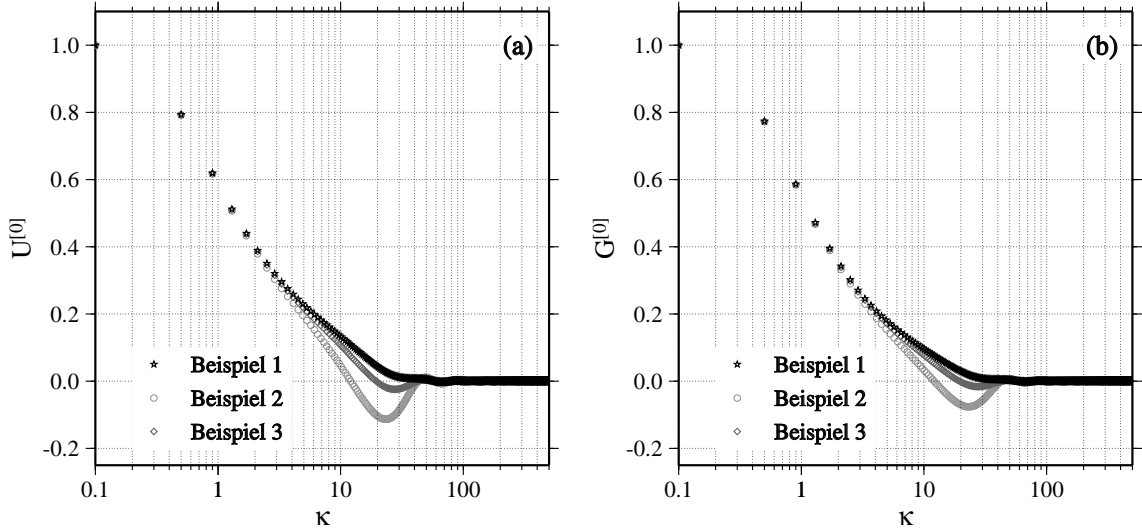


Abbildung 4.4: (a): Spektrum der Oberflächenverschiebung  $U_z^{[0]-}(\kappa, z_1)$  für die entsprechenden Lastspektren aus Abb. 4.3(b).

(b): Spektrum der Schwere  $G^{[0]-}(\kappa, z_1)$  für die entsprechenden Lastspektren aus Abb. 4.3(b).

rungsformel für das Integral mit diskreten Werten  $F^{[0]-}(k, z_1)$  benötigt. Zuerst muß eine endliche Obergrenze für die Wellenzahlen  $k$  angegeben werden. Hierzu sei auf Abb. 4.4 verwiesen, in der die Spektren der Hankel-transformierten Oberflächenverschiebung  $U_z^{[0]-}(\kappa, z_1)$  und der Schwere  $G^{[0]-}(\kappa, z_1)$  als Funktion der normierten Wellenzahl  $\kappa$  dargestellt sind<sup>2</sup>. Für die maximal berücksichtigte normierte Wellenzahl  $\kappa = 499$  sind die zugehörigen Amplituden unter 0.02% abgefallen. Für den Bereich von  $\kappa = 200$  bis  $\kappa = 499$  befinden sich die Amplituden innerhalb einer 0.08% Umgebung. Alle prozentualen Angaben beziehen sich auf den Wert der jeweiligen Feldgröße für  $\kappa = 0.1$ . Hiermit läßt sich begründen, daß die numerische inverse Hankel-Transformation mit der Begrenzung auf die maximale normierte Wellenzahl  $\kappa = 499$  durchgeführt wird.

Mit Hilfe der Newton-Cotes-Formeln (z. B. Werner, 1992) läßt sich folgender Ausdruck für die numerische Berechnung des Integrals (4.1) ableiten (Anhang C.2):

$$f^-(0, z_1) = \frac{4}{90} \Delta k \left[ 7F_{h=0} + 32 \sum_{h=1}^{2h_4} F_{2h-1} + 12 \sum_{h=1}^{h_4} F_{4h-2} + 14 \sum_{h=1}^{h_4-1} F_{4h} + 7F_{h_{\max}} \right] \quad (4.2)$$

mit

$$\begin{aligned} F_h &= k F^{[0]-}(k, z_1), \quad k = \frac{0.1 + 0.4 h}{R_E}, \quad h = 1, 2, \dots, h_{\max}, \\ h_4 &= \frac{h_{\max}}{4}, \\ \Delta k &= \frac{0.4}{R_E}. \end{aligned}$$

Hier ist  $h_{\max} = 1248$ , womit sich die maximal berücksichtigte normierte Wellenzahl  $\kappa = 499.3$  ergibt.

<sup>2</sup>  $U_z^{[0]-}$  und  $G^{[0]-}$  sind jeweils auf ihren Wert für  $\kappa = 0.1$  normiert.

## 4.2 Berechnung des Luftmassenbeitrags

Zuerst wird für das zylindrische sowie das sphärische Atmosphärenmodell die Diskretisierung des Atmosphärenvolumens beschrieben (Abschnitt 4.2.1). Danach wird die Berechnung der variierten Temperaturprofile behandelt (Abschnitt 4.2.2), an die sich die Beschreibung des Lösungswegs der Integration des Kehrwerts der Skalenhöhe (3.5) anschließt (Abschnitt 4.2.3).

### 4.2.1 Diskretisierung der Atmosphärenmodelle

Wie in Abschnitt 3.3.1 erwähnt worden ist, wird die Atmosphäre bis zu einer Höhe von 30 km berücksichtigt. Dazu werden beim zylindrischen Atmosphärenmodell im Attraktionsintegral (3.10)  $N = 300$  gleich mächtige Schichten betrachtet, die jeweils in  $M = 3$  Zylindermäntel mit homogenen Dichten untergliedert sind (Abb. 3.3). Jeder dieser Zylindermäntel hat eine Breite von 25 km, so daß der maximale Radius 75 km beträgt.

Für das sphärische Atmosphärenmodell wird das berücksichtigte Volumen in  $N = 300$  gleich mächtige Kugelschalen unterteilt. Entsprechend dem maximalen Abstand von 900 km auf der Referenzfläche (Kugeloberfläche mit Radius  $R_E$ ) wird  $\vartheta_{m=M}$  mit  $M = 30$  bestimmt und die übrigen  $\vartheta_m$  mit gleichen Winkelabständen. Je nach Anzahl  $L(m)$  der Meßgitterpunkte, die unter einem Band zwischen  $\vartheta_{m-1}$  und  $\vartheta_m$  liegen, wird dieses in  $L(m)$  gleichvolumige Kugelschalensegmente zerlegt, womit die  $\varphi_l$  bestimmt sind. Somit ergibt die Summe aller  $L(m)$  die Anzahl der Meßgitterpunkte mit einem Abstand von bis zu 900 km vom Gravimeterstandort auf der  $X_3$ -Achse.

### 4.2.2 Luftdruck- und Lufttemperaturverteilung

Zur Berechnung der Dichteprofile nach (3.5) werden neben dem Luftdruckwert  $p_{\text{air}}(0)$  auch die Lufttemperaturwerte  $\theta_{\text{air}}(z)$  benötigt. In Abschnitt 3.3.2 ist beschrieben worden, wie die Temperaturverteilungen bestimmt werden. Je nach verwendeten Atmosphärenmodell wird neben den Oberflächenwert der Lufttemperatur auf ein gemittelter Temperaturwert verwendet. Der gemittelte Temperaturwert wird aus den Meßwerten an einem Gitterpunkt (Abb. 1.2) für ein 31 Tage langes Zeitintervall berechnet. In Abb. 4.5 sind diese Werte für einen Potsdam nahe gelegenen Meßgitterpunkt graphisch dargestellt. Bei der Berechnung des Dichteprofiles zu jedem betrachteten Meßgitterpunkt werden für die  $N = 300$  Schichten je ein Dichtewert aus dem Oberflächenwert des Luftdrucks und der entsprechenden Temperaturverteilung bestimmt. Hierbei ist das Integral über den Kehrwert der Skalenhöhe auszuführen.

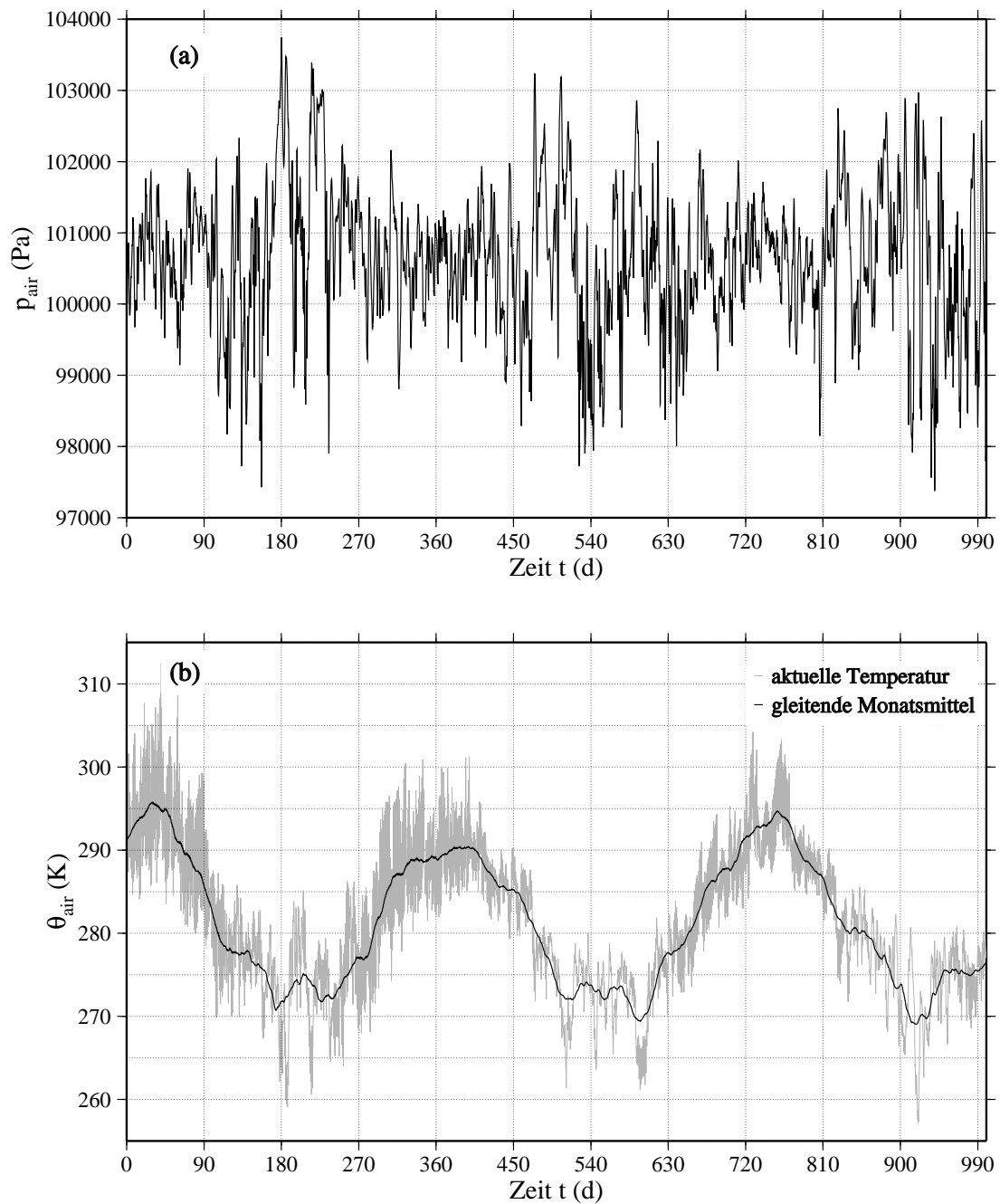


Abbildung 4.5: (a) Luftdruck und (b) Temperatur für einen Potsdam benachbarten Gitterpunkt.

### 4.2.3 Numerische Integration

Als nächstes wird die Integration über den Kehrwert der Skalenhöhe durchgeführt. Das zu bestimmende Integral in (3.5) hat folgende Form:

$$I = \int_0^z \frac{\overline{M}_{\text{air}} g(\hat{z})}{R^* \theta_{\text{air}}(\hat{z})} d\hat{z}. \quad (4.3)$$

Dieses Integral läßt sich auf Grund der diskreten Temperaturwerte  $\theta_{\text{air}}(z)$  nur numerisch lösen. Da für jede Atmosphärenschicht  $z_n$  ein Wert des Integrals benötigt wird, optimiert die numerische Integration über jede einzelne Schicht die Berechnung:

$$I_n = \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{\overline{M}_{\text{air}} g(\hat{z})}{R^* \theta_{\text{air}}(\hat{z})} d\hat{z}. \quad (4.4)$$

Das Integral  $I_n$  wird mit der Näherungsformel aus Anhang C.2 bestimmt. Zur Berechnung des Integrals für die Höhe  $z_N$ , müssen die Integrale  $I_n$  aller Schichten summiert werden:

$$I = \sum_{n=1}^N I_n. \quad (4.5)$$

Da je nach Atmosphärenmodell ab einer bestimmten Höhe (1500 m oder 9000 m) die Temperaturverteilung konstant gehalten wird (Abschnitt 3.3.2), müssen die Integrale der Schichten oberhalb dieser Höhe für alle Meßgitterpunkte und Zeitschritte nur einmal berechnet werden, was eine erheblich Rechenzeiterparnis bewirkt.

## 4.3 Hinweise zur Modellierung

Im folgenden werden Hinweise zu dem entwickelten Fortran-Programm gegeben. Es wird angegeben, welche Größen modelliert werden und im Anschluß daran eine Erklärung der Arbeitsweisen des Programms gegeben.

### 4.3.1 Wahl des Referenzzeitpunkts

Wie in Kapitel 1 ausgeführt worden ist, sollen die atmosphärischen Einflüsse auf SG-Daten berechnet werden, um die Meßdaten hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags zu reduzieren. Dieser Beitrag setzt sich wie folgt zusammen:

$$g_{\text{atm}}^{(\delta)} := g_{\text{def}}^{(\Delta)} + g_{,z}^{(0)} u_z + g_{\text{air}}^{(\Delta)}. \quad (4.6)$$

Der Start der Zeitreihe am 01.07.1992 um 6.00 Uhr wird für die Berechnung des atmosphärischen Gesamtbeitrags als Zeitpunkt  $t = 0$  gewählt. Die Luftdruckverteilung und die berechnete Dichteverteilung für diesen Zeitpunkt stellen die Referenzverteilungen dar. Bei der Berechnung des Deformationsbeitrags  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  und des Freiluftbeitrags  $g_{,z}^{(0)} u_z$  wird die Differenz zwischen der

aktuellen Luftdruckverteilung und der Referenzverteilung verwendet. Desgleichen wird bei der Berechnung des Luftmassenbeitrags  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  die Differenz zwischen der aktuellen Dichteverteilung und der Referenzverteilung verwendet. Im folgenden werden einige Hinweise über das entwickelte Programm gegeben, in dem die bisher beschriebene Theorie und die Lösungsverfahren umgesetzt werden.

### 4.3.2 Hinweise zum Programm

Das entwickelte Fortran-Programm modelliert den atmosphärischen Gesamtbeitrag zum Schwerkrement. Bei diesem Programm sind verschiedene Arbeitsweisen möglich, die durch unterschiedliche Schalter in der Steuerdatei gewählt werden. Soll die Übertragungsfunktionen bestimmt werden, wird in der Steuerdatei nur die Datei mit den Erdmodellparametern und die Ausgabedatei benötigt. Zwar sind in dieser Arbeit die theoretischen Herleitungen nur für kompressible Erdmodell angegeben, jedoch ist im Programm die Möglichkeit geschaffen, inkompressible Erdmodelle zu berücksichtigen. Die dazu benötigten Propagatoren sind Thoma & Wolf (1999) entnommen, wo sie allerdings für den viskoelastischen Fall angegeben sind.

Die übliche Arbeitsweise zur Reduktion einer SG-Datenreihe ist die der Zeitreihenbearbeitung. Zuerst wird abgefragt, ob das zylindrische oder das sphärische Atmosphärenmodell verwendet werden soll. Danach wird der Name der Steuerdatei eingelesen. In der Steuerdatei muß entweder eine Erdmodelldatei angegeben werden oder die Datei mit der Übertragungsfunktion der Feldgrößen. Zusätzlich müssen noch die Dateien der Temperaturdaten und Luftdruckdaten des Meßgitters angegeben werden. In diesen Dateien werden getrennt die verschiedenen meteorologischen Daten für die sechsständlichen Zeitreihen bereitgestellt. Geometrieangaben sowie Referenzwerte werden zusätzlich aus eigenen Dateien eingelesen. In die in der Steuerdatei angegebene Ausgabedatei werden die Oberflächenverschiebung  $u_z$ , die Oberflächenspannung  $t_{zz}$ , der Deformationsbeitrag  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$ , der Freiluftbeitrag  $g_{,z}^{(0)} u_z$ , der Luftmassenbeitrag  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  und die Summe dieser Beiträge  $g_{\text{atm}}^{(\delta)}$  geschrieben.

## 5. Einfluß der Modellannahmen auf die Berechnungen

In diesem Kapitel wird der Einfluß der Modellannahmen auf die Berechnungen untersucht. In den zuerst ausgeführten Untersuchungen (Abschnitt 5.1) wird der Einfluß der Annahmen des Erdmodells auf die Vertikalverschiebung und den Deformationsbeitrag betrachtet. Es folgen Untersuchungen der Auswirkung des IBO-Modells auf die Berechnungen. Abschließend werden Berechnungen für den Luftmassenbeitrag durchgeführt (Abschnitt 5.2), die zur Bewertung des Einflusses der Annahmen des Atmosphärenmodells dienen.

### 5.1 Einfluß der Annahmen zum Erdmodell

Zuerst wird neben dem in Abschnitt 4.1.1 besprochenen Erdmodell **PSC** das vereinfachte vier-schichtige Erdmodell **LC** betrachtet. Durch den Vergleich der berechneten Feldgrößen kann die Empfindlichkeit der Modellierung hinsichtlich der Feinheit der Schichtung untersucht werden. Danach wird auf den Einfluß der Kompressibilität auf die Berechnung eingegangen. Dazu wird im Vergleich das inkompressible Erdmodell **PSI** benutzt.

#### 5.1.1 Einfluß der Schichtung

An dem in Abschnitt 4.1.1 besprochenen Erdmodell **PSC** wird nicht deutlich, welche Wirkung die Feinheit der Schichtung auf die Berechnung hat. Als Hilfe bei der Beantwortung dieser Frage werden  $u_z$  und  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  auf der Grundlage zweier verschiedener Erdmodelle berechnet. Diese Größen werden für Potsdam (52.3806°N, 13.0682°E) berechnet. Für den Auflastdruck werden die Luftdruckdaten des ECMWF für das Meßgitternetz (Abb. 1.2) herangezogen, die bis zu radialen Abständen von 1100 km berücksichtigt werden. Abb. 5.1 zeigt  $u_z$  an der Oberfläche  $z_1$  für Erdmodelle **PSC** und **LC** (Anhang C.1). Die Angabe des Zeitfensters, Tag 98 bis 140, bezieht sich auf den Beginn der Zeitreihe am 01.07.1992. Die Differenz zwischen  $u_z$  beträgt maximal 0.5 mm bzw. ca. 10 %. Abb. 5.2 zeigt  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  für Erdmodelle **PSC** und **LC**. Es ist zu erkennen, daß die entsprechende Abweichung zwischen  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  maximal  $0.1 \mu\text{Gal}^1$  bzw. 10 % beträgt. Die Differenzen in den berechneten Feldgrößen zeigen, daß die Verwendung des vierschichtigen Erdmodells **LC** bereits eine brauchbare Näherung darstellt. In dieser Arbeit wird jedoch weiterhin **PSC** für die Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags herangezogen.

#### 5.1.2 Einfluß der Kompressibilität

Zur Abschätzung des Einflusses der Kompressibilität werden wiederum  $u_z$  und  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  verglichen, jedoch wird nun das kompressible Erdmodell **PSC** und das inkompressible Vergleichsmodell **PSI**

---

<sup>1</sup> Es ist  $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ms}^{-2}$ .

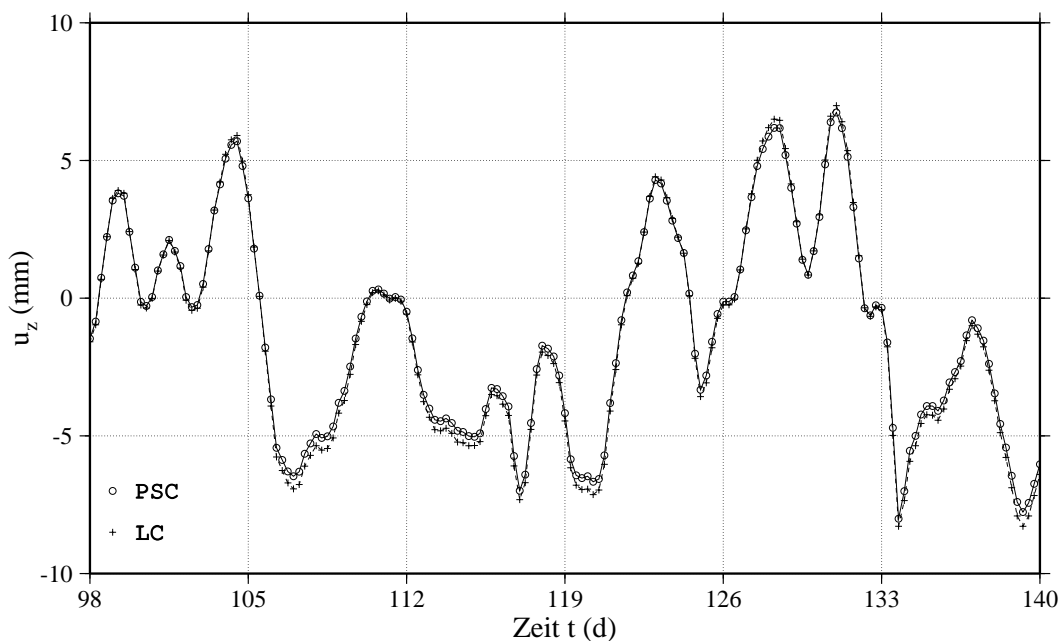


Abbildung 5.1: Oberflächenverschiebung für Erdmodell PSC und LC.

