

**GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM**  
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

---

# Scientific Technical Report

ISSN 1610-0956

Volker Klemann

Ebene kompressible viskoelastische Erdmodelle:  
Anwendung auf glazial-isostatische Deformationen  
der Lithosphäre

2003



Geophysik

Ebene kompressible viskoelastische Erdmodelle:  
Anwendung auf glazial-isostatische Deformationen  
der Lithosphäre

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich der Physik  
an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Volker Klemann  
aus Gütersloh  
– 2003 –

---

Dekan:	Prof. Dr. Helmut Zacharias
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Ulrich Hansen
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Detlef Wolf
Tag der mündlichen Prüfung:	5. Dezember 2003
Tag der Promotion	5. Dezember 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Summary</b>	<b>4</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>4</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Gravito-Viskoelastodynamik . . . . .	5
1.2 Lithosphäre . . . . .	6
1.3 Zielsetzung der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Gravito-Viskoelastodynamik</b>	<b>9</b>
2.1 Kinematische Formulierung für ein geschichtetes Kontinuum . . . . .	9
2.1.1 Konfigurationen . . . . .	9
2.1.2 Lagrange'sche Formulierung . . . . .	11
2.1.3 Euler'sche Formulierung . . . . .	12
2.1.4 Materielle und räumliche Inkremente . . . . .	13
2.1.5 Grenzflächenbedingungen . . . . .	13
2.1.6 Integraldarstellungen . . . . .	14
2.2 Mechanische Feldgleichungen . . . . .	16
2.2.1 Kontinuitätsgleichung . . . . .	16
2.2.2 Bewegungsgleichung . . . . .	16
2.2.3 Materialgleichung . . . . .	18
2.3 Gravitative Feldgleichungen . . . . .	21
2.3.1 Potentialgleichung . . . . .	21
2.3.2 Schweregleichung . . . . .	22
2.4 Grenzflächenbedingungen . . . . .	23
2.4.1 Mechanische Feldgrößen . . . . .	23
2.4.2 Gravitative Feldgrößen . . . . .	25
2.5 Linearisierung der Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen . . . . .	26
2.5.1 Totalfelder . . . . .	26
2.5.2 Referenzfelder . . . . .	27
2.5.3 Inkrementialfelder . . . . .	28
2.6 Resumé . . . . .	30
<b>3 Lösung der inkrementiellen Feldgleichungen für ein geschichtetes Kontinuum</b>	<b>31</b>
3.1 Lösungsansatz für die mechanischen Feldgleichungen . . . . .	33
3.2 Lösungsansatz für die gravitativen Feldgleichungen . . . . .	37
3.3 Maxwell-Viskoelastizität . . . . .	38
3.4 Näherungslösungen . . . . .	39
3.4.1 Kompressibilität ohne Schwere . . . . .	40
3.4.2 Kompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung . . . . .	40
3.4.3 Kompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung und internem Auftrieb . . . . .	41

3.4.4	Inkompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung	43
3.5	Rücktransformation in den Raum-Zeit-Bereich	43
3.5.1	Inverse Laplace-Transformation mit Hilfe des Bromwich-Integrals	44
3.5.2	Faltung mit der Heaviside-Funktion	45
3.5.3	Inverse diskrete Hankel-Transformation	47
3.6	Resumé	48
<b>4</b>	<b>Homogener viskoelastischer Halbraum</b>	<b>49</b>
4.1	Störungen eines elastischen Halbraumes	50
4.1.1	Verschiebungen	50
4.1.2	Schwere	52
4.1.3	Energiebilanz	52
4.1.4	Deformationsverhalten	54
4.2	Störungen eines viskoelastischen Halbraumes	54
4.2.1	Spektrale Darstellung der Lösung	55
4.2.2	Kontinuierliches Spektrum	58
4.2.3	Zeitliche Entwicklung nach Heaviside'scher Belastung	62
4.3	Resumé	63
<b>5</b>	<b>Kompressible elastische Lithosphäre über Halbraum</b>	<b>67</b>
5.1	Dünne-Platten-Näherung	68
5.2	Störungen bei inviskosem Halbraum	69
5.3	Störungen bei viskoelastischem Halbraum	71
5.4	Resumé	74
<b>6</b>	<b>Inkompressible viskoelastische Lithosphäre über Halbraum</b>	<b>75</b>
6.1	Störungen bei duktiler Schicht in der unteren Kruste	76
6.1.1	Physikalische Prozesse in der duktilen Schicht	77
6.1.2	Parametrisierung des Erdmodelles	78
6.1.3	Relaxationsmoden des Erdmodelles	78
6.1.4	Viskositätskontrast zwischen Kruste und Mantel	79
6.1.5	Dichtekontrast zwischen Kruste und Mantel	81
6.1.6	Zeitskalen der Prozesse	82
6.1.7	Verbiegung der Lithosphäre	85
6.1.8	Berücksichtigung der Asthenosphäre	87
6.2	Störungen bei viskoelastischer Mantellithosphäre	90
6.2.1	Definition der Lithosphärenbasis	90
6.2.2	Parametrisierung des Erdmodelles	90
6.2.3	Relaxationsmoden des Erdmodelles	93
6.2.4	Verbiegung der Lithosphäre	94
6.3	Resumé	95
	<b>Ausblick</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Komponenten verschiedener Feldgrößen in Zylinderkoordinaten</b>	<b>99</b>
A.1	Bessel-Funktionen	99
A.2	Definition der Zylinderkoordinaten	100
A.3	Feldgrößen für eine spektrale Last	100
A.3.1	Verzerrung	101
A.3.2	Deviator der Verzerrung	102
A.3.3	Spannung	102