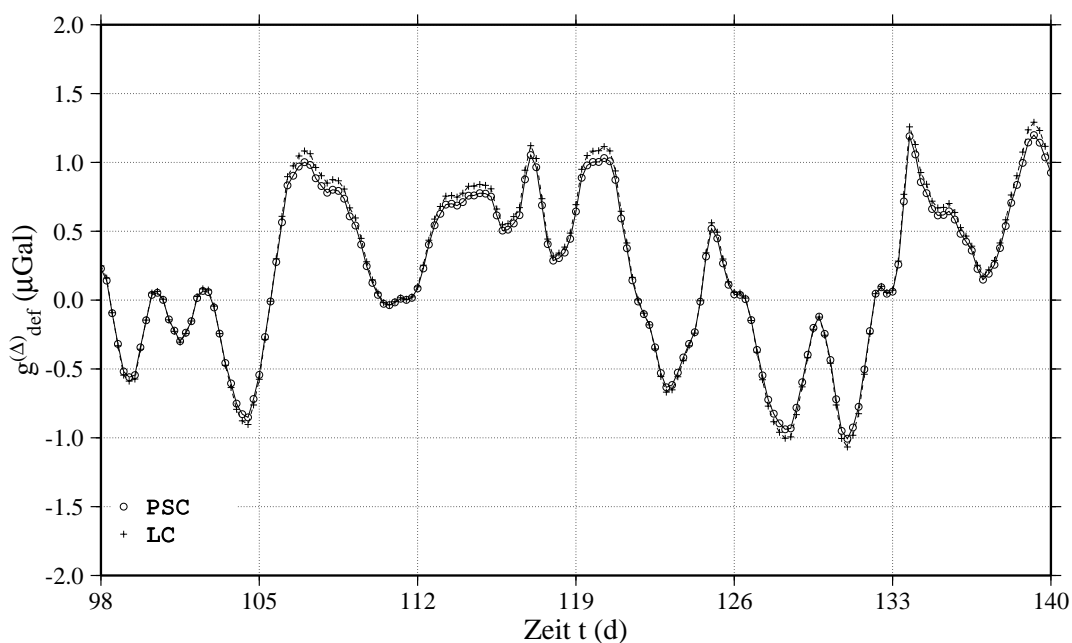


Abbildung 5.2: Deformationsbeiträge für Erdmodell PSC und LC.

(Anhang C.1) benutzt. In Abb. 5.3 ist zu erkennen, daß die Differenz zwischen  $u_z$  proportional zur Verschiebung ist und mit maximal ca. 3 mm ungefähr 50% des Wertes für Erdmodell PSC beträgt. Abb. 5.4 zeigt, daß diese Proportionalität auch für die Differenz zwischen  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  gilt. Im betrachteten Zeitfenster ist eine maximale Differenz von ca.  $0.5 \mu\text{Gal}$  zu erkennen.

Abschließend wird die Summe des Freiluft- und Deformationsbeitrags betrachtet. Abb. 5.5 zeigt  $g_{\text{def}}^{(\Delta)} + g_{,z}^{(0)} u_z$  für Erdmodell PSC und PSI. Die maximale Differenz im betrachteten Zeitfenster von ca.  $0.5 \mu\text{Gal}$  läßt die Bedeutung der Kompressibilität erkennen. Als Schlußfolgerung läßt sich feststellen, daß der Einfluß der Kompressibilität nicht zu vernachlässigen ist.

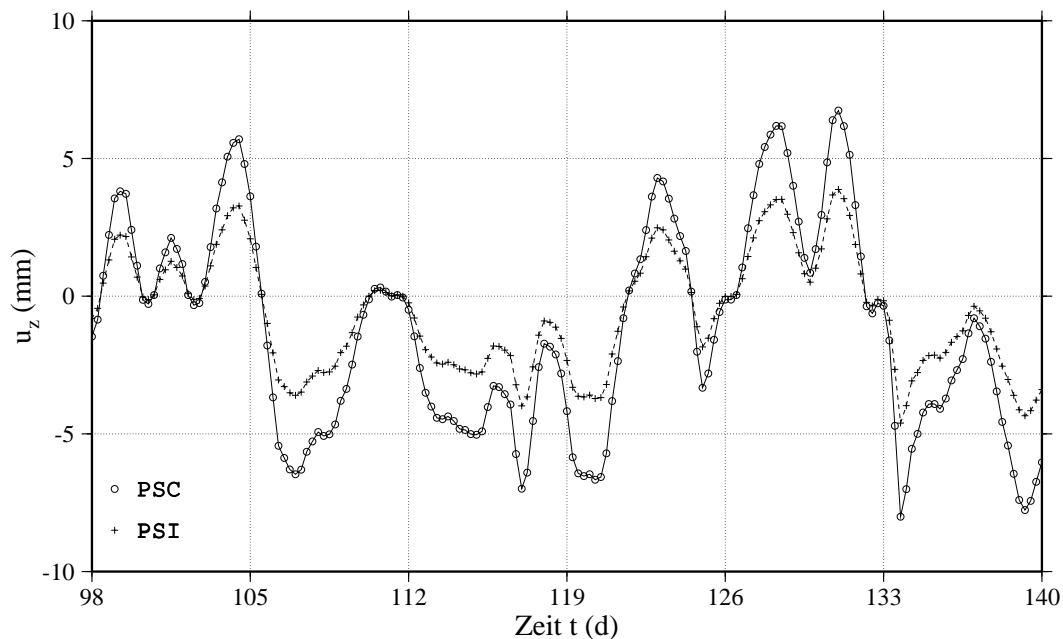


Abbildung 5.3: Oberflächenverschiebung für Erdmodell PSC und PSI.

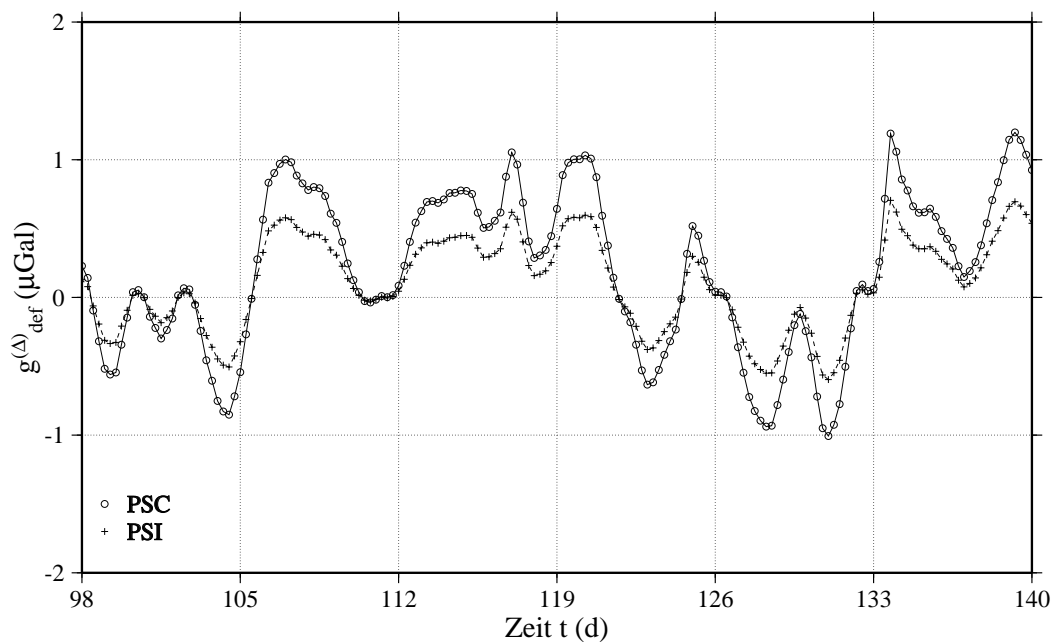


Abbildung 5.4: Deformationsbeitrag für Erdmodell PSC und PSI.

### 5.1.3 Einfluß des IBO-Modells

Bei der Beschreibung der Diskretisierung des Auflastdrucks in Abschnitt 4.1.2 ist darauf hingewiesen worden, daß die Näherung des *inverted barometer ocean* (IBO) verwendet wird. Wie bei den anderen Modellannahmen soll auch der Einfluß dieser Annahme auf die berechneten Werte betrachtet werden. Dazu wird das IBO-Modell aufgegeben und es werden  $u_z$  und  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben berechnet. Für die über dem Meer auftretenden Auflastdruckvariationen bedeutet das, daß sie ungemindert auf den Meeresgrund einwirken. Diese Modellannahme wird auch als *non-inverted barometer ocean* (NIBO) bezeichnet. Abb. 5.6 zeigt, daß für den be-



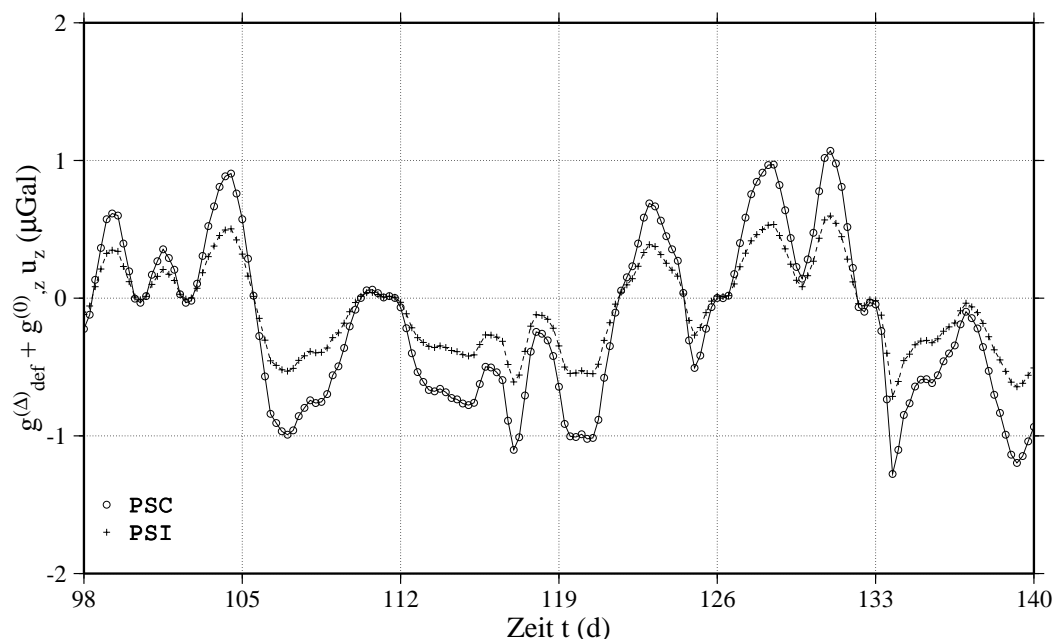


Abbildung 5.5: Summe von Freiluft- und Deformationsbeitrag für Erdmodell PSC und PSI.

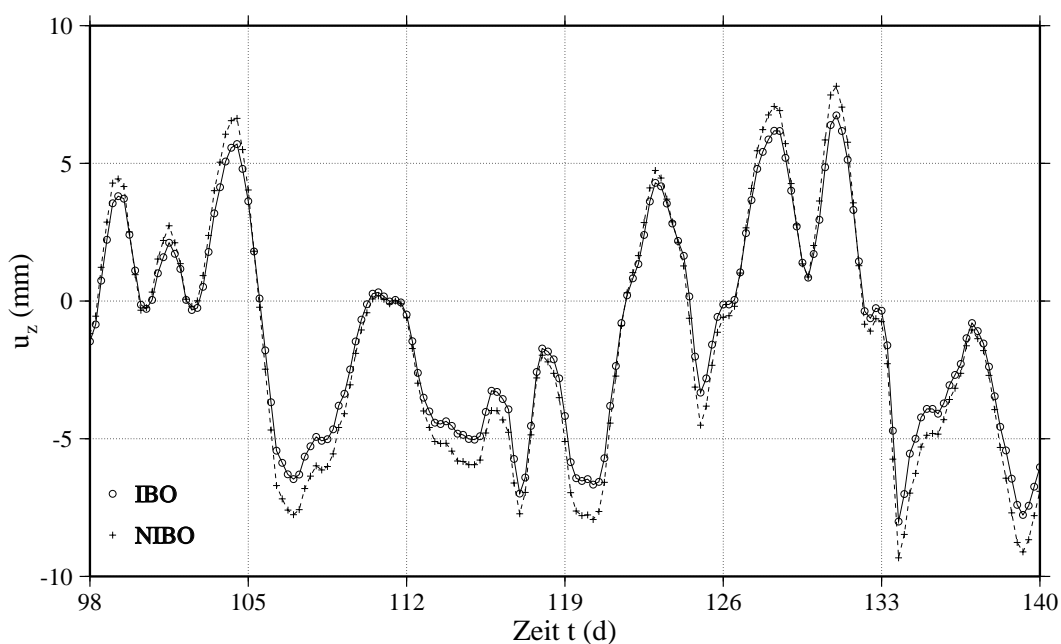


Abbildung 5.6: Oberflächenverschiebung für IBO-Modell und NIBO-Modell.

trachteten Zeitraum von sechs Wochen für  $u_z$  deutliche Abweichungen zu verzeichnen sind, die bis zu 2 mm bzw. ca. 20% des Wertes für das IBO-Modell betragen. Diese Proportionalität läßt sich für die gesamte Zeitreihe beobachten. Ebenso deutliche Abweichungen von maximal  $0.2 \mu\text{Gal}$  zeigt Abb. 5.7 für  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$ . Hier läßt sich wiederum eine Proportionalität erkennen, denn  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  für das NIBO-Modell ist ca. 20% größer als der entsprechende Wert des IBO-Modells. Für die weiteren Berechnungen des Freiluft- und Deformationsbeitrags wird das IBO-Modell benutzt.

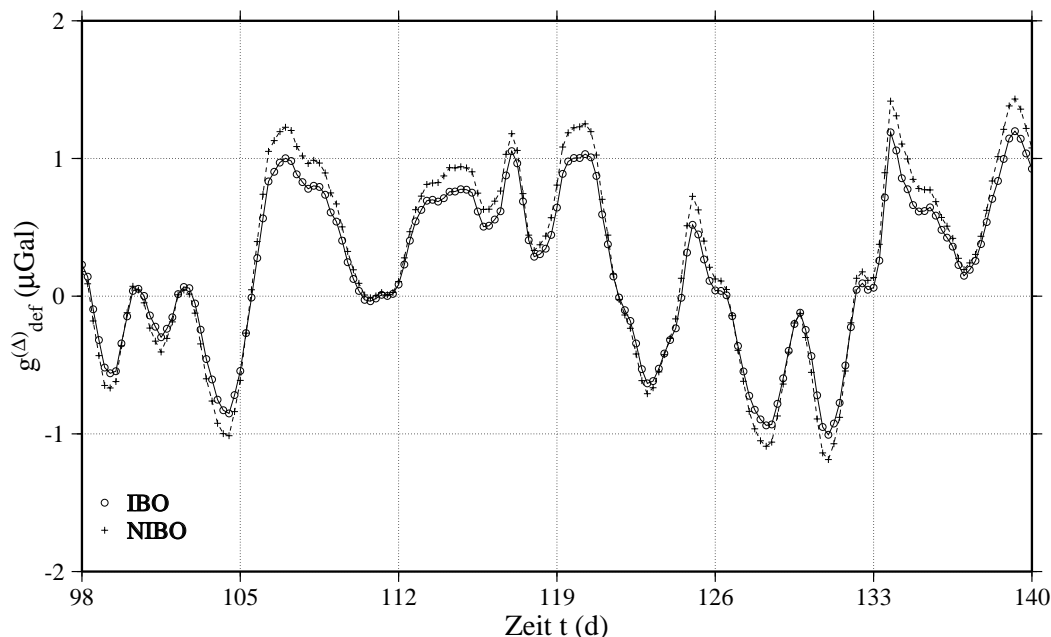


Abbildung 5.7: Deformationsbeitrag für IBO-Modell und NIBO-Modell.

## 5.2 Einfluß der Annahmen zum Atmosphärenmodell

Nachdem die Auswirkungen der Annahmen zum Erdmodell untersucht worden sind, soll nun der Einfluß der Annahmen zum Atmosphärenmodell betrachtet werden. Zuerst wird der Einfluß der Geometrie untersucht, anschließend wird der Einfluß des Dichteprofiles behandelt.

### 5.2.1 Einfluß der Geometrie

Wie schon beschrieben worden ist, ergeben sich für das ebene Atmosphärenmodell Einschränkungen bezüglich des betrachteten Atmosphärenvolumens, auf die im folgenden näher eingegangen wird. Die Beschränkung der Atmosphärenhöhe auf 30 km ist allerdings nicht durch die Verwendung des ebenen Atmosphärenmodells bedingt, sondern durch die geringe Dichte der Atmosphäre über 30 km Höhe. In Abb. 5.8 sind die Luftmassenbeiträge für Atmosphärenhöhen von 25 km, 30 km und 35 km gezeigt. Diese sind für den Gravimeterstandort Potsdam gemäß Kapitel 3 aus den Luftdruck- und Temperaturdaten berechnet. In dem betrachteten sechswöchigen Intervall zeigen nur die Extremwerte erkennbare Unterschiede zwischen den Luftmassenbeiträgen. Diese betragen jedoch lediglich ca.  $0.01 \mu\text{Gal}$ , was für die Modellierung ohne Bedeutung ist. Im folgenden wird eine Atmosphärenhöhe von 30 km Höhe verwendet.

In Abschnitt 3.4 sind die Atmosphärenmodelle eingeführt worden. Insbesondere ist für das ebene Modell der Massenanteil abgeschätzt worden, der unterhalb der Bezugsebene liegt und somit nicht in das Attraktionsintegral eingeht. Abb. 5.9 zeigt den Luftmassenbeitrag für verschiedene Atmosphärenmodelle. In den Extrema variiert  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  für die drei verschiedenen Atmosphärenmodelle um ca.  $2 \mu\text{Gal}$ , wobei die Ergebnisse für das ebene Atmosphärenmodell mit maximalem radialem Abstand von 900 km die größten Extrema aufweisen. Eine Bewertung der

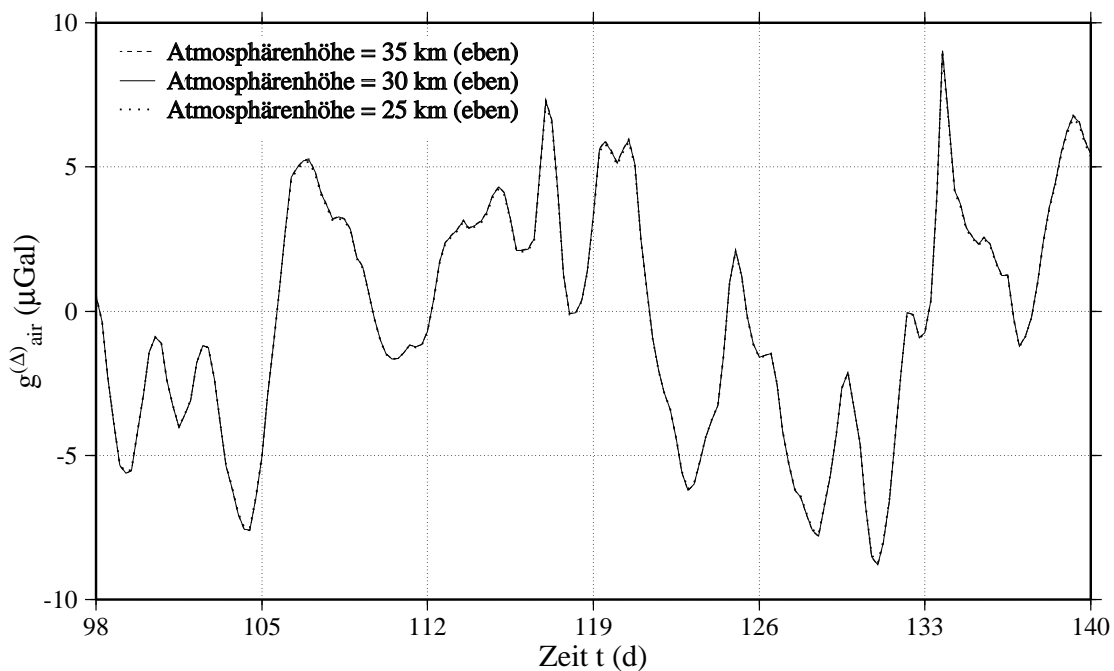


Abbildung 5.8: Luftmassenbeiträge für unterschiedliche Atmosphärenhöhen.

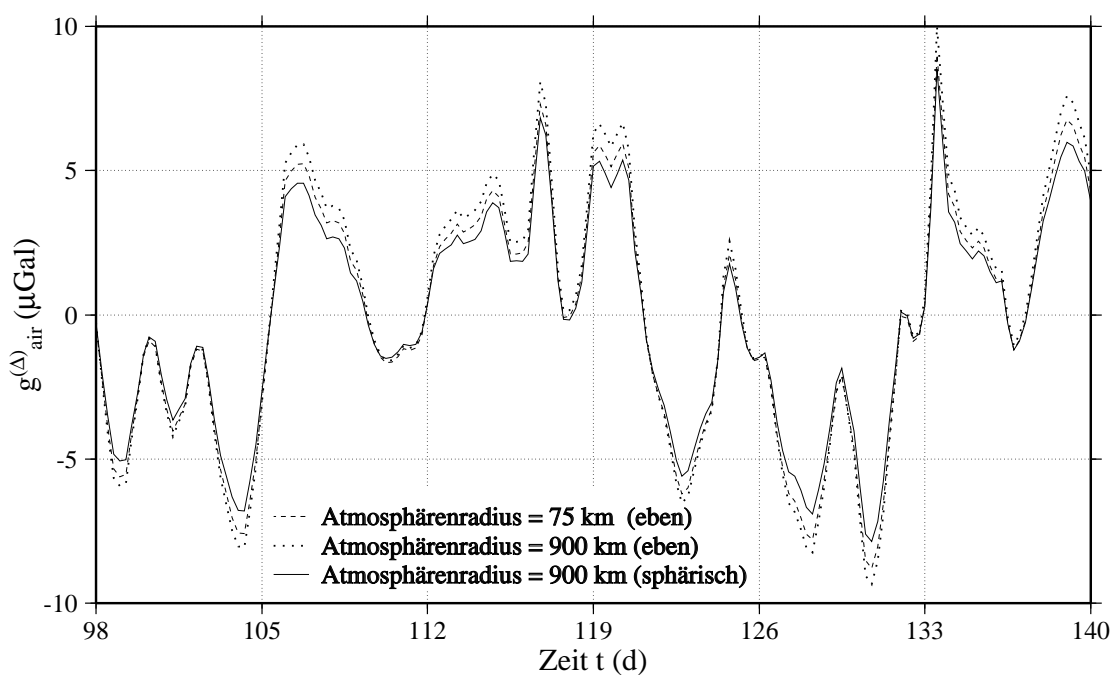


Abbildung 5.9: Luftmassenbeiträge für unterschiedliche Atmosphärengeometrien.

Atmosphärenmodelle ist hier nicht möglich und wird erst in Abschnitt 6.3.1 nach Vergleich der unterschiedlich reduzierten SG-Daten vorgenommen.

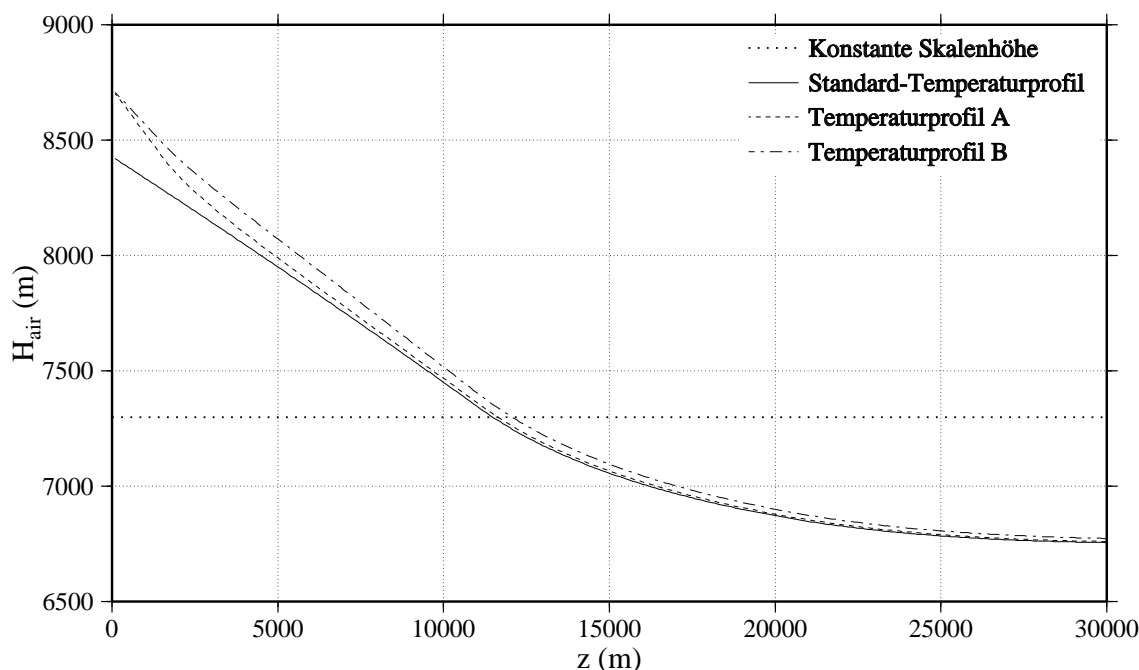


Abbildung 5.10: Höhenabhängigkeit der Skalenhöhen für unterschiedliche Temperaturprofile.

### 5.2.2 Einfluß des Dichteprofls

Bei der Ableitung der Dichteverteilung in der Atmosphäre in Abschnitt 3.2 ist es notwendig gewesen, Annahmen einzuführen, die es gestatten, aus den Oberflächenwerten der Lufttemperatur und des Luftdrucks an den Meßgitterpunkten die Dichteprofile über diesen Punkten zu bestimmen. Hier soll der Einfluß dieser Annahmen auf den Luftmassenbeitrag untersucht werden. Es wird vorausgesetzt, daß sich die Luft wie ein ideales Gas verhält. Wird dann der Luftdruck durch (3.3) und die Dichte durch (3.5) mit Hilfe der barometrischen Höhenformel als Funktion der Höhe  $z$  beschrieben, werden die funktionalen Zusammenhänge durch die  $z$ -abhängige Skalenhöhe beeinflusst. Gemäß (3.4) wird diese wiederum durch die  $z$ -abhängige Temperatur und Schwere bestimmt. Um den Einfluß des Temperaturprofils auf die Skalenhöhe aufzuzeigen, sind in Abb. 5.10 neben der konstanten Skalenhöhe drei höhenabhängige Skalenhöhen dargestellt, bei denen das Standard-Temperaturprofil und zwei modifizierte Temperaturprofile verwendet werden (Abschnitt 3.3.2). Zwischen den mit Hilfe der unterschiedlichen Temperaturprofile berechneten Skalenhöhen ist bis in große Höhen eine deutliche Differenz zu erkennen, obwohl die Temperaturprofile nur bis zu einer Höhe von 1500 m bzw. 9000 m variieren. Hieran wird deutlich, daß der Einfluß des Temperaturprofils auf die Skalenhöhe höher reicht als der Variationsbereich des Temperaturprofils.

Abb. 5.11 zeigt die Dichteprofile für eine konstante Skalenhöhe  $H_{\text{air}} = 7300$  m und für eine höhenabhängige Skalenhöhe, wobei die Dichtewerte mit Hilfe des Standard-Temperaturprofils und gemäß (3.5) berechnet sind. Für beide Dichteprofile werden für den Bodenwert der Lufttemperatur  $\theta_{\text{air}}(0) = 288.15$  K und für den des Luftdrucks  $p_{\text{air}}(0) = 1013$  hPa benutzt. Auffällig ist die größere Dichte bis 11000 m für höhenabhängige Skalenhöhe. In dem darüberliegenden

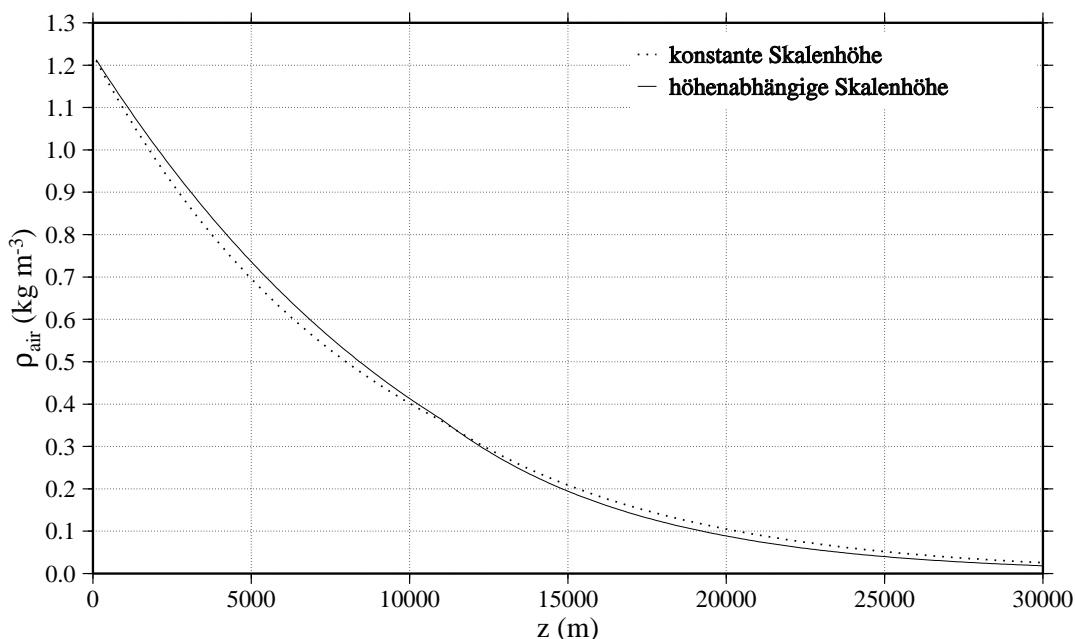


Abbildung 5.11: Höhenabhängigkeit der Dichte für unterschiedliche Skalenhöhen.

Bereich bis 30000 m Höhe sind die Dichtewerte für variable Skalenhöhe dagegen etwas niedriger als für konstante Skalenhöhe.

Im folgenden wird die Auswirkung des verwendeten Temperaturprofils auf das Dichteprofil betrachtet. In Abb. 5.12 werden drei Dichteprofile verglichen, bei denen für die Berechnung nach (3.5) das Standard-Temperaturprofil und Temperaturprofile A und B verwendet werden (Abschnitt 3.3.2). Für alle Dichteprofile wird als Oberflächenwert des Luftdrucks  $p_{\text{air}}(0) = 1013 \text{ hPa}$  verwendet. Das zum Standard-Temperaturprofil gehörige Dichteprofil unterscheidet sich nur im oberflächennahen Bereich bis 1500 m und 2500 m Höhe von dem mit Temperaturprofil A bzw. B berechneten Dichteprofil.

Abb. 5.13 zeigt für einen Ausschnitt der Zeitreihe die mit unterschiedlichen Skalenhöhen und Temperaturprofilen gemäß Abschnitt 5.2.1 für den Gravimeterstandort Potsdam berechneten Luftmassenbeiträge  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$ . Dabei wird bei der Annahme konstanter Skalenhöhe das Standard-Temperaturprofil benutzt, nicht jedoch die Integration in (3.5) ausgeführt. Für die mit den modifizierten Temperaturprofilen berechneten Luftmassenbeiträge werden dagegen die Dichten gemäß (3.5) bestimmt.

Die Differenz zwischen  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  für konstante Skalenhöhe und für das Standard-Temperaturprofil beträgt ca. 100 % der Werte für das Standard-Profil, was die Notwendigkeit der Integration über die Skalenhöhe zeigt. Die Differenz zwischen  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  für das Standard-Temperaturprofil und für Temperaturprofil A beträgt dagegen nur ca. 10 % der Werte für das Standard-Profil. Die entsprechende Abweichung für Temperaturprofil B beträgt ca. 20 %. Die Auswirkungen dieser Abweichungen auf die Reduktion der SG-Daten werden in Abschnitt 6.3.2 untersucht.

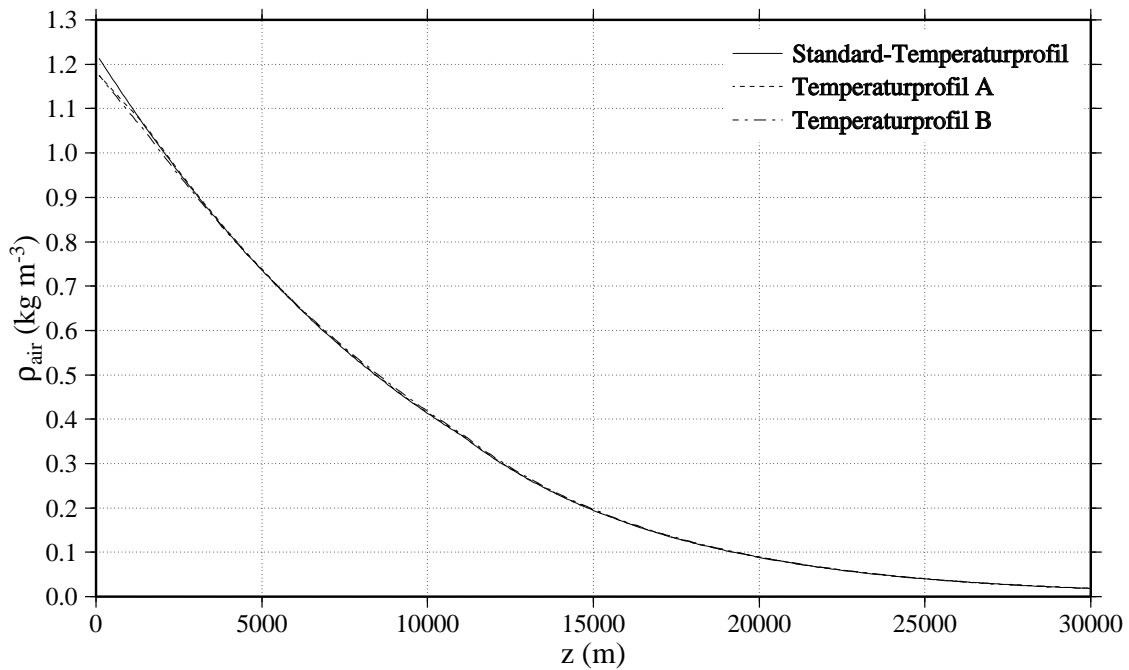


Abbildung 5.12: Höhenabhängigkeit der Dichte für unterschiedliche Temperaturprofile.

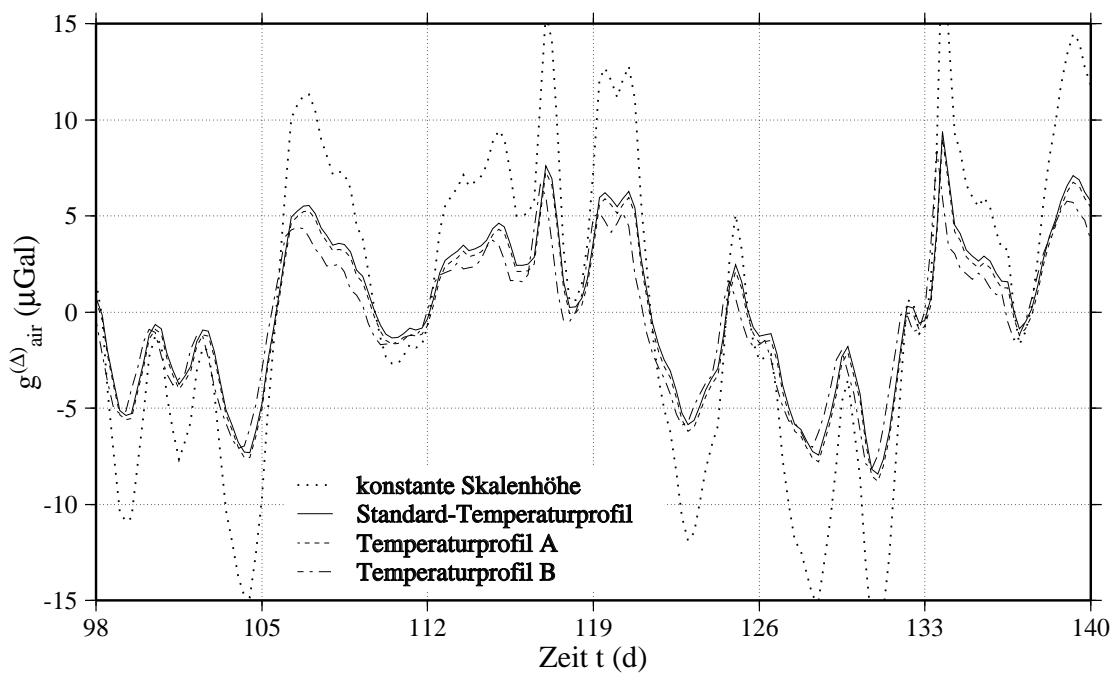


Abbildung 5.13: Luftmassenbeiträge für unterschiedliche Dichteprofile.

## 6. Reduktion der SG-Daten

Zuerst werden Angaben zu den SG-Daten, deren Bearbeitung und dem Gravimeter gemacht (Abschnitt 6.1). Danach werden die Ergebnisse der Reduktion der SG-Daten mit Hilfe der verschiedenen Modelle beschrieben (Abschnitt 6.2), die im Anschluß bewertet und mit alternativen Reduktionsverfahren verglichen werden (Abschnitt 6.3). Abschließend wird eine kurze Zusammenfassung gegeben (Abschnitt 6.4).

### 6.1 Angaben zu den SG-Daten

Die in dieser Arbeit benutzten SG-Daten sind mit dem Supraleit-Gravimeter TT70 am GFZ Potsdam (52.3806°N, 13.0682°E) im Zeitraum vom 01.07.1992 bis 27.03.1995 registriert worden. Das Gravimeter mißt im Fünfskunden-Abstand, wobei die Werte mit Hilfe eines “zero phase shift filter” in Minuten-Werte und diese in Stunden-Werte transformiert werden. Anschließend wird eine Gezeitenreduktion vorgenommen (Neumeyer, 1994; Neumeyer & Dittfeld, 1997). Die meteorologischen Daten des ECMWF stehen dagegen nur als sechsstündliche Zeitreihen zur Verfügung, so daß bei der atmosphärischen Reduktion nur die entsprechenden SG-Daten berücksichtigt werden. Abb. 6.1 zeigt die so bearbeiteten SG-Daten  $g_{SG}^{(\delta)}$  für die gesamte Zeitreihe. Da der Bezugstag der 01.07.1992 ist, liegen die Jahreswechsel bei 184 d, 549 d und 914 d. (In den Abbildungen sind die Jahreswechsel durch vertikale Linien gekennzeichnet.) Auffällig sind die Zunahme der Schwerewerte mit der Zeit und die starke Variation in den Wintermonaten. Außerdem sind zwei Datenlücken (ca. 510 d und 730 d) vorhanden, die auf Störungen bei der Registrierung zurückzuführen sind.

### 6.2 Reduktion der SG-Daten hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags

#### 6.2.1 Zylindrisches Atmosphärenmodell

Zunächst werden die SG-Daten (Abb. 6.1) hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags zum Schwereinkrement,  $g_{atm}^{(\delta)}$ , reduziert, der mit Hilfe des ebenen Atmosphärenmodells berechnet ist. In Abb. 6.2 ist dieser Beitrag für die gesamte Zeitreihe dargestellt. In den Wintermonaten fallen starke Variationen auf, an denen bei Beachtung des unterschiedlichen Vorzeichens eine deutliche Korrelation mit dem Luftdruck zu erkennen ist (vgl. Abb. 4.5).

Gemäß (4.6) setzt sich der atmosphärische Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement aus drei Summanden zusammen. Abb. 6.3 zeigt den dominanten Luftmassenbeitrag  $g_{air}^{(\Delta)}$ . Im Vergleich zu Abb. 6.2 fällt auf, daß sich die beiden Graphen nur durch die etwas geringeren Amplituden

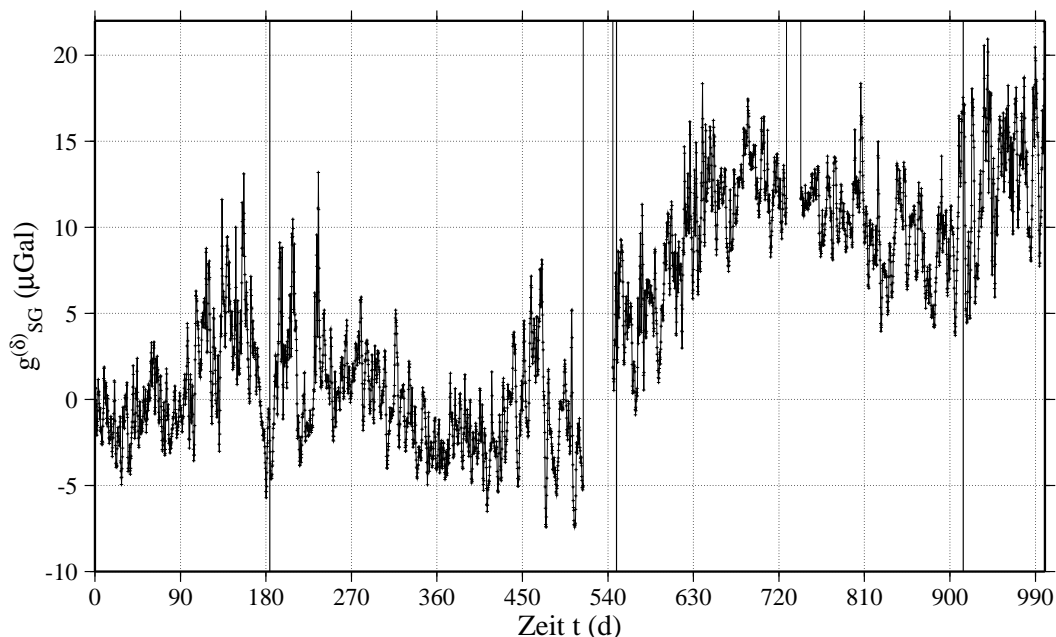


Abbildung 6.1: Zeitreihe der bearbeiteten SG-Daten vom 01.07.1992 bis zum 27.03.1995.

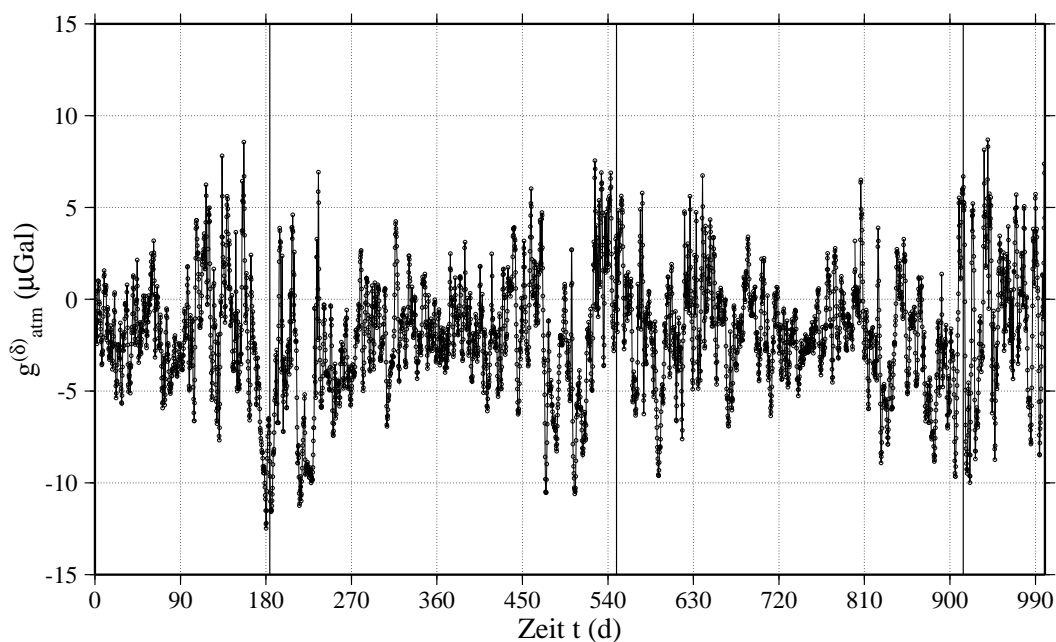


Abbildung 6.2: Atmosphärischer Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement.

des Gesamtbeitrags unterscheiden. In Abb. 6.4 ist der Freiluftbeitrag  $g_{z,z}^{(0)} u_z$  dargestellt, der mit maximalen Amplituden unter  $4 \mu\text{Gal}$  einen wesentlich geringeren Anteil hat. Da der Freiluftbeitrag das entgegengesetzte Vorzeichen des Luftmassenbeitrags aufweist, erklärt sich die geringere Amplitude der Summe der atmosphärischen Beiträge zum Schwereinkrement. Der in Abb. 6.5 gezeigte Deformationsbeitrag  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  stellt den betragsmäßig kleinsten Anteil mit Amplituden unter  $2 \mu\text{Gal}$  dar. Dieser Beitrag hat das umgekehrte Vorzeichen des Freiluftbeitrags.

Abb. 6.6 zeigt das Schwereresiduum nach Reduktion hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags. Wegen der nun wesentlich geringeren Streuung ist ein langperiodisches Signal zu



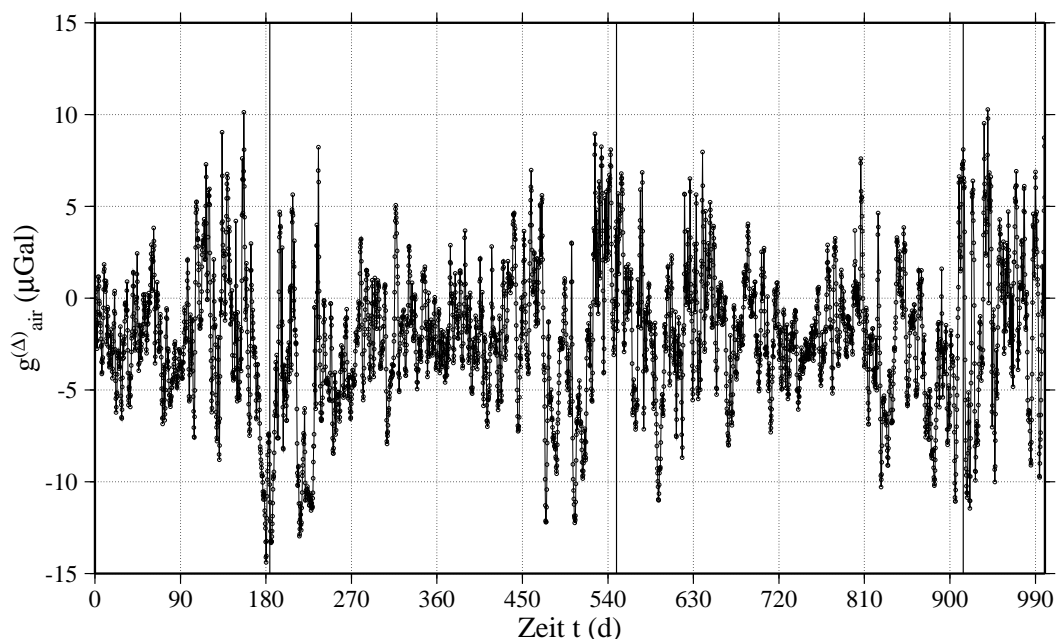


Abbildung 6.3: Luftmassenbeitrag zum Schwereinkrement berechnet mit ebenem Atmosphärenmodell und Temperaturprofil A.

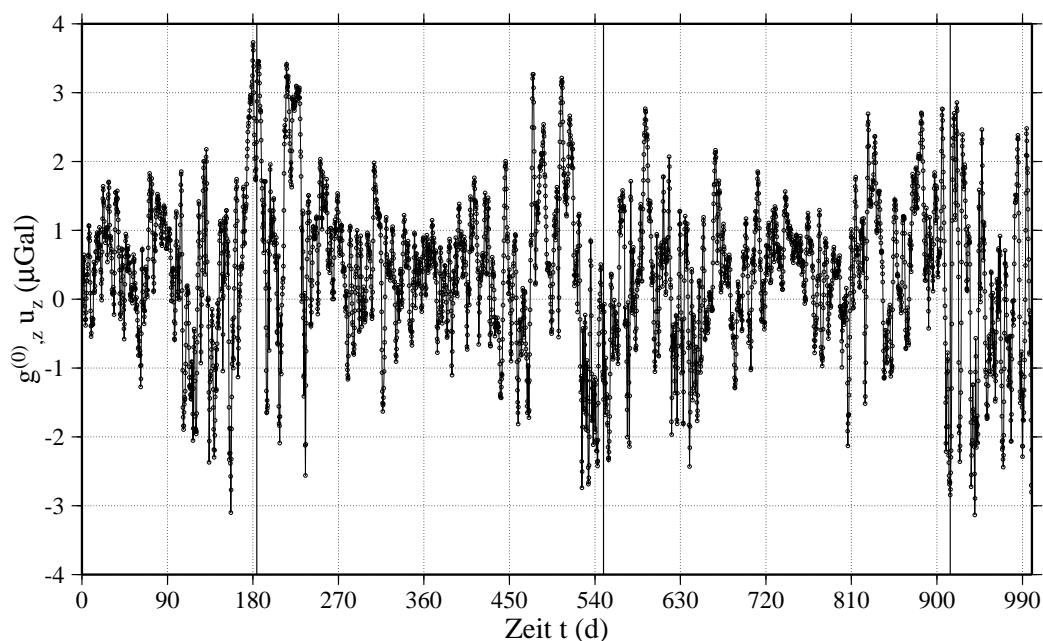


Abbildung 6.4: Freiluftbeitrag zum Schwereinkrement.

erkennen, das einem annähernd linearen Trend überlagert ist. Neumeyer & Dittfeld (1997) zeigen, daß der lineare Trend weitgehend durch die Drift des Gravimeters erklärt werden kann und das langperiodische Signal auf die Polbewegung zurückzuführen ist. Dazu wurde aus Polbewegungsdaten des IERS<sup>1</sup> der Zentrifugalbeitrag für den Gravimeterstandort Potsdam berechnet und dieser mit den hinsichtlich der theoretischen Gerätedrift reduzierten SG-Daten verglichen.

<sup>1</sup> International Earth Rotation Service.

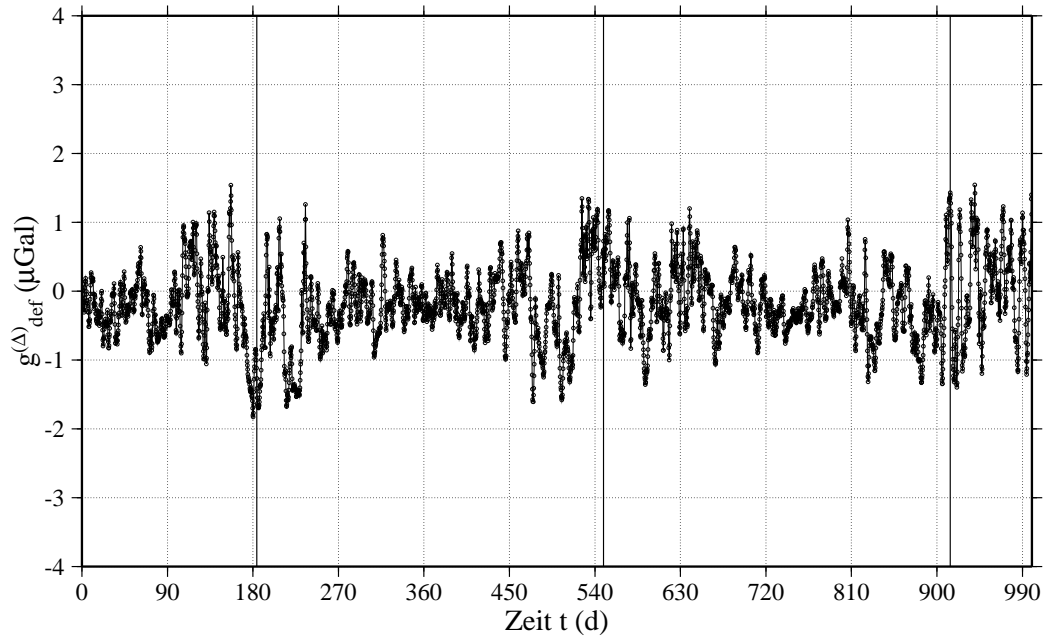


Abbildung 6.5: Deformationsbeitrag zum Schwereinkrement.

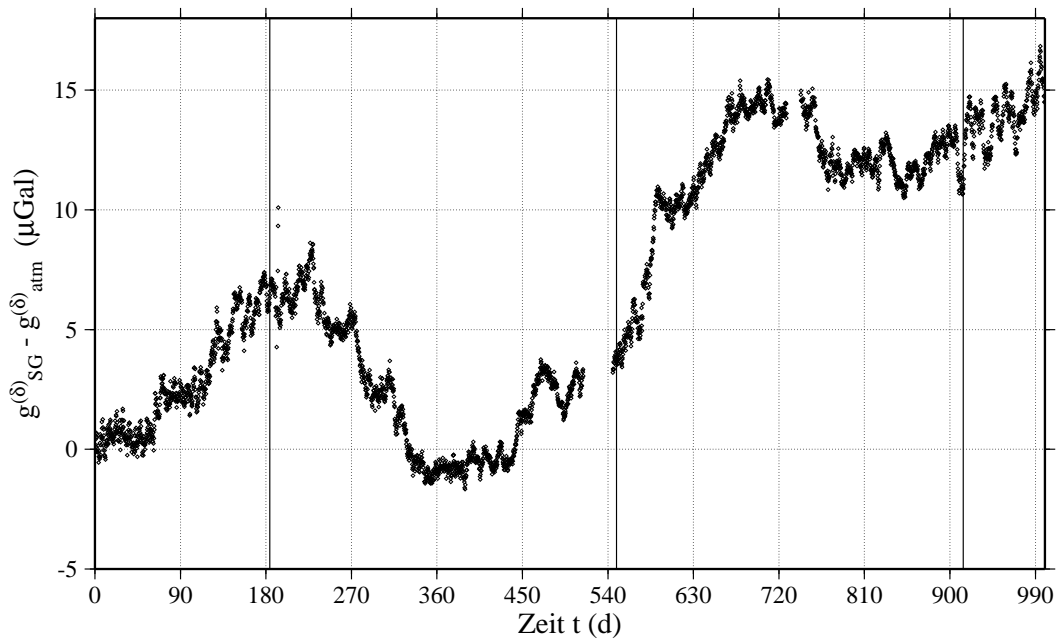


Abbildung 6.6: Schwereresiduum nach Reduktion hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags berechnet mit ebenem Atmosphärenmodell und Temperaturprofil A.

### 6.2.2 Sphärisches Atmosphärenmodell

Nunmehr werden die verschiedenen Beiträge zum Schwereinkrement gezeigt, die sich aus den Lufttemperatur- und Luftdruckdaten für Potsdam für ein sphärisches Atmosphärenmodell ergeben. In Abb. 6.7 ist  $g_{atm}^{(\delta)}$  dargestellt. In den Wintermonaten sind Maxima und Minima von ca.  $7 \mu\text{Gal}$  bzw. ca.  $-10 \mu\text{Gal}$  zu finden; in den Sommermonaten liegen die Werte dagegen im Bereich von  $\pm 5 \mu\text{Gal}$ .

Abb. 6.8 zeigt die im Vergleich zu Abb. 6.7 größeren Maxima (ca.  $9 \mu\text{Gal}$ ) und kleineren

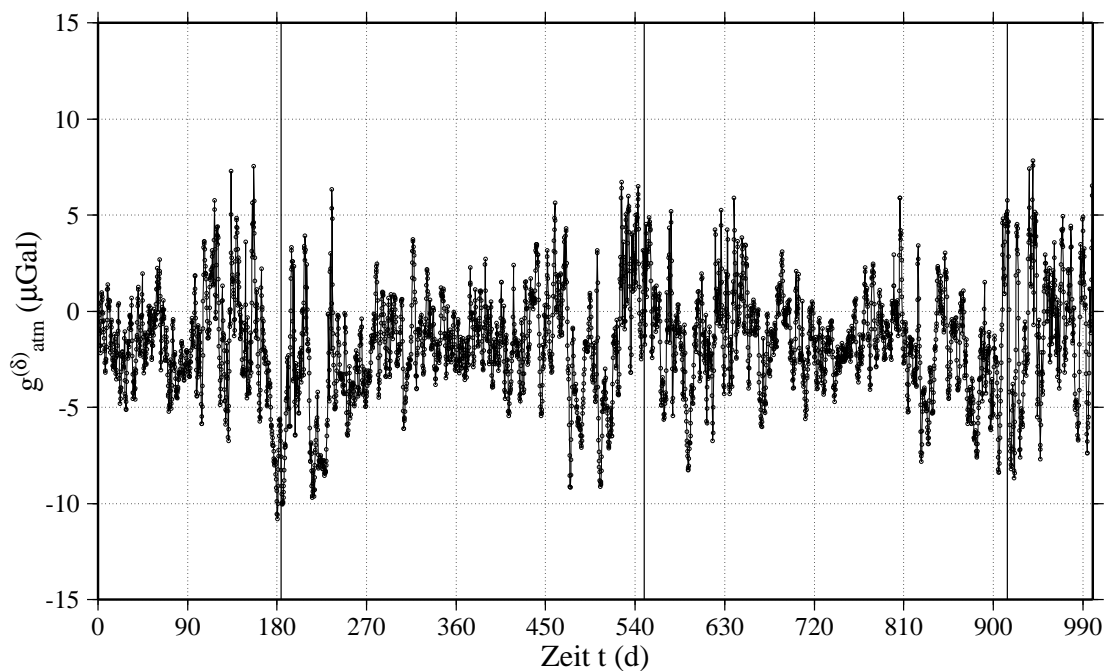


Abbildung 6.7: Atmosphärischer Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement.

Minima (ca.  $-12 \mu\text{Gal}$ ) des Luftmassenbeitrags  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$ . Der Freiluftbeitrag  $g_{,z}^{(0)}u_z$  und der Deformationsbeitrag  $g_{\text{def}}^{(\Delta)}$  werden nicht durch die Wahl der Atmosphärenmodellgeometrie beeinflusst, so daß sich hier die gleichen Werte wie in Abb. 6.4 und 6.5 ergeben.

Abb. 6.9 zeigt das Schwereresiduum nach Reduktion hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags für das sphärische Atmosphärenmodell. Beim Vergleich mit Abb. 6.6 fällt auf, daß das Schwereresiduum nach Reduktion mittels des sphärischen Atmosphärenmodells eine geringere Streuung als nach der Reduktion mittels des ebenen Atmosphärenmodells aufweist.

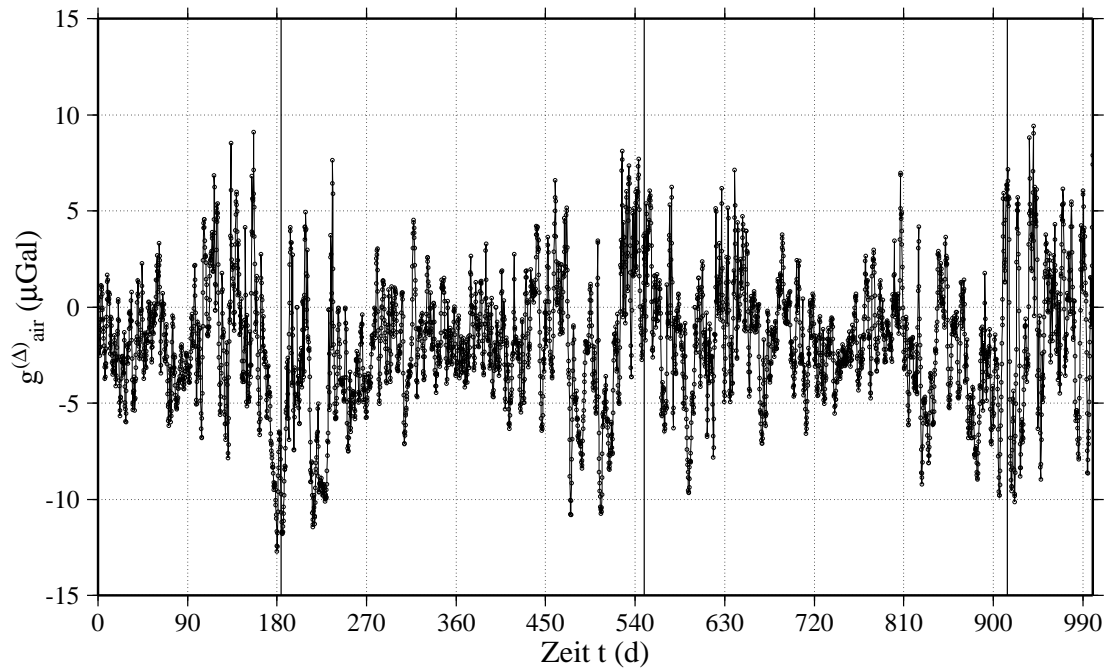


Abbildung 6.8: Luftmassenbeitrag zum Schwereinkrement berechnet mit sphärischem Atmosphärenmodell und Temperaturprofil A.

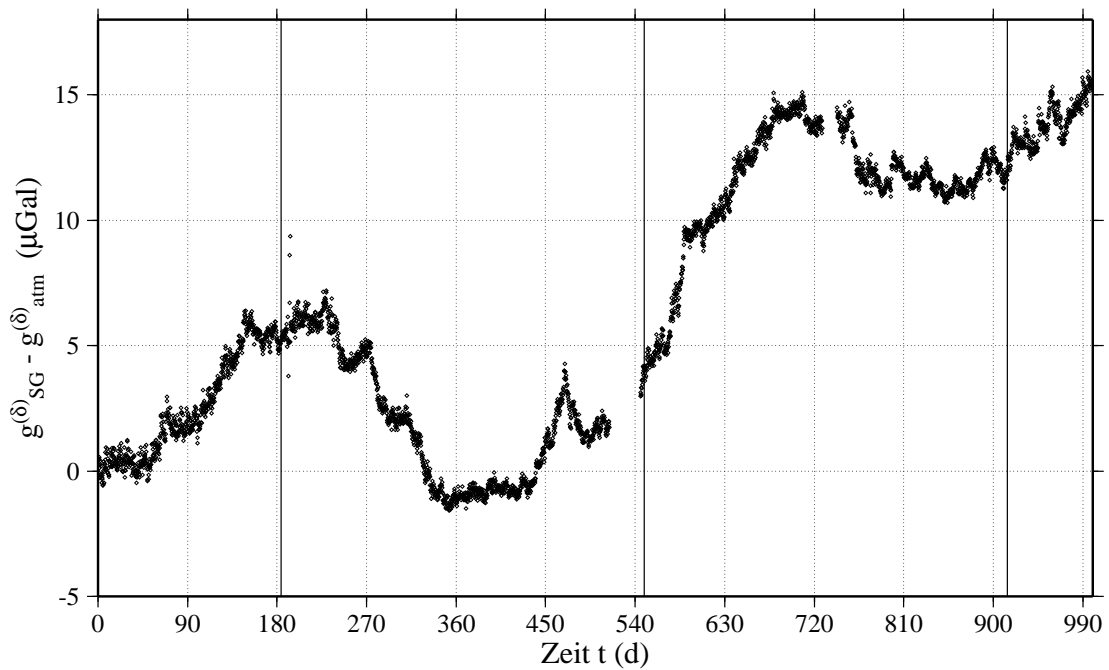


Abbildung 6.9: Schwereresiduum nach Reduktion hinsichtlich des atmosphärischen Gesamtbeitrags berechnet mit sphärischem Atmosphärenmodell und Temperaturprofil A.

### 6.3 Bewertung der Reduktion der SG-Daten

Die Bewertung der in Abschnitt 6.2 gezeigten Ergebnisse wird in zwei Schritten vorgenommen. Zuerst werden die mit Hilfe der unterschiedlichen Atmosphärenmodelle reduzierten SG-Daten daraufhin untersucht, in welchem Umfang eine Reduktion des Atmosphäreinflusses gelingt (Abschnitt 6.3.1). Danach werden diese Ergebnisse mit denen alternativer Reduktionsverfahren verglichen (Abschnitt 6.3.2).

#### 6.3.1 Vergleich der unterschiedlichen Atmosphärenmodelle

Zur Bewertung der Reduktion der SG-Daten hinsichtlich des Atmosphäreinflusses wird folgende Methode herangezogen: Für die reduzierten SG-Daten ( $g_{SG}^{(\delta)} - g_{atm}^{(\delta)}$ ) wird mit einem zehntägigen Zeitfenster das gleitende Mittel und die jeweilige Differenz zum aktuellen Wert berechnet. Als Maß für die Streuung der Differenzen wird die Standardabweichung  $\sigma$  verwendet. Abb. 6.10 zeigt die reduzierten SG-Daten für das ebene Atmosphärenmodell (Abschnitt 6.2.1), das gleitende Mittel und die Differenz zwischen den Zeitreihen. Für die Differenz ergibt sich eine Standardabweichung von  $\sigma = 0.438$ . Weiterhin ist zu erkennen, daß eine zeitliche Variation in der Differenz vorhanden ist. Die größten Beiträge sind in der Nähe der Jahreswechsel (184 d, 549 d, 914 d) zu finden.

In Abb. 6.11 sind die reduzierten SG-Daten für das sphärische Atmosphärenmodell dargestellt. Zusätzlich gezeigt sind das gleitende Mittel und die Differenz zwischen den Zeitreihen. Im Vergleich zu Abb. 6.10 ist die Streuung verringert, was sich in der verminderten Standardabweichung von  $\sigma = 0.348$  zeigt. Daneben fällt auf, daß die Differenzen in Abb. 6.11 über lange

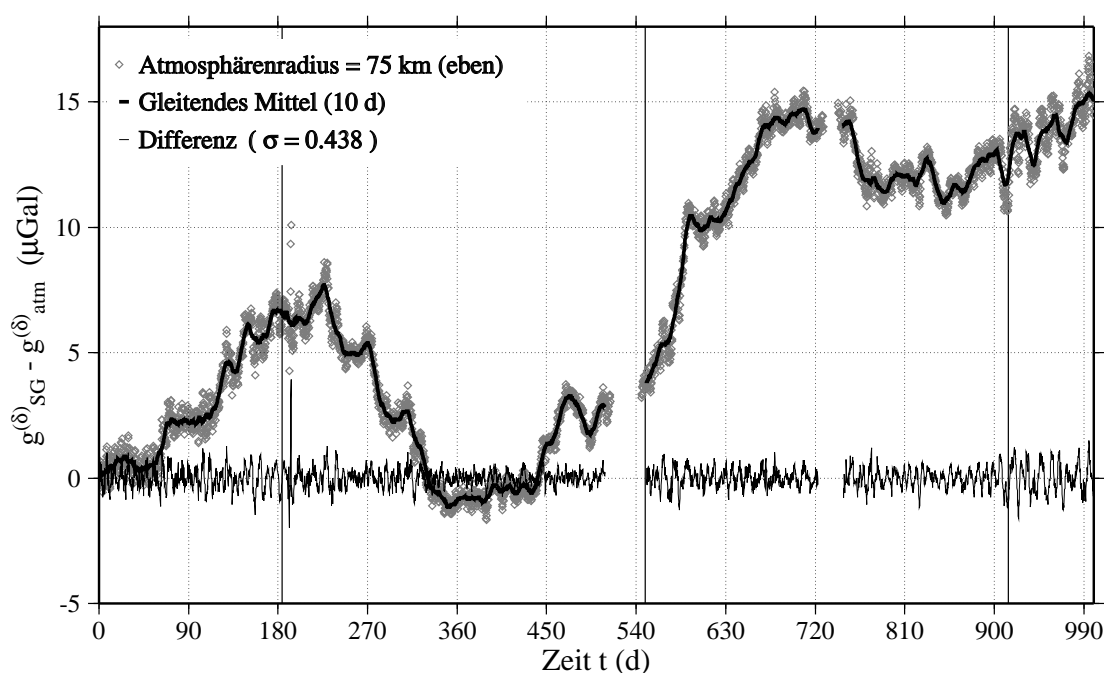


Abbildung 6.10: Schwereresiduum für das ebene Atmosphärenmodell mit Temperaturprofil A, gleitendes Mittel und Differenz zwischen den Zeitreihen.

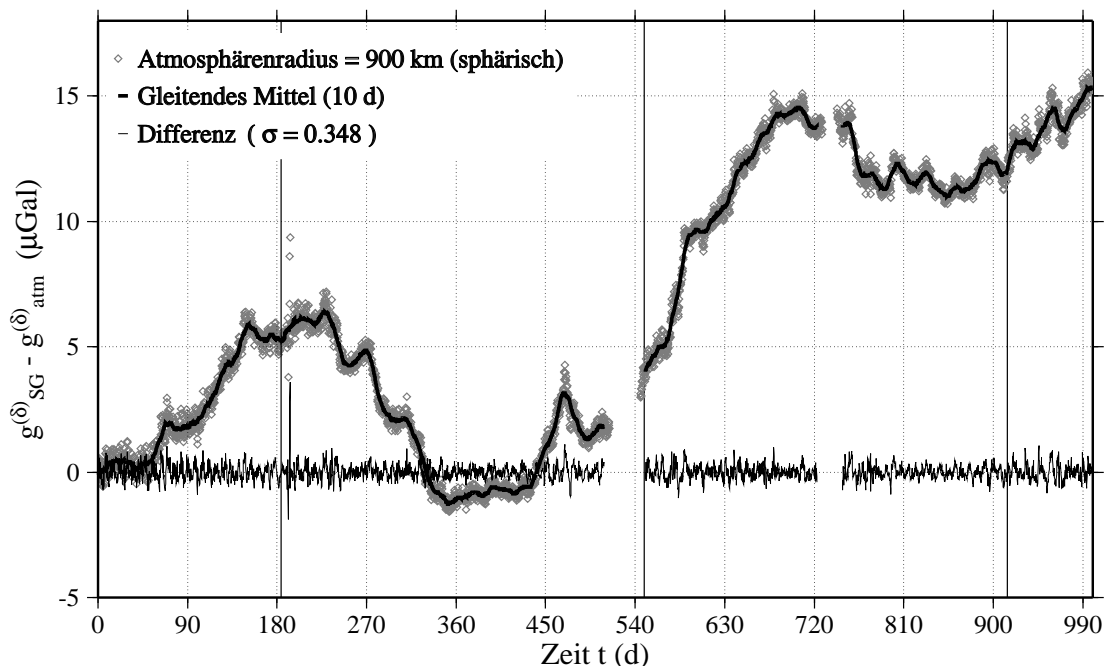


Abbildung 6.11: Schwerkraftresiduum für das sphärische Atmosphärenmodell mit Temperaturprofil A, gleitendes Mittel und Differenz zwischen den Zeitreihen.

Zeitintervalle ähnliche Beiträge aufweisen. Deutliche saisonale Variationen wie in Abb. 6.10 sind nicht mehr zu erkennen. Dies und die kleinere Standardabweichung weisen auf eine vollständigere Reduktion des Atmosphäreinflusses bei der Verwendung des sphärischen Atmosphärenmodells hin.

### 6.3.2 Vergleich mit anderen Reduktionsverfahren

Zuerst werden zum Vergleich die von Neumeyer *et al.* (1998) reduzierte SG-Daten herangezogen. Zur Modellierung des Luftmassenbeitrags wurden Greensche Funktionen und dieselben meteorologischen Daten wie in dieser Arbeit verwendet. Weiterhin wurde ein sphärisches Atmosphärenmodell benutzt, das sich über das gesamte Meßgitter (Abb. 1.2) erstreckt. Für die Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags wurde ein inkompressibler elastischer Halbraum mit konstanter Dichte  $\rho = 3380 \text{ kg m}^{-3}$  verwendet. Der Schermodul  $\mu$  wurde in fünf Schichten parametrisiert, wobei die Werte im Vergleich zum PREM-Erdmodell um 30 % erniedrigt wurden. Hiermit sollte die Kompressibilität simuliert werden. Weiterhin wurde das IBO-Modell benutzt. Abb. 6.12 zeigt die mit diesem Modell reduzierten SG-Daten. Wiederum sind das gleitende Mittel, die Differenz zwischen diesem und den reduzierten SG-Daten und die Standardabweichung berechnet worden. Mit  $\sigma = 0.400$  liegt die Standardabweichung zwischen denen der in Abschnitt 6.3.1 verwendeten Atmosphärenmodelle. Zwar ist der Wert um 8 % niedriger als der in Abb. 6.10, jedoch ist weiterhin eine saisonale Variation der Differenz zu erkennen. Dies weist darauf hin, daß die Reduktion des Atmosphäreinflusses geringer ist als beim hier betrachteten Modell mit sphärischer Atmosphäre.

Die Einschränkung auf radiale Abstände von höchstens 75 km vom Gravimeterstandort beim

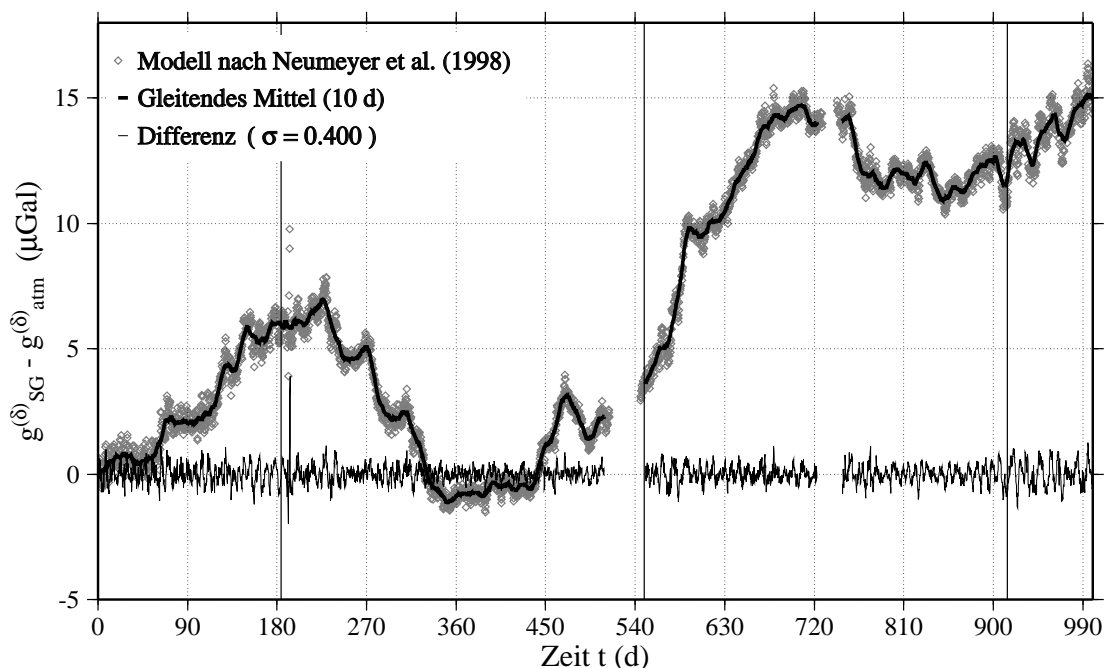


Abbildung 6.12: Schwereresiduum für das Modell nach Neumeyer *et al.* (1998), gleitendes Mittel und Differenz zwischen den Zeitreihen.

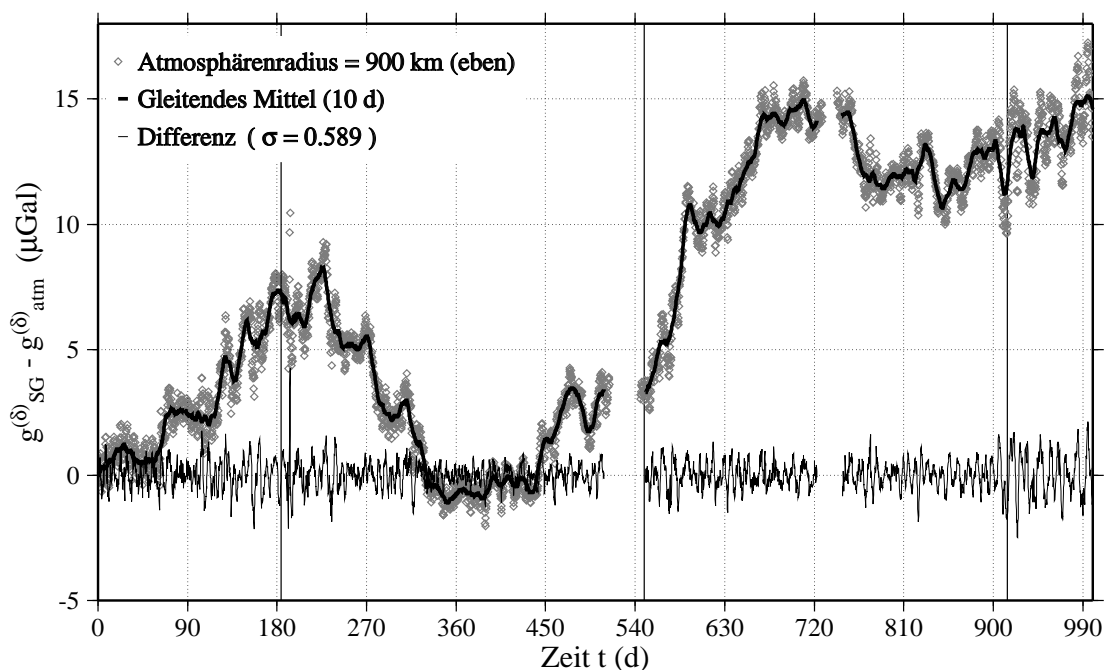


Abbildung 6.13: Schwereresiduum für das ebene Atmosphärenmodell mit Temperaturprofil A, gleitendes Mittel und Differenz zwischen den Zeitreihen.

ebenen Atmosphärenmodell ist in Abschnitt 3.4.1 begründet worden. Dort sind Abschätzungen für die nicht korrekt berücksichtigten Massenanteile der Atmosphäre vorgenommen worden. Deren Auswirkung auf die reduzierten SG-Daten soll untersucht werden, indem das ebene Atmosphärenmodell mit einem maximalen Radius von 900 km verwendet wird. In Abb. 6.13 sind die entsprechenden reduzierten SG-Daten, gleitende Mittel und die Differenz gezeigt. Die Standardabweichung liegt mit  $\sigma = 0.589$  deutlich über denen der anderen Modelle. Daneben fällt die

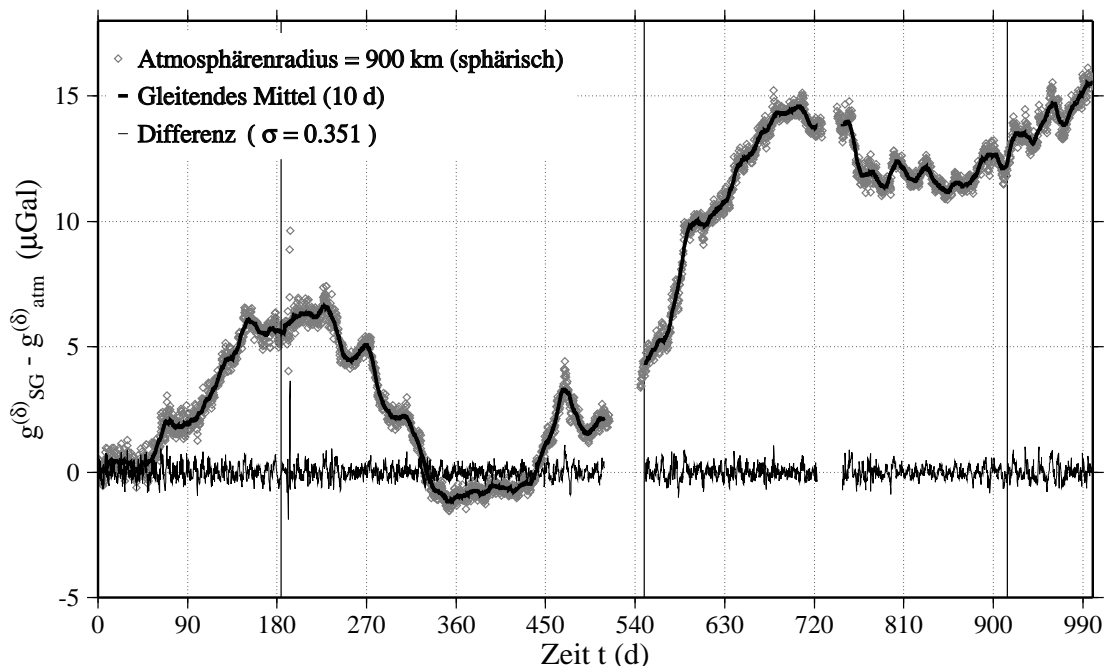


Abbildung 6.14: Schwereresiduum für das sphärische Atmosphärenmodell mit Temperaturprofil B, gleitendes Mittel und Differenz zwischen den Zeitreihen.

Variation zwischen den Winter- und Sommermonaten auf. Dies zeigt, daß die Vergrößerung des maximalen Radius auf 900 km für das ebene Atmosphärenmodell im Gegensatz zum sphärischen Modell keine Verbesserung darstellt.

Zuletzt soll Temperaturprofil B verwendet und bewertet werden. Wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, wird für das sphärische Atmosphärenmodell u. a. die Berechnung des Temperaturprofils mit Hilfe zweier Temperaturgradienten durchgeführt. Dabei beeinflusst der Lufttemperaturwert an der Oberfläche direkt die Temperaturwerte bis in 1500 m Höhe und indirekt über die gleitenden Mittel bis in 9000 m Höhe. Abb. 6.14 zeigt die mit diesem Modell reduzierten SG-Daten, das gleitende Mittel und die Differenz zwischen den Zeitreihen. Im Vergleich zu Abb. 6.11 ist die Standardabweichung mit  $\sigma = 0.351$  geringfügig größer. Hieran ist der geringe Einfluß des Temperaturprofils auf den atmosphärischen Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement zu erkennen.

## 6.4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit ist zur Reduktion der Atmosphäreneinflüsse auf SG-Daten das Modell eines ebenen, geschichteten, elastischen Halbraums für die Erde und einer ebenen, geschichteten Atmosphäre entwickelt worden. Aus den in Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Gründen mußte dieses Atmosphärenmodell auf radiale Abstände von 75 km beschränkt werden. Als Alternative ist ein sphärisches Atmosphärenmodell entwickelt worden, das dieser Einschränkung nicht unterliegt.

Der Vergleich der Schwereresiduen nach Reduktion mit Hilfe unterschiedlicher Modelle (Abschnitt 6.3) hat gezeigt, daß mit dem sphärischen Atmosphärenmodell die vollständigste Reduktion erreicht wird. Außerdem konnte gezeigt werden, daß beim ebenen Atmosphärenmodell die



Vergrößerung des maximalen radialen Abstandes auf 900 km keine Verbesserung der Reduktion bewirkt.

Eine wesentliche Verbesserung ist dagegen mit dem sphärische Atmosphärenmodell erzielt worden (Verminderung der Streuung um ca. 20 %). Weitere Verbesserungen, z. B. Dichteprofile für verbesserte Temperaturprofile bzw. unter Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit, können die Modellierung des atmosphärischen Beitrags zum Schwereinkrement nur unwesentlich verbessern. Dies konnte in Abschnitt 6.3.2 gezeigt werden, wo sich die Standardabweichung bei Verwendung eines modifizierten Temperaturprofils nur um ca. 1 % verändert hat.

## Literaturverzeichnis

- Amelung, F. & Wolf, D., 1994. Viscoelastic perturbation of the earth: significance of the incremental gravitational force in models of glacial isostasy. *Geophys. J. Int.*, **117**, 864–879.
- Bower, D. & Courtier, N., 1998. Precipitation effects on gravity measurements at the Canadian absolute gravity site. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **106**, 353–369.
- Boy, J.-P. & Hinderer, J., 1999. Atmospheric pressure effects on gravity: local versus global corrections. *Bull. Inf. Marées Terr.*, **131**, 10113–10121.
- Bronstein, I. & Semendjajew, K., 1997. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun.
- Dziewonski, A. & Anderson, D., 1981. Preliminary reference earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**, 297–356.
- Gantmacher, F., 1958. *Matrizenrechnung I*. Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin.
- Gilbert, F. & Backus, G., 1966. Propagator matrices in elastic waves and vibration problems. *Geophysics*, **31**, 326–332.
- Kroner, C. & Jentzsch, G., 1997. Methods of air pressure reduction tested on Potsdam station. *Bull. Inf. Marées Terr.*, **127**, 9834–9842.
- Kroner, C. & Jentzsch, G., 1998. Comparison of air pressure reducing methods and discussion of other influences on gravity. In *Proceedings of the 13th International Symposium on Earth Tides*, S. 423–430, Brussels. Observatoire Royal de Belgique.
- Kroner, C. & Jentzsch, G., 1999. Comparison of different barometric pressure reductions for gravity data and resulting consequences. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **115**, 205–218.
- Lambert, A., Pagiatakis, S.D., Billyard, A. & Dragert, H., 1998. Improved ocean tide loading corrections for gravity and displacement: Canada and northern United States. *J. Geophys. Res.*, **103**, 30231–30244.
- Lorenz, F., 1992. *Lineare Algebra I*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Merriam, J., 1992. Atmospheric pressure and gravity. *Geophys. J. Int.*, **109**, 488–500.
- Müller, T. & Zürn, W., 1983. Observation of gravity changes during the passage of cold fronts. *J. Geophys.*, **53**, 155–162.
- Neumeyer, J., 1994. Acquisition, preprocessing and evaluation of GFZ Potsdam SG Data. *Bull. Inf. Marées Terr.*, **120**, 8938–8945.
- Neumeyer, J., 1995. Frequency dependent atmospheric pressure correction on gravity variations by means of cross spectral analysis. *Bull. Inf. Marées Terr.*, **122**, 9212–9220.
- Neumeyer, J. & Dittfeld, H.-J., 1997. Results of three year observation with a superconducting gravimeter at the GeoForschungsZentrum Potsdam. *J. Geod.*, **71**, 97–102.
- Neumeyer, J., Barthelmes, F. & Wolf, D., 1998. Atmospheric pressure correction for gravity data using different methods. In *Proceedings of the 13th International Symposium on Earth*

- Tides*, S. 431–438, Brussels. Observatoire Royal de Belgique.
- Neumeyer, J., Barthelmes, F. & Wolf, D., 1999. Estimates of environmental effects in superconducting gravimeter data. *Bull. Inf. Marées Terr.*, **131**, 10153–10159.
- Niebauer, T., 1988. Correcting gravity measurements for the effects of local air pressure. *J. Geophys. Res.*, **93**, 7989–7991.
- NOAA, 1976. *U.S. Standard Atmosphere 1976*. NOAA, NASA, USAF, Washington.
- Rabbel, W. & Zschau, J., 1985. Static deformation and gravity changes at the earth's surface due to atmospheric loading. *J. Geophys.*, **56**, 81–99.
- Sneddon, I., 1995. *Fourier Transforms*. Dover Publications, New York.
- Spratt, R., 1982. Modelling the effect of atmospheric pressure variations on gravity. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **71**, 173–186.
- Sun, H.-P., 1995. *Static Deformation and Gravity Changes of the Earth's Surface due to the Atmospheric Pressure*. Doctoral thesis, Observatoire Royal de Belgique, Brussels.
- Sun, H.-S., Ducarme, B. & Dehant, V., 1995. Effect of the atmospheric pressure on surface displacements. *J. Geod.*, **70**, 131–139.
- Thoma, M. & Wolf, D., 1999. Bestimmung der Mantelviskosität aus Beobachtungen der Landhebung und Schwere in Fennoskandien. *Sci. Techn. Rep. GFZ Potsdam*, **STR 99/02**.
- Werner, J., 1992. *Numerische Mathematik I*. Vieweg, Braunschweig.
- Wieczerkowski, K., 1999. Gravito-Viskoelastodynamik für verallgemeinerte Rheologien mit Anwendungen auf den Jupitermond Io und die Erde. *Veröff. Dt. Geod. Komm., Reihe C*, **515**.
- Wolf, D., 1984. The relaxation of spherical and flat Maxwell earth models and effects due to the presence of the lithosphere. *J. Geophys.*, **56**, 24–33.
- Wolf, D., 1985a. The normal modes of a layered, incompressible Maxwell half-space. *J. Geophys.*, **57**, 106–107.
- Wolf, D., 1985b. The normal modes of a uniform, compressible Maxwell half-space. *J. Geophys.*, **56**, 100–105.
- Wolf, D., 1986. Glacial-isostatic adjustment in Fennoscandia revisited. *J. Geophys.*, **59**, 42–48.
- Wolf, D., 1987. An upper bound on lithosphere thickness from glacio-isostatic adjustment in Fennoscandia. *J. Geophys.*, **61**, 141–149.
- Wolf, D., 1997. Gravitational viscoelastodynamics for a hydrostatic planet. *Veröff. Dt. Geod. Komm., Reihe C*, **452**.
- Wolf, D., o.J. Notizen zur Kontinuumsmechanik. Unveröffentlichtes Manuskript.

## A. Ergänzungen zu Kapitel 2

In Anhang A werden die Ableitungen verschiedener Gleichungen aus Kapitel 2 ausführlich dargestellt. Ausgangspunkt sind die von Wolf (1997) entnommenen Gleichungen, die auf den in Abschnitt 2.1.2 betrachteten Fall vereinfacht werden.

### A.1 Ableitung der Feldgleichungen im Referenzzustand

Ausgangspunkt für die Ableitung von (2.23) ist die Materialgleichung (2.15). Weiterhin werden die Definition des mechanischen Drucks:

$$p := -\frac{1}{3}t_{ii} \quad (\text{A.1})$$

sowie die Beziehung für die Verzerrung im Referenzzustand:

$$e_{ij}^{(0)} = 0 \quad (\text{A.2})$$

benötigt. Zur Herleitung dieser Beziehung muß die Definition der Verzerrung betrachtet werden (Wolf, o. J., S. 13):

$$e_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (\text{A.3})$$

Nach (2.3) gilt

$$u_i = r_i - X_i, \quad (\text{A.4})$$

und somit folgt mit der Definition (A.3) im Referenzzustand

$$e_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2}(r_{i,j}^{(0)} - X_{i,j} + r_{j,i}^{(0)} - X_{j,i}). \quad (\text{A.5})$$

Wie in Abschnitt 2.2.2 angegeben gilt im Referenzzustand

$$r_{i,j}^{(0)} = X_{i,j} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

und damit folgt

$$e_{ij}^{(0)} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Mit (A.7) ergibt sich für (2.15) bei Berücksichtigung von (A.1)

$$t_{ij}^{(0)} = -p^{(0)}\delta_{ij}. \quad (\text{A.8})$$

Für die Bewegungsgleichung folgt mit (2.16) und (A.1) Gleichung (2.24). Die Potentialgleichung (2.17) wird durch  $j = 1$  und (A.6) vereinfacht, und es ergibt sich (2.26). Ebenfalls mit (A.6) folgt die Schweredefinition (2.27) aus (2.18).

## A.2 Ableitung der inkrementiellen Feldgleichungen in materieller Form

Grundlage für die Zerlegung in Referenzfelder und inkrementiellen Felder ist die störungstheoretische Betrachtung der Feldgleichungen, wie sie von Wolf (1997, Abschnitt 2.3) und Wierczkowski (1999, Abschnitt 2.2) beschrieben wird. Entsprechend (2.10) gilt für die in Referenzfeld und materielles Inkrement aufgespaltenen Größen:

$$t_{ij} = t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(\delta)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \tau_{ij}^{(\delta)}, \quad (\text{A.10})$$

$$g_i = g_i^{(0)} + g_i^{(\delta)}, \quad (\text{A.11})$$

$$j = j^{(0)} + j^{(\delta)}. \quad (\text{A.12})$$

Damit lassen sich aus den Totalfeldern die entsprechenden inkrementiellen Gleichungen in *materieller* Form ableiten. Dazu wird noch die entsprechende Zerlegung der Jacobi-Determinante und des Zusammenhangs zwischen Cauchy- und Piola-Kirchhoff-Spannung benötigt. Für die Jacobi-Determinante gilt

$$\begin{aligned} j &= j^{(0)} + j^{(\delta)} \\ &= 1 + j^{(\delta)} \\ &= \det [(\delta_{ij} + u_{i,j})], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

und es folgt

$$j^{(\delta)} = u_{i,i}. \quad (\text{A.14})$$

Aus dem Zusammenhang (2.16) zwischen den beiden Spannungen läßt sich ableiten<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (X_i + u_i)_{,k}(\tau_{jk}^{(0)} + \tau_{jk}^{(\delta)}) &= (1 + j^{(\delta)})(t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(\delta)}), \\ (X_i + u_i)_{,k}(\tau_{jk}^{(0)} + \tau_{jk}^{(\delta)}) &= (1 + j^{(\delta)})(-p^{(0)}\delta_{ij} + t_{ij}^{(\delta)}), \\ \Rightarrow -p^{(0)}\delta_{ij} + \tau_{ji}^{(\delta)} - p^{(0)}u_{i,j} &= -p^{(0)}\delta_{ij} + t_{ij}^{(\delta)} - p^{(0)}\delta_{ij}u_{k,k}, \\ \tau_{ji}^{(\delta)} &= t_{ij}^{(\delta)} + p^{(0)}(u_{i,j} - \delta_{ij}u_{k,k}), \\ \tau_{ij}^{(\delta)} &= t_{ij}^{(\delta)} + p^{(0)}(u_{j,i} - \delta_{ij}u_{k,k}). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Aus (2.12) ergibt sich nach Berücksichtigung von (A.9)–(A.14)

$$\begin{aligned} (\tau_{ij}^{(0)} + \tau_{ij}^{(\delta)})_{,j} + \rho^{(0)}(g_i^{(0)} + g_i^{(\delta)}) &= 0, \\ (-p^{(0)}\delta_{ij} + \tau_{ij}^{(\delta)})_{,j} + \rho^{(0)}(g_i^{(0)} + g_i^{(\delta)}) &= 0, \\ -p_{,i}^{(0)} + \tau_{i,j}^{(\delta)} + \rho^{(0)}g_i^{(0)} + \rho^{(0)}g_i^{(\delta)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

<sup>1</sup> Bei der Multiplikation werden Produkte infinitesimaler Größen vernachlässigt, was im folgenden mit  $\Rightarrow$  gekennzeichnet ist.

Mit (2.24) und (A.15) folgt weiter

$$\begin{aligned}
\tau_{ij,j}^{(\delta)} + \rho^{(0)} g_i^{(\delta)} &= 0, \\
[t_{ij}^{(\delta)} + p^{(0)}(u_{j,i} - \delta_{ij} u_{k,k})]_{,j} + \rho^{(0)} g_i^{(\delta)} &= 0, \\
t_{ij,j}^{(\delta)} + p_{,j}^{(0)} u_{j,i} - p_{,j}^{(0)} \delta_{ij} u_{k,k} + p^{(0)}(u_{j,i} - \delta_{ij} u_{k,kj}) + \rho^{(0)} g_i^{(\delta)} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Da die zweifachen Ableitungen  $u_{j,ij} = 0$  und  $u_{k,kj} = 0$  verschwinden, ergibt sich

$$t_{ij,j}^{(\delta)} + p_{,j}^{(0)} u_{j,i} - p_{,j}^{(0)} u_{j,j} + \rho^{(0)} g_i^{(\delta)} = 0. \tag{A.18}$$

Zur Ableitung der Materialgleichung aus (2.15) wird (A.3) benutzt:

$$\begin{aligned}
t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(\delta)} &= t_{ij}^{(0)} + \delta_{ij} \lambda e_{kk} + 2\mu e_{ij}, \\
t_{ij}^{(\delta)} &= \delta_{ij} \lambda u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}).
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Aus (2.17) wird unter Berücksichtigung von (A.9)–(A.14) die Potentialgleichung abgeleitet:

$$\begin{aligned}
(1 + j^{(\delta)}) \times \\
[(\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)})_{,ij}(r_{i,j} - u_{i,k})(r_{j,k} - u_{j,k}) + (\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)})_{,i}(r_{i,jj} - u_{i,jj})] &= -4\pi\gamma\rho^{(0)}, \\
(1 + j^{(\delta)})[(\phi_{,ij}^{(0)} + \phi_{,ij}^{(\delta)})(\delta_{ij} - u_{i,k})(\delta_{jk} - u_{j,k}) + (\phi_{,i}^{(0)} + \phi_{,i}^{(\delta)})(-u_{i,jj})] &= -4\pi\gamma\rho^{(0)}, \\
\Rightarrow (1 + u_{i,i})[\phi_{,kk}^{(0)} - \phi_{,kj}^{(0)} u_{j,k} - \phi_{,ik}^{(0)} u_{i,k} + \phi_{,kk}^{(\delta)} - \phi_{,i}^{(0)} u_{i,jj}] &= -4\pi\gamma\rho^{(0)}, \\
\phi_{,kk}^{(0)} - 2\phi_{,ij}^{(0)} u_{i,j} + \phi_{,ii}^{(\delta)} - \phi_{,i}^{(0)} u_{i,jj} + \phi_{,kk}^{(0)} u_{i,i} &= -4\pi\gamma\rho^{(0)}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Mit (2.26) ergibt sich

$$\phi_{,ii}^{(\delta)} - 2\phi_{,ij}^{(0)} u_{i,j} - \phi_{,i}^{(0)} u_{i,jj} = -4\pi\gamma\rho^{(0)} u_{i,i}. \tag{A.21}$$

Aus der Schweredefinition (2.18) folgt mit (A.9)–(A.14)

$$\begin{aligned}
g_i^{(0)} + g_i^{(\delta)} &= (\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)})_{,j}(r_{j,i} - u_{j,i}), \\
g_i^{(0)} + g_i^{(\delta)} &= (\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)})_{,j}(\delta_{ij} - u_{j,i}), \\
\Rightarrow g_i^{(0)} + g_i^{(\delta)} &= \phi_{,i}^{(0)} + \phi_{,i}^{(\delta)} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,i}, \\
\phi_{,i}^{(0)} + g_i^{(\delta)} &= \phi_{,i}^{(0)} + \phi_{,i}^{(\delta)} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,i}, \\
g_i^{(\delta)} &= \phi_{,i}^{(\delta)} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,i}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Die Ableitung der Grenzflächenbedingungen in *materieller* Form wird in gleicher Weise vorgenommen. Für die Grenzflächenbedingung der Verschiebung ergibt sich aus (2.19)

$$\begin{aligned}
[X_i + u_i]_-^+ &= 0, \\
[r_i^{(0)} + u_i]_-^+ &= 0,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

und mit (2.28) folgt die Grenzflächenbedingung für die Verschiebung:

$$[u_i]_-^+ = 0. \quad (\text{A.24})$$

Aus (2.20) läßt sich

$$[(n_j^{(0)} + n_j^{(\delta)})(t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(\delta)})]_-^+ = -q_i \quad (\text{A.25})$$

ableiten, und mit  $t_{ij}^{(0)} = -p^{(0)}\delta_{ij}$  folgt die Grenzflächenbedingung für die Traktion:

$$\begin{aligned} \Rightarrow [-n_j^{(0)}p^{(0)}\delta_{ij} + n_j^{(0)}t_{ij}^{(\delta)} - n_j^{(\delta)}p^{(0)}\delta_{ij}]_-^+ &= -q_i, \\ [n_j^{(0)}t_{ij}^{(\delta)}]_-^+ &= -q_i. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Für das Potential ergibt sich aus (2.21)

$$[\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)}]_-^+ = 0,$$

woraus mit (2.29) die Grenzflächenbedingung

$$[\phi^{(\delta)}]_-^+ = 0 \quad (\text{A.27})$$

folgt. Für die Grenzflächenbedingung der Schwere läßt sich aus (2.22) ableiten

$$\begin{aligned} [(n_i^{(0)} + n_i^{(\delta)})(\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)})_{,j}(r_j - u_j)_{,i}]_-^+ &= 0, \\ [(n_i^{(0)} + n_i^{(\delta)})(\phi^{(0)} + \phi^{(\delta)})_{,j}(\delta_{ij} - u_{j,i})]_-^+ &= 0, \\ \Rightarrow [n_i^{(0)}\phi_{,i}^{(0)} - n_i^{(0)}\phi_{,j}^{(0)}u_{j,i} + n_i^{(0)}\phi_{,i}^{(\delta)} + n_i^{(\delta)}\phi_{,i}^{(0)}]_-^+ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Mit (2.31) folgt

$$[n_i^{(0)}(\phi_{,i}^{(\delta)} - \phi_{,j}^{(0)}u_{j,i})]_-^+ = 0. \quad (\text{A.29})$$

### A.3 Ableitung der inkrementiellen Feldgleichungen in materiell-lokaler Form

Als nächstes wird die Zerlegung des materiellen Inkrements in das lokale und das advektive Inkrement auf das Potential und die Schwere angewendet. Die Grundlage dafür bildet der Zusammenhang (2.11). Es ergibt sich insbesondere

$$\phi^{(\delta)} = \phi^{(\Delta)} + \phi_{,i}^{(0)}u_i, \quad (\text{A.30})$$

$$g_i^{(\delta)} = g_i^{(\Delta)} + g_{i,j}^{(0)}u_j. \quad (\text{A.31})$$

Unter Berücksichtigung von (A.30)–(A.31) ergibt sich aus (2.32) für die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(\delta)} + p_{,j}^{(0)}u_{j,i} - p_{,i}^{(0)}u_{j,j} + \rho^{(0)}g_i^{(\Delta)} + \rho^{(0)}g_{i,j}^{(0)}u_j &= 0, \\ t_{ij,j}^{(\delta)} + p_{,j}^{(0)}u_{j,i} - \underbrace{p_{,i}^{(0)}u_{j,j} + (\rho^{(0)}g_i^{(0)}u_{j,j} - \rho^{(0)}g_i^{(0)}u_{j,j})}_{=0} + \rho^{(0)}g_i^{(\Delta)} \\ + \underbrace{\rho^{(0)}g_{i,j}^{(0)}u_j + (\rho_{,j}^{(0)}g_i^{(0)}u_j - p_{,ij}^{(0)}u_j - \rho_{,j}^{(0)}g_i^{(0)}u_j + p_{,ij}^{(0)}u_j)}_{=0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Die Terme in Klammern sind hinzugefügt und jeweils gleich Null. Mit (2.24) folgt

$$t_{ij,j}^{(\delta)} + (p_{,j}^{(0)} u_j)_{,i} - g_i^{(0)} (\rho^{(0)} u_j)_{,j} + \rho^{(0)} g_i^{(\Delta)} = 0. \quad (\text{A.33})$$

Aus der Potentialgleichung (2.34) läßt sich

$$\begin{aligned} \phi_{,ii}^{(\Delta)} + (\phi_{,j}^{(0)} u_j)_{,ii} - 2\phi_{,ij}^{(0)} u_{i,j} - \phi_{,i}^{(0)} u_{i,jj} &= 4\pi\gamma\rho^{(0)} u_{i,i}, \\ \phi_{,ii}^{(\Delta)} + \phi_{,jii}^{(0)} u_j + \underbrace{2\phi_{,ji}^{(0)} u_{j,i} - 2\phi_{,ij}^{(0)} u_{i,j}}_{=0} + \underbrace{\phi_{,j}^{(0)} u_{j,ii} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,ii}}_{=0} &= 4\pi\gamma\rho^{(0)} u_{i,i} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

ableiten. Mit (2.26) gilt  $\phi_{,jii}^{(0)} = g_{j,ii}^{(0)} = -4\pi\gamma\rho_{,i}^{(0)}$ , und es folgt

$$\phi_{,ii}^{(\Delta)} = 4\pi\gamma(\rho^{(0)} u_i)_{,i}. \quad (\text{A.35})$$

Für die inkrementiellen Grenzflächenbedingungen in materiell-lokaler Form ergibt sich aus (A.27)

$$\begin{aligned} [\phi^{(\Delta)} + \phi_{,i}^{(0)} u_i]_{-}^{+} &= 0, \\ [\phi^{(\Delta)}]_{-}^{+} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Aus (A.29) folgt

$$\begin{aligned} [n_i^{(0)} (\phi_{,i}^{(\Delta)} + \phi_{,ij}^{(0)} u_{j,i} + \underbrace{\phi_{,j}^{(0)} u_{j,i} - \phi_{,j}^{(0)} u_{j,i}}_{=0})]_{-}^{+} &= 0, \\ [n_i^{(0)} (\phi_{,i}^{(\Delta)} + \phi_{,ij}^{(0)} u_{j,i})]_{-}^{+} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

und mit (2.26) ergibt sich

$$[n_i^{(0)} (\phi_{,i}^{(\Delta)} - 4\pi\gamma u_i)]_{-}^{+} = 0. \quad (\text{A.38})$$

Die Grenzflächenbedingungen (A.24) und (A.26) werden unverändert übernommen.

## A.4 Ableitung vereinfachter Feldgleichungen

Die Materialgleichung (2.41) und die Schweredefinition (2.43) werden unverändert übernommen. Die Potentialgleichung ergibt sich aus (2.42) unter Berücksichtigung der Annahmen  $\rho_{,i}^{(0)} = 0$  und  $u_{i,i} = 0$ . Für die Bewegungsgleichung stellt (2.40) den Ausgangspunkt der Ableitung dar. Mit der zusätzlichen Annahme  $g_i^{(\Delta)} = 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} t_{ij,j}^{(\delta)} + (p_{,j}^{(0)} u_j)_{,i} - \underbrace{g_i^{(0)} \rho_{,j}^{(0)} u_j}_{=0} - \underbrace{g_i^{(0)} \rho^{(0)} u_{j,j}}_{=0} + \underbrace{\rho^{(0)} g_i^{(\Delta)}}_0 &= 0, \\ t_{ij,j}^{(\delta)} + p_{,ji}^{(0)} u_j + p_{,j}^{(0)} u_{j,i} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$



Mit (2.24) gilt

$$p_{,ij}^{(0)} = \rho_{,j}^{(0)} g_i^{(0)} + \rho^{(0)} g_{i,j}^{(0)}. \quad (\text{A.40})$$

Damit folgt für die Bewegungsgleichung

$$t_{ij,j}^{(\delta)} + \underbrace{\rho^{(0)} g_{j,i}^{(0)}}_{=0} u_j + \rho^{(0)} g_j^{(0)} u_{j,i} - \underbrace{g_i^{(0)} \rho^{(0)}}_{=0} u_{j,j} = 0, \quad (\text{A.41})$$

$$t_{ij,j}^{(\delta)} = -\rho^{(0)} g_j^{(0)} u_{j,i},$$

was mit (2.48) übereinstimmt.

## A.5 Ableitung der Feldgleichungen in Zylinderkoordinaten

Die Gleichungen der Koordinatentransformation sind in (2.52) angegeben. Im folgenden werden (2.53)–(2.60) aus (2.48)–(2.50) abgeleitet. Um diese Transformation auszuführen, werden die Beziehungen der Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten benötigt.

In den folgenden Ausdrücken wird  $\hat{=}$  benutzt, um entsprechende Differentialoperatoren in verschiedenen Koordinatensystemen und Notationen zueinander in Beziehung zu setzen. Für die jeweilige Komponente einer Feldgröße in Zylinderkoordinaten wird die abkürzende Schreibweise  $f_r$ ,  $f_\varphi$  bzw.  $f_z$  benutzt. Auch hier wird die partielle Ableitung bezüglich  $r$ ,  $\varphi$  bzw.  $z$  in der Indexschreibweise dargestellt, z.B.  $f_{r,r}$ ,  $f_{r,\varphi}$ ,  $f_{r,z}$ . In dieser Notation ergibt sich der Gradient eines Vektors in Zylinderkoordinaten zu

$$f_{i,j} \hat{=} \begin{pmatrix} f_{r,r} & f_{\varphi,r} & f_{z,r} \\ \frac{1}{r} f_{r,\varphi} & \frac{1}{r} f_{\varphi,\varphi} + \frac{1}{r} f_r & \frac{1}{r} f_{z,\varphi} \\ f_{r,z} & f_{\varphi,z} & f_{z,z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Für die Divergenz eines Vektors läßt sich ableiten

$$f_{i,i} \hat{=} \frac{1}{r} (r f_r)_{,r} + \frac{1}{r} f_{\varphi,\varphi} + f_{z,z}. \quad (\text{A.43})$$

Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe ist gegeben durch den Ausdruck

$$f_{ij,j} \hat{=} \begin{pmatrix} f_{rr,r} + \frac{1}{r} f_{\varphi r,\varphi} + f_{zr,z} + \frac{1}{r} (f_{rr} - h_{\varphi\varphi}) \\ f_{r\varphi,r} + \frac{1}{r} f_{\varphi\varphi,\varphi} + f_{z\varphi,z} + \frac{1}{r} (f_{r\varphi} + f_{\varphi r}) \\ f_{rz,r} + \frac{1}{r} f_{\varphi z,\varphi} + f_{zz,z} + \frac{1}{r} f_{rz} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Der Laplace-Operator eines skalaren Feldes hat die Form

$$f_{,ii} \hat{=} \frac{1}{r} (r f_r)_{,r} + \frac{1}{r^2} f_{,\varphi\varphi} + f_{,zz}. \quad (\text{A.45})$$

Unter Annahme von Axialsymmetrie ergibt sich, daß alle Ableitungen in  $\varphi$ -Richtung verschwinden und die Verschiebungskomponente  $u_\varphi$  sowie die Komponenten  $t_{r\varphi}$  und  $t_{z\varphi}$  des Spannungstensors gleich Null sind. Nun lassen sich (2.53)–(2.59) bei Berücksichtigung der entsprechenden Differentialoperatoren (A.42)–(A.45) ableiten. Gleichung (2.60) läßt sich aus (2.53)

ableiten, indem (2.55) und (2.58) in diese eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda \left[ \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + u_{z,z} \right] + 2\mu u_{r,r} \right\}_{,r} + t_{rz,z} + \\ & \frac{1}{r} \left\{ \lambda \left[ \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + u_{z,z} \right] + 2\mu u_{r,r} - \lambda \left[ \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + u_{z,z} \right] - 2\mu \left( \frac{1}{r} u_r \right) \right\} + \rho g u_{z,r} = 0, \\ & \lambda \left( -\frac{1}{r^2} u_r + \frac{1}{r} u_{r,r} + u_{r,rr} + u_{z,zr} \right) + 2\mu u_{r,rr} + t_{rz,z} + \frac{2\mu}{r} \left( u_{r,r} - \frac{1}{r} u_r \right) + \rho g u_{z,r} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

## A.6 Hankel-Transformation der Feldgleichungen

Die Hankel-Transformation ist durch (2.67) definiert. Damit (2.53)–(2.60) transformiert werden können, werden Beziehungen für die Hankel-Transformation von Ableitungen bzw. Ableitungen von Besselfunktionen benötigt (z.B. Thoma & Wolf, 1999, Anhang A.):

$$\int_0^{\infty} r f_{,r} J_1(kr) dr = -k F^{[0]}(k), \quad (\text{A.47})$$

$$\int_0^{\infty} r f_{,r}(r) J_0(kr) dr = k F^{[1]}(k), \quad (\text{A.48})$$

$$J_{0,r}(kr) = -k J_1(kr), \quad (\text{A.49})$$

$$[r J_1(kr)]_{,r} = k r J_0(kr), \quad (\text{A.50})$$

$$\int_0^{\infty} r \left[ f_{,rr}(r) + \frac{1}{r} f_{,r}(r) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] J_\nu(kr) dr = -k^2 F^{[\nu]}(k). \quad (\text{A.51})$$

Aus (A.47) läßt sich folgender Ausdruck gewinnen:

$$\int_0^{\infty} r f_{,r} J_1(kr) dr = \int_0^{\infty} [r f(r) J_1(kr)]_{,r} dr - \int_0^{\infty} f(r) [r J_1(kr)]_{,r} dr.$$

Mit (A.50) vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r f_{,r} J_1(kr) dr &= \int_0^{\infty} [r f(r) J_1(kr)]_{,r} dr - \int_0^{\infty} k r f(r) J_0(kr) dr \\ &= \int_0^{\infty} [r f(r) J_1(kr)]_{,r} dr - k F^{[0]}(k). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (A.47) läßt erkennen, daß

$$\int_0^{\infty} [r f(r) J_1(kr)]_{,r} dr = 0 \quad (\text{A.52})$$

gelten muß. Aus (A.48) und (A.49) läßt sich auf gleiche Weise zeigen, daß

$$\int_0^{\infty} [r f(r) J_0(kr)]_{,r} dr = 0 \quad (\text{A.53})$$

gilt. Im folgenden sollen die Transformationen der einzelnen Feldgleichungen und die jeweils benutzten Beziehungen angegeben werden.

Aus (2.58) folgt

$$T_{rz}^{[1]}(k, z) = \mu U_{r,z}^{[1]}(k, z) + \mu \int_0^{\infty} r u_{z,r}(r, z) J_1(kr) dr \quad (\text{A.54})$$

und mit (A.47) weiter

$$\begin{aligned} T_{rz}^{[1]}(k, z) &= \mu U_{r,z}^{[1]}(k, z) - \mu k U_z^{[0]}(k, z), \\ U_{r,z}^{[1]}(k, z) &= \frac{1}{\mu} T_{rz}^{[1]}(k, z) + k U_z^{[0]}(k, z). \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Für (2.56) ergibt sich

$$T_{zz}^{[0]}(k, z) = \lambda \int_0^{\infty} \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} J_0(kr) dr + \lambda U_{z,z}^{[0]}(k, z) + 2\mu U_{z,z}^{[0]}(k, z), \quad (\text{A.56})$$

und mit (A.48) folgt

$$\begin{aligned} T_{zz}^{[0]}(k, z) &= \lambda k U_r^{[1]}(k, z) + \lambda U_{z,z}^{[0]}(k, z) + 2\mu U_{z,z}^{[0]}(k, z), \\ U_{z,z}^{[0]}(k, z) &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) - \frac{1}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z). \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Aus (2.54) läßt sich

$$0 = \int_0^{\infty} r t_{rz,r}(r, z) J_0(kr) dr + T_{zz}^{[0]}(k, z) + \int_0^{\infty} t_{rz}(r, z) J_0(kr) dr + \rho g U_{z,z}^{[0]}(k, z) \quad (\text{A.58})$$

ableiten. Mit

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r t_{rz,r}(r, z) J_0(kr) dr &= \int_0^{\infty} (r t_{rz}(r, z) J_0(kr))_{,r} dr - \int_0^{\infty} r t_{rz}(r, z) J_{0,r}(kr) dr \\ &\quad - \int_0^{\infty} t_{rz}(r, z) J_0(kr) dr \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

folgt weiter

$$0 = \underbrace{\int_0^{\infty} [r t_{rz}(r, z) J_0(kr)]_{,r} dr}_{= 0 \text{ wegen (A.53)}} - \underbrace{\int_0^{\infty} r t_{rz}(r, z) J_{0,r}(kr) dr}_{= k T_{rz}^{[1]}(k, z) \text{ wegen (A.49)}}$$

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\int_0^\infty t_{rz}(r, z) J_0(kr) dr + \int_0^\infty t_{rz}(r, z) J_0(kr) dr + T_{zz,z}^{[0]}(k, z) + \rho g U_{z,z}^{[0]}(k, z)}_{=0} \\
T_{zz,z}^{[0]}(k, z) &= -k T_{rz}^{[1]}(k, z) - \rho g U_{z,z}^{[0]}(k, z).
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Nach Substitution von (A.57) ergibt sich

$$T_{zz,z}^{[0]}(k, z) = -k T_{rz}^{[1]}(k, z) - \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) + \frac{\lambda k \rho g}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z). \tag{A.61}$$

Mit (2.60) folgt für die Komponente  $T_{rz}^{[1]}$  des Spannungstensors

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{-\lambda \int_0^\infty \frac{1}{r} u_r(r, z) J_1(kr) dr + \lambda \int_0^\infty u_{r,r} J_1(kr) dr + \lambda \int_0^\infty r u_{r,rr}(r, z) J_1(kr) dr}_{= -\lambda k^2 U_r^{[1]}(k, z) \text{ wegen (A.51)}} \\
&+ \underbrace{\lambda \int_0^\infty r u_{z,zr}(r, z) J_1(kr) dr}_{= -\lambda k U_{z,z}^{[0]}(k, z) \text{ wegen (A.47)}} + T_{rz,z}^{[1]}(k, z) + \underbrace{\rho g \int_0^\infty r u_{z,r}(r, z) J_1(kr) dr}_{= -\rho g k U_z^{[0]}(k, z) \text{ wegen (A.47)}} \\
&+ \underbrace{2\mu \int_0^\infty r u_{r,rr}(r, z) J_1(kr) dr + 2\mu \int_0^\infty u_{r,r}(r, z) J_1(kr) dr - 2\mu \int_0^\infty \frac{1}{r} u_r(r, z) J_1(kr) dr}_{= -2\mu k^2 U_r^{[1]}(k, z) \text{ wegen (A.51)}} \\
0 &= -\lambda k^2 U_r^{[1]}(k, z) - \lambda k U_{z,z}^{[0]}(k, z) + T_{rz,z}^{[1]}(k, z) - \rho g k U_z^{[0]}(k, z) - 2\mu k^2 U_r^{[1]}(k, z), \\
T_{rz,z}^{[1]}(k, z) &= (\lambda + 2\mu) k^2 U_r^{[1]}(k, z) + \lambda k U_{z,z}^{[0]}(k, z) + \rho g k U_z^{[0]}(k, z).
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Nach Substitution von (A.57) ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_{rz,z}^{[1]}(k, z) &= (\lambda + 2\mu) k^2 U_r^{[1]}(k, z) + \lambda k \left[ \frac{1}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) - \frac{\lambda k}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z) \right] + \rho g k U_z^{[0]}(k, z) \\
&= \left[ (\lambda + 2\mu) k^2 - \frac{\lambda^2 k^2}{\lambda + 2\mu} \right] U_r^{[1]}(k, z) + \frac{\lambda k}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) + \rho g k U_z^{[0]}(k, z) \\
&= \frac{4\mu k^2 (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} U_r^{[1]}(k, z) + \frac{\lambda k}{\lambda + 2\mu} T_{zz}^{[0]}(k, z) + \rho g k U_z^{[0]}(k, z).
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Die Potentialgleichung (2.73) folgt nach Transformation von (2.59):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty [r \phi_{,r}(r, z)]_{,r} J_0(kr) dr + \Phi_{,zz}^{[0]}(k, z) \\
&= \int_0^\infty r \left[ \phi_{,rr}(r, z) + \frac{1}{r} \phi_{,r}(r, z) \right] J_0(kr) dr + \Phi_{,zz}^{[0]}(k, z) \\
&= -k^2 \Phi^{[0]}(k, z) + \Phi_{,zz}^{[0]}(k, z).
\end{aligned} \tag{A.64}$$

## A.7 Eigenwertbestimmung

In Abschnitt 2.3.3 werden der Grenzflächen- und der Schichtpropagator abgeleitet. Für die Ableitung des Schichtpropagators müssen die Eigenwerte der in (2.78) definierten Matrix  $A_{ij}$  bekannt sein. Zur Bestimmung wird  $A_{ij}$  zunächst in zwei Untermatrizen  $A_{ij}^{(1)}$  und  $A_{ij}^{(2)}$  aufgeteilt:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{ij}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.65})$$

wobei  $A_{ij}^{(1)}$  und  $A_{ij}^{(2)}$  durch (2.90) bzw. (2.93) gegeben sind. Mit 0 sind hier die passend dimensionierten Null-Matrizen gekennzeichnet. Diese Aufspaltung von  $A_{ij}$  ist sinnvoll, da das charakteristische Polynom von  $A_{ij}$  das Produkt der charakteristischen Polynome von  $A_{ij}^{(1)}$  und  $A_{ij}^{(2)}$  ist (z. B. Lorenz, 1992, S. 201). Somit ist die Bestimmung der Eigenwerte von  $A_{ij}$  auf die Bestimmung der Eigenwerte von  $A_{ij}^{(1)}$  und  $A_{ij}^{(2)}$  zurückgeführt.

Für das charakteristische Polynom von  $A_{ij}^{(1)}$  ergibt sich

$$\det(A_{ij}^{(1)} - \chi\delta_{ij}) = (\chi^2 - k^2) \left( \chi^2 + \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} \chi - k^2 \right) = 0. \quad (\text{A.66})$$

Hieraus lassen sich die in (2.91) angegebenen vier Eigenwerte bestimmen. Für das charakteristische Polynom von  $A_{ij}^{(2)}$  findet sich der Ausdruck

$$\det(A_{ij}^{(2)} - \chi\delta_{ij}) = \chi^2 - k^2 = 0, \quad (\text{A.67})$$

was unmittelbar die beiden in (2.94) angegebenen Eigenwerte liefert.

## A.8 Berechnung der Propagatoren

Mit den in (2.91) angegebenen Eigenwerten der Matrix  $A_{ij}^{(1)}$  und (2.95) ergibt sich für den zugehörigen mechanischen Schichtpropagator  $D_{ij}^{(1)}$  durch Einsetzen der Eigenwerte folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)}(z_{l+1}, z_l) &= \frac{(A_{ij}^{(1)} - a_2\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_3\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_4\delta_{ij})}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} \exp[-a_1(z_{l+1} - z_l)] \\ &+ \frac{(A_{ij}^{(1)} - a_1\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_3\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_4\delta_{ij})}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)} \exp[-a_2(z_{l+1} - z_l)] \\ &+ \frac{(A_{ij}^{(1)} - a_1\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_2\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_4\delta_{ij})}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)} \exp[-a_3(z_{l+1} - z_l)] \\ &+ \frac{(A_{ij}^{(1)} - a_1\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_2\delta_{ij})(A_{ij}^{(1)} - a_3\delta_{ij})}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)} \exp[-a_4(z_{l+1} - z_l)]. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Hier wird mit  $a_n$  der  $n$ -te Eigenwert von  $A_{ij}^{(1)}$  bezeichnet. Dieser Propagator setzt die Lösung von der Tiefe  $z_{l+1}$  bis zur Tiefe  $z_l$  fort. Nach Multiplikation der einzelnen Klammerausdrücke

folgen die Koeffizienten der verschiedenen Summanden in (2.96). Die dort auftretenden Matrizen  $A_{ij}^{(1)2}$  und  $A_{ij}^{(1)3}$  ergeben sich aus dem Produkt der zweifachen bzw. dreifachen Multiplikation von  $A_{ij}^{(1)}$  mit sich selbst. Diese Matrizen werden für den Schichtpropagator benötigt und haben folgende Form:

$$A_{ij}^{(1)2} = \frac{k}{\lambda + 2\mu} \hat{A}_{ij} \quad (\text{A.69})$$

mit den Elementen

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= (3\lambda + 4\mu) k, \\ \hat{A}_{21} &= \frac{\lambda \rho g}{\lambda + 2\mu}, \\ \hat{A}_{31} &= -\frac{2\lambda \mu \rho g k}{\lambda + 2\mu}, \\ \hat{A}_{41} &= -4\mu (\lambda + \mu) k^2 - \frac{\lambda \rho^2 g^2}{\lambda + 2\mu}, \\ \hat{A}_{12} &= \frac{(\lambda + 2\mu) \rho g}{\mu}, \\ \hat{A}_{22} &= -\lambda k, \\ \hat{A}_{32} &= 4\mu (\lambda + \mu) k^2, \\ \hat{A}_{42} &= -2\mu \rho g k, \\ \hat{A}_{13} &= 0, \\ \hat{A}_{23} &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu}, \\ \hat{A}_{33} &= (3\lambda + 4\mu) k, \\ \hat{A}_{43} &= \frac{(\lambda + \mu) \rho g}{\mu}, \\ \hat{A}_{14} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \\ \hat{A}_{24} &= -\frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu) k}, \\ \hat{A}_{34} &= \frac{2\mu \rho g}{\lambda + 2\mu}, \\ \hat{A}_{44} &= -4\lambda k + \frac{\rho^2 g^2}{(\lambda + \mu) k} \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

und

$$A_{ij}^{(1)3} = \frac{k^2}{\lambda + 2\mu} \tilde{A}_{ij} \quad (\text{A.71})$$

mit den Elementen

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= -\frac{\lambda \rho g}{\lambda + 2\mu}, \\ \tilde{A}_{21} &= -\frac{\lambda \rho^2 g^2}{(\lambda + 2\mu)^2 k} - (3\lambda + 2\mu) k, \\ \tilde{A}_{31} &= \frac{2\lambda \mu \rho^2 g^2}{(\lambda + 2\mu)^2} + 8\mu (\lambda + \mu) k^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{41} &= \frac{\lambda \rho^3 g^3}{(\lambda + 2\mu)^2 k} - \frac{4\mu^2 \rho g k}{\lambda + 2\mu} + (3\lambda + 4\mu) \rho g k, \\
\tilde{A}_{12} &= (3\lambda + 4\mu) k, \\
\tilde{A}_{22} &= -\frac{\lambda \rho g}{\mu} - \frac{2\mu \rho g}{\lambda + 2\mu}, \\
\tilde{A}_{32} &= (3\lambda + 4\mu) \rho g k - \frac{2\lambda \mu \rho g k}{\lambda + 2\mu}, \\
\tilde{A}_{42} &= -4(\lambda + \mu) \mu k^2 + \frac{(\lambda + \mu) \rho^2 g^2}{\mu} - \frac{\lambda \rho^2 g^2}{\lambda + 2\mu}, \\
\tilde{A}_{13} &= \frac{2\lambda + 3\mu}{\mu}, \\
\tilde{A}_{23} &= \frac{(\lambda + \mu) \rho g}{(\lambda + 2\mu) \mu k}, \\
\tilde{A}_{33} &= -\frac{2(\lambda + \mu) \rho g}{\lambda + 2\mu}, \\
\tilde{A}_{43} &= -\frac{(\lambda + \mu) \rho^2 g^2}{(\lambda + 2\mu) \mu k} - (3\lambda + 4\mu) k, \\
\tilde{A}_{14} &= \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu) k}, \\
\tilde{A}_{24} &= \frac{\rho^2 g^2}{(\lambda + 2\mu)^2 k^2} - \frac{\lambda}{\mu}, \\
\tilde{A}_{34} &= -\frac{2\mu \rho^2 g^2}{(\lambda + 2\mu)^2 k} + (3\lambda + 2\mu) k, \\
\tilde{A}_{44} &= -\frac{\rho^3 g^3}{(\lambda + 2\mu)^2 k^2} + \frac{\lambda \rho g}{\mu} - \frac{2\mu \rho g}{\lambda + 2\mu}.
\end{aligned}$$

Als nächstes wird die Ableitung des gravitativen Schichtpropagators  $D_{ij}^{(2)}$  mit Hilfe der in (2.94) angegebenen Eigenwerte von  $A_{ij}^{(2)}$  betrachtet. Mit der allgemeinen Form (2.95) eines Schichtpropagators ergibt sich

$$D_{ij}^{(2)}(z_{l+1}, z_l) = \frac{A_{ij}^{(2)} - a_6 \delta_{ij}}{a_5 - a_6} \exp[-a_5(z_{l+1} - z_l)] + \frac{A_{ij}^{(2)} - a_5 \delta_{ij}}{a_6 - a_5} \exp[-a_6(z_{l+1} - z_l)]. \quad (\text{A.72})$$

Wird dieser Ausdruck vereinfacht, folgt (2.130). Die Kombination von  $D_{ij}^{(1)}$  und  $D_{ij}^{(2)}$  zu einer Matrix führt zu dem in (2.98) angegebenen Schichtpropagator  $D_{ij}$ .

## A.9 Berechnung des gravitativen Lösungsvektors

Aus (2.136) ist gefolgert worden, daß

$$Y_i^{(2)-}(z_L) = 0 \quad (\text{A.73})$$

und somit

$$Y_i^{(2)+}(z_L) = Y_i^{(2)-}(z_L) = 0 \quad (\text{A.74})$$

gilt, da in der betrachtete Situation Potential und Schwere stetig sind. Es bleibt zu zeigen, daß aus (2.136) die Beziehung (2.137) folgt. Mit (2.135) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp(-kz_L) Y_i^{(2)-}(z_L) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} \exp(kz_L) Y_i^{(2)-}(z_L), \\ 0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\Phi^-(z_L) + \frac{1}{k}G^-(z_L)) \exp(-kz_L) + (\Phi^-(z_L) - \frac{1}{k}G^-(z_L)) \exp(kz_L) \\ (k\Phi^-(z_L) + G^-(z_L)) \exp(-kz_L) + (-k\Phi^-(z_L) + G^-(z_L)) \exp(kz_L) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Daraus lassen sich die skalaren Gleichungen

$$0 = (\Phi^-(z_L) + \frac{1}{k}G^-(z_L)) \exp(-kz_L) + (\Phi^-(z_L) - \frac{1}{k}G^-(z_L)) \exp(kz_L), \quad (\text{A.76})$$

$$0 = (k\Phi^-(z_L) + G^-(z_L)) \exp(-kz_L) + (-k\Phi^-(z_L) + G^-(z_L)) \exp(kz_L) \quad (\text{A.77})$$

ableiten. Aus (A.76) ergibt sich dann

$$\Phi^-(z_L) = -\frac{1}{k}G^-(z_L). \quad (\text{A.78})$$

Hingegen läßt sich aus (A.77) die Beziehung

$$\Phi^-(z_L) = -\frac{1}{k}G^-(z_L) \frac{\exp(-kz_L) + \exp(kz_L)}{\exp(-kz_L) - \exp(kz_L)} \quad (\text{A.79})$$

ableiten. Beide Gleichungen können nur dann erfüllt werden, wenn

$$\Phi^-(z_L) = 0, \quad (\text{A.80})$$

$$G^-(z_L) = 0 \quad (\text{A.81})$$

gilt, woraus (2.137) folgt.

## A.10 Berechnung der Grenzflächenbedingung für $z_1$

In Abschnitt 2.3.4 sind für das Potential und die Schwere für  $z_1$  die Grenzflächenbedingungen (2.138) und (2.139) angegeben. Die Grenzflächenbedingungen ergeben sich aus der Forderung, daß die durch  $K_{ij}^{(2)}$  fortgesetzten Anteile an der Grenzfläche verschwinden. Im folgenden wird zur Vereinfachung die Definition

$$V_i(z_l) := \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix} \quad (\text{A.82})$$

benutzt. Mit (2.86), (2.132) und (2.137) folgt

$$\begin{aligned} Y_i^{(2)-}(z_L) &= V_i(z_L), \\ Y_i^{(2)+}(z_{L-1}) &= D_{ij}^{(2)}(z_L, z_{L-1})V_j(z_L), \\ Y_i^{(2)-}(z_{L-1}) &= D_{ij}^{(2)}(z_L, z_{L-1})V_j(z_L) + V_i(z_{L-1}), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
Y_i^{(2)+}(z_{L-2}) &= D_{ij}^{(2)}(z_{L-1}, z_{L-2}) [D_{jk}^{(2)}(z_L, z_{L-1}) V_k(z_L) + V_j(z_{L-1})], \\
&\vdots \\
Y_i^{(2)+}(z_1) &= D_{ij}^{(2)}(z_2, z_1) [D_{jk}^{(2)}(z_3, z_2) \dots [D_{m,n}^{(2)}(z_L, z_{L-1}) V_n(z_L) + V_m(z_{L-1})] + \dots V_j(z_2)].
\end{aligned} \tag{A.83}$$

Hieraus läßt sich

$$Y_i^{(2)+}(z_1) = \sum_{l=1}^{L-1} \prod_{m=1}^l D_{ij}^{(2)}(z_{m+1}, z_m) V_j(z_{l+1}) \tag{A.84}$$

ableiten und mit (2.117) folgt

$$\begin{aligned}
Y_i^{(2)+}(z_1) &= \sum_{l=2}^L D_{ij}^{(2)\Pi}(z_l) V_j(z_l) \\
&= \sum_{l=2}^L \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp -k z_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} \exp k z_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{A.85}$$

Da der zweite Summand in (A.85) verschwinden muß, ergibt sich

$$Y_i^{(2)-}(z_1) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp -k z_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix}, \tag{A.86}$$

und somit folgen die Grenzflächenbedingungen

$$[\Phi(z_1)]_-^+ = \frac{2\pi\gamma}{k} \sum_{l=1}^L \exp k z_l \Delta\rho_l U_z^+(z_l), \tag{A.87}$$

$$[G(z_1)]_-^+ = -2\pi\gamma \sum_{l=1}^L \exp k z_l \Delta\rho_l U_z^+(z_l), \tag{A.88}$$

aus denen sich (2.138) und (2.139) ergeben.

Es bleibt zu zeigen, daß der Grenzflächenpropagator (2.140) die Grenzflächenbedingungen (2.138) und (2.139) berücksichtigt. Aus  $Y_i^-(z_1) = N_{ij}(z_1) Y_j^+(z_1)$ , (2.140) und (A.85) ergibt sich

$$\begin{aligned}
Y_i^{(2)-}(z_1) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} Y_j^{(2)+}(z_1) + \begin{pmatrix} -\frac{2\pi\gamma}{k} \Delta\rho_l U_z^+(z_1) \\ -2\pi\gamma \Delta\rho_l U_z^+(z_1) \end{pmatrix}, \\
Y_i^{(2)-}(z_1) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \sum_{l=2}^L \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp -k z_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} \exp k z_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{2\pi\gamma}{k} \Delta\rho_l U_z^+(z_1) \\ -2\pi\gamma \Delta\rho_l U_z^+(z_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.89}$$

Wegen

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{k} \\ -k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.91})$$

folgt aus (A.89)

$$\begin{aligned} Y_i^{(2)+}(z_1) &= \sum_{l=2}^L \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp -kz_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2\pi\gamma}{k}\Delta\rho_l U_z^+(z_1) \\ -2\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_1) \end{pmatrix}, \\ Y_i^{(2)+}(z_1) &= \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ k & 1 \end{pmatrix} \exp -kz_l \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\gamma\Delta\rho_l U_z^+(z_l) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

## A.11 Hankel-Transformation des Auflastdrucks

Zur Ableitung von (2.143) wird ein Kreisring mit konstantem Auflastdruck  $\bar{p}_m$  betrachtet, d. h.  $q_m$  ist durch

$$q_m = \begin{cases} \bar{p}_m & : r_{m-1} \leq r < r_m \\ 0 & : r < r_{m-1} \vee r \geq r_m \end{cases} \quad (\text{A.93})$$

gegeben. Mit der Definition der Hankel-Transformation gemäß (2.67) läßt sich dann  $Q_m$  berechnen:

$$\begin{aligned} Q_m &= \int_{r_{m-1}}^{\infty} r q_m J_0(kr) dr \\ &= \int_{r_{m-1}}^{r_m} r \bar{p}_m J_0(kr) dr \\ &= \frac{\bar{p}_m}{k} \int_{r_{m-1}}^{r_m} rk J_0(kr) dr. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Mit (A.50) folgt

$$Q_m = \frac{\bar{p}_m}{k} [r_m J_1(kr_m) - r_{m-1} J_1(kr_{m-1})]. \quad (\text{A.95})$$

## B. Ergänzungen zu Kapitel 3

### B.1 Berechnung des Attraktionsintegrals für ebenes Atmosphärenmodell

Zur Berechnung des Attraktionsintegrals (3.10) wird die partielle Ableitung in  $z$ -Richtung ausgeführt:

$$g_z = -\gamma \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \varphi, z) \frac{rz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} dr d\varphi dz. \quad (\text{B.1})$$

Werden die Bezeichnung der Radien und Höhen aus der Abb. 3.3 übernommen und die Integration über Zylindermäntel mit konstanter Dichte  $\bar{\rho}_{\text{air}mn}$  betrachtet, läßt sich wegen der Axialsymmetrie des Problems die Integration über  $\varphi$  ausführen:

$$g_{\text{air}}^{(\Delta)} = -2\pi\gamma \sum_{m,n} \bar{\rho}_{\text{air}mn} \int_{r_{m-1}}^{r_m} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{rz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} dr dz. \quad (\text{B.2})$$

Das Integral über  $z$  läßt sich lösen (z. B. Bronstein & Semendjajew, 1997, S. 970), und es ergibt sich

$$g_{\text{air}}^{(\Delta)} = -2\pi\gamma \sum_{m,n} \bar{\rho}_{\text{air}mn} \int_{r_{m-1}}^{r_m} \left( \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z_n^2}} - \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z_{n-1}^2}} \right) dr. \quad (\text{B.3})$$

Wird schließlich die Integration über  $r$  ausgeführt (z. B. Bronstein & Semendjajew, 1997, S. 969), folgt (3.11).

### B.2 Berechnung des Attraktionsintegrals für sphärisches Atmosphärenmodell

Mit der Annahme, daß die Dichten in den einzelnen Kugelschalensegmenten konstant sind, folgt aus (3.13)

$$\phi(R_E, 0, 0) = -\gamma \sum_{m,n,l} \rho_{\text{air}mnl} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 2rR_E \cos \vartheta + R_E^2}} dr d\vartheta d\varphi. \quad (\text{B.4})$$

Wird die Integration über  $\varphi$  ausgeführt, ergibt sich

$$\phi(R_E, 0, 0) = -\gamma \sum_{m,n,l} \rho_{\text{air}mnl} (\varphi_l - \varphi_{l-1}) \int_{r_{n-1}}^{r_n} \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 2rR_E \cos \vartheta + R_E^2}} dr d\vartheta. \quad (\text{B.5})$$

Mit Hilfe der Substitutionen

$$e^2 := r^2 - 2r R_E \cos \vartheta + R_E^2, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{e \, de}{r R_E \sin \vartheta} = d\vartheta \quad (\text{B.7})$$

wird das Integral über  $\vartheta$  gelöst, und es folgt

$$\begin{aligned} \phi(R_E, 0, 0) &= -\gamma \sum_{m,n,l} \rho_{\text{air } mnl} (\varphi_l - \varphi_{l-1}) \int_{r_{n-1}}^{r_n} \left( r \sqrt{r^2 - 2r R_E \cos \vartheta_m + R_E^2} \right. \\ &\quad \left. - r \sqrt{r^2 - 2r R_E \cos \vartheta_{m-1} + R_E^2} \right) dr. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Mit (3.9) läßt sich dann für  $g_{\text{air}}^{(\Delta)}$  folgende Beziehung bestimmen:

$$\begin{aligned} g_{\text{air}}^{(\Delta)}(R_E, 0, 0) &= -\gamma \sum_{m,n,l} \rho_{\text{air } mnl} (\varphi_l - \varphi_{l-1}) \left[ \int_{r_{n-1}}^{r_n} \left( r \sqrt{r^2 - 2r R_E \cos \vartheta_m + R_E^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r \sqrt{r^2 - 2r R_E \cos \vartheta_{m-1} + R_E^2} \right) dr \right]_r. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Da sich Integration und Differentiation aufheben, folgt mit der Definition

$$z_n := r_n - R_E \quad (\text{B.10})$$

Formel (3.14).

## C. Ergänzungen zu Kapitel 4

### C.1 Erdmodellparameter

In Tabelle C.1 sind die Parameter des Erdmodells aufgeführt, das zur Berechnung des Freiluft- und Deformationsbeitrags verwendet wird. Dieses Erdmodell wird abkürzend mit **PSC** bezeichnet. Für das inkompressible Erdmodell **PSI** ist  $\lambda \rightarrow \infty$  angenommen, ansonsten werden die gleichen Werte wie bei **PSC** verwendet. Als vereinfachtes Vergleichsmodell wird das vierschichtige kompressible Erdmodell **LC** herangezogen, dessen Parameter in Tabelle C.2 aufgelistet sind.

### C.2 Numerische Integration

Die numerische Integrationsmethode ist Werner (1992, Abschnitt 4.2) entnommen. Da diese Methode in dieser Arbeit mehrfach verwendet wird, ist die folgende Darstellung hinsichtlich der verwendeten Symbole allgemein gehalten.

Sei  $f(x)$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $x \in [a, b]$ , wobei  $x_j = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $h = (b - a)/n$  und  $n = 4m$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_{x_{4j-4}}^{x_{4j}} f(x) dx, \quad (\text{C.1})$$

und mit der Milne-Regel folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{2h}{45} [7f(x_{4j-4}) + 32f(x_{4j-3}) + 12f(x_{4j-2}) + 32f(x_{4j-1}) + 7f(x_{4j})] - R_4(f) \right\} \\ &= \frac{2h}{45} \left[ 7f(x_0) + 32 \sum_{j=1}^{2m} f(x_{2j-1}) + 12 \sum_{j=1}^m f(x_{4j-2}) + 14 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{4j}) + 7f(x_n) \right] \\ &\quad - \frac{2h}{45} \sum_{j=1}^m R_4(f), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

wobei mit  $R_4(f)$  der Quadraturfehler der Milne-Regel bezeichnet wird.

Tabelle C.1: Parameter von Erdmodell PSC.

Schicht	Tiefe $z$ (km)	Dichte $\rho$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )	$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)
1	0	2600.0	2.1	20.0
2	3	2600.0	34.3	26.6
3	15	2900.0	45.9	44.1
4	24	3380.0	86.0	68.2
5	71	3375.2	85.3	67.5
6	80	3374.7	85.3	67.4
7	171	3362.2	83.7	65.9
8	220	3435.8	103.5	74.1
9	271	3466.2	108.0	75.9
10	371	3534.6	118.4	80.1
11	400	3723.7	129.5	90.6
12	471	3813.2	142.6	100.7
13	571	3957.6	165.2	118.6
14	600	3984.0	170.6	122.5
15	670	4380.7	196.7	154.8
16	771	4443.2	198.1	173.0
17	871	4503.8	210.7	179.4
18	971	4563.1	223.4	185.6
19	1071	4621.3	235.9	191.8
20	1171	4678.5	248.4	197.9
21	1271	4737.6	260.7	203.9
22	1371	4789.9	272.9	209.8
23	1471	4844.3	285.0	215.7
24	1571	4897.9	297.1	221.5
25	1671	4950.8	309.2	227.3
26	1771	5003.0	321.3	233.0
27	1871	5054.7	333.3	238.8
28	1971	5105.9	345.5	244.5
29	2071	5156.7	357.8	250.2

Tabelle C.2: Parameter von Erdmodell LC.

Schicht	Tiefe $z$ (km)	Dichte $\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)
1	0	3380	80	67
2	400	3800	135	100
3	670	4400	200	160
4	1000	4650	245	180

## D. Symbolverzeichnis

### D.1 Lateinische Symbole

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
$a_n$	$n$ -ter Eigenwert der Koeffizientenmatrix $A_{ij}$	2.3.3
$A_{ij}$	Koeffizientenmatrix des DGL-Systems	2.3.2
$A_{ij}^{(1)}$	Koeffizientenmatrix des mechanischen DGL-Systems	2.3.3
$A_{ij}^{(2)}$	Koeffizientenmatrix des gravitativen DGL-Systems	2.3.3
$D_{ij}$	Schichtpropagator	2.3.3
$D_{ij}^{(1)}$	Mechanischer Schichtpropagator	2.3.3
$D_{ij}^{(2)}$	Gravitativer Schichtpropagator	2.3.3
$e_{ij}$	Verzerrung	2.2.1
$f_{ij\dots}$	Beliebige tensorielle Feldgröße (Lagrange-Formulierung)	2.1.2
$f_{ij\dots,k}$	Gradient von $f_{ij\dots}$	2.1.2
$f_{ij\dots}^+$	Innerer bzw. äußerer Grenzwert von $f_{ij\dots}$	2.1.2
$f_{ij\dots}^-$		
$f_{ij\dots}^{(0)}$	Referenzwert von $f_{ij\dots}$ für $t = 0$	2.1.2
$f_{ij\dots}^{(\delta)}$	Materielles Inkrement von $f_{ij\dots}$	2.1.2
$f_{ij\dots}^{(\Delta)}$	Lokales Inkrement von $f_{ij\dots}$	2.1.2
$F_{ij\dots}$	Beliebige tensorielle Feldgröße (Euler-Formulierung)	2.1.2
$F^{[\nu]}(k)$	Hankel-Transformierte $\nu$ -ter Ordnung von $f(r)$	2.3.2
$g_i$	Schwere	2.2.1
$g_0$	Referenzwert der Schwere ( $g_0 = 9.82161664 \text{ m s}^{-2}$ )	2.2.2
$g_{\text{atm}}^{(\delta)}$	Atmosphärischer Gesamtbeitrag zum Schwereinkrement	4.3.1
$g_{\text{SG}}^{(\delta)}$	Gezeitenreduzierter Schweremeßwert	6.1
$g_{\text{air}}^{(\Delta)}$	$z$ -Komponente des Luftmassenbeitrags zum Schwereinkrement	3.4.2
$g_{\text{def}}^{(\Delta)}$	$z$ -Komponente des Deformationsbeitrags zum Schwereinkrement	2.4.2
$H_{\text{air}}$	Skalenhöhe in der Barometrischen Höhenformel	3.2
$H_{ij}^{(1)}$	Aufwärts gerichteter Anteil des mechanischen Schichtpropagators	2.3.4
$H_{ij}^{(2)}$	Aufwärts gerichteter Anteil des gravitativen Schichtpropagators	2.3.4
$\mathcal{H}_\nu$	Hankel-Transformation	2.3.2
$\mathcal{H}_\nu^{-1}$	Inverse Hankel-Transformation	2.3.2



Symbol	Bedeutung	Abschnitt
$I$	Bestimmtes Integral des Kehrwert von $H_{\text{air}}$	4.2.3
$j$	Jakobi-Determinante	2.2.1
$J_\nu$	Besselfunktion $\nu$ -ter Ordnung	2.3.2
$k$	Hankel-Wellenzahl	2.3.2
$K_{ij}^{(1)}$	Abwärts gerichteter Anteil des mechanischen Schichtpropagators	2.3.4
$K_{ij}^{(2)}$	Aufwärts gerichteter Anteil des gravitativen Schichtpropagators	2.3.4
$l$	Index der Halbraumschichten, $l \in [0, L]$	2.1.1
$l_n$	Temperaturgradient für Standard-Temperaturprofil	3.3.1
$L$	Anzahl der Halbraumschichten	2.1.2
$m$	Index der Auflastkreisringe, $m \in [0, M]$	2.4.1
$M$	Anzahl der Auflastkreisringe	2.4.1
$\bar{M}_{\text{air}}$	Mittlere Molmasse der Luft ( $\bar{M}_{\text{air}} = 0.0289644 \text{ kg mol}^{-1}$ )	3.2
$n$	Index der Atmosphärenschichten, $n \in [0, N]$	3.3.1
$n_i$	Einheitsnormale zur Grenzfläche subparallel zu $g_i$	2.2.1
$N$	Anzahl der Atmosphärenschichten	4.2.1
$N_{ij}$	Grenzflächenpropagator	2.3.3
$p$	Mechanischer Druck	2.2.2
$p_{\text{air}}$	Luftdruck	3.2
$\bar{p}_m$	Mittlerer Auflastdruck für $m$ -ten Kreisring	2.4.1
$q$	Grenzflächendruck	2.2.1
$r$	Radialer Abstand	2.3.1
$r_i$	Aktuelle Position (Lagrange-Formulierung)	2.1.2
$r_m$	Außenradius des $m$ -ten Auflastkreisrings	2.4.1
$R^*$	Allgemeine Gaskonstante ( $R^* = 8.314511 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ )	3.2
$R_E$	Mittlerer Erdradius ( $R_E = 6371 \text{ km}$ )	3.2
$\mathcal{R}$	Gestörter Halbraum	2.1.2
$\mathcal{R}_l$	$l$ -te Schicht im gestörten Halbraum	2.1.2
$\partial\mathcal{R}_l$	$l$ -te Grenzfläche im gestörten Halbraum	2.1.2
$t$	Zeit	2.1.2
$t_{ij}$	Cauchy-Spannung	2.2.1
$u_i$	Verschiebung bezüglich $X_i$ (Lagrange-Formulierung)	2.1.2
$U_i$	Verschiebung bezüglich $X_i$ (Euler-Formulierung)	2.1.2
$X_i$	Referenzposition (Euler-Formulierung)	2.1.2
$\mathcal{X}$	Ungestörter Halbraum	2.1.2
$\mathcal{X}_l$	$l$ -te Schicht im ungestörten Halbraum	2.1.2
$\partial\mathcal{X}_l$	$l$ -te Grenzfläche im ungestörten Halbraum	2.1.2
$Y_i$	Vektor der Hankel-transformierten Feldgrößen	2.3.2

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
$Y_i^{(1)}$	Vektor der Hankel-transformierten mechanischen Feldgrößen	2.3.4
$Y_i^{(2)}$	Vektor der Hankel-transformierten gravitativen Feldgrößen	2.3.4
$z$	Tiefe (innerhalb des Halbraums), Höhe (außerhalb des Halbraums)	2.3.1
$z_l$	Tiefe der $l$ -ten Grenzfläche	2.3.1
$z_n$	Höhe der $n$ -ten Atmosphärenschicht	3.3.1

## D.2 Griechische Symbole

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
$\gamma$	<i>Newtonsche</i> Gravitationskonstante ( $\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ )	2.2.1
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol	2.1.2
$\epsilon_{ijk}$	Levi-Civita-Symbol	2.1.2
$\theta_{\text{air}}$	Lufttemperatur	3.2
$\vartheta$	Winkel zwischen $X_3$ -Achse und $X_i$	3.4.2
$\kappa$	Normierte Hankel-Wellenzahl	4.1.2
$\lambda_l$	Erste Lamé-Konstante für $l$ -te Halbraumschicht	2.1.1
$\mu_l$	Zweite Lamé-Konstante für $l$ -te Halbraumschicht	2.1.1
$\rho_l$	Volumenmassendichte für $l$ -te Halbraumschicht	2.1.1
$\rho_{\text{air}}$	Luftdichte	3.2
$\bar{\rho}_{\text{air}}$	Mittlere Luftdichte	3.4.1
$\Delta\rho_l$	Dichtesprung an $l$ -ter Grenzfläche ( $\Delta\rho_l = \rho_l - \rho_{l-1}$ )	2.3.3
$\tau_{ij}$	Piola-Kirchhoff-Spannung	2.2.1
$\varphi$	Azimut	2.3.1
$\phi$	Schwerepotential	2.2.1