A.3.4	Potentialbeiträge des inkrementiellen Zustandes	102
A.4	Hankel-transformierte Lastquerschnitte	104
<b>B</b>	<b>Integration der inkrementiellen Feldgleichungen</b>	<b>107</b>
B.1	Mechanische Feldgleichungen	107
B.1.1	Fundamentalsystem	107
B.1.2	Sylvestrisches Interpolationspolynom	109
B.1.3	Anpassung an die Randbedingungen	110
B.1.4	Lösung für homogenen Halbraum	111
B.2	Gravitative Feldgleichungen	111
B.2.1	Sylvestrisches Interpolationspolynom	111
B.2.2	Anpassung an die Randbedingungen	112
B.2.3	Quellterm in Folge des Dichteinkrementes	113
B.2.4	Lösung für homogenen Halbraum	114
B.3	Explizite Form der Näherungslösungen	114
B.3.1	Näherung C0	114
B.3.2	Näherung C1	117
B.3.3	Näherung C2	120
B.3.4	Näherung IC	124
<b>C</b>	<b>Eigenschaften der spektralen Lösungen</b>	<b>127</b>
C.1	Anwendung der Variationsrechnung	127
C.2	Physikalische Bedeutung der Relaxationsmoden	129
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>132</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>140</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>142</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>147</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>149</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>150</b>

## Summary

The work contained in this thesis considers deformations of the Earth, which are produced by the loads of the last ice-age glacial sheets. The forces the Earth sets against the surface loads are the buoyancy force of the Earth's mantle and the opposing force by the elastic flexure of the lithosphere. Because the time scale of the ice-age of some 100,000 years is short with respect to geological time scales, the viscoelastic behaviour of the Earth has to be considered. Viscoelasticity results in a retarded response of the Earth, which is observed as postglacial uplift in previously glaciated regions, 8,000 years after deglaciation.

To model the buoyancy of the Earth's mantle, often a viscous incompressible fluid of homogeneous density is assumed. More recent studies consider also compressibility of the mantle material, but keep the homogeneous density. This results in an inconsistent reference state, because the self compression due to hydrostatic pressure is neglected. These models are discussed here, and the problems are shown, which arise from the description of the field equations for a viscoelastic compressible gravitating continuum in a half-space geometry.

The opposing force by the elastic flexure of the lithosphere is determined by the flexural rigidity of the lithospheric plate. If we consider viscoelastic layers in the lithosphere, the flexural rigidity is reduced. Therefore, the overall thickness of a viscoelastic layered lithosphere is much larger than its effective elastic thickness deduced from assuming one elastic plate. Consequently the effective elastic thickness loses its merit for assessing the lithosphere thickness. We show, how strong effective elastic thickness and lithosphere thickness may differ, in which way the viscoelastic structure of the Earth influences this difference for glacial loads and which consequences arise for the lithospheric stress state.

## Zusammenfassung

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Deformationen des Erdkörpers, die durch die Auflasten der eiszeitlichen Eisschilde hervorgerufen werden. Die Kräfte, die der Erdkörper dabei den Auflasten entgegensetzt, sind die Auftriebskraft des Erdmantels und die Gegenkraft durch die elastische Verbiegung der Lithosphäre. Für den hinsichtlich geologischer Zeitskalen recht kurzfristigen eiszeitlichen Belastungsprozess von wenigen hunderttausend Jahren muss zusätzlich noch das viskoelastische Verhalten des Erdkörpers berücksichtigt werden, das zu einer verzögerten Antwort des Erdkörpers führt, und noch heute, ca. 8000 Jahre nach Ende der letzten Vereisung, in einer nacheiszeitlichen Hebung der vormals vereisten Gebiete beobachtet wird.

Um den Auftrieb durch den Erdmantel zu modellieren, wird dieser häufig durch eine viskose inkompressible Flüssigkeit homogener Dichte beschrieben. Neuere Arbeiten berücksichtigen auch die Kompressibilität des Mantelmaterials, behalten jedoch die homogene Dichte bei, wodurch sich das Kontinuum in keinem konsistenten Anfangszustand befindet, da die Eigenkompression durch den lithostatischen Druck vernachlässigt wird. Diese Modelle werden in der Arbeit diskutiert, und die Probleme aufgezeigt, die sich bei der Lösung der viskoelastischen Bewegungsgleichung für eine Halbraumgeometrie ergeben.

Die Gegenkraft aus der elastischen Verbiegung der Lithosphäre wird durch ihre Biegesteifigkeit bestimmt. Nehmen wir viskoelastische Schichten innerhalb der Lithosphäre an, so setzen diese die Biegesteifigkeit herab. Somit ist die Mächtigkeit einer viskoelastisch geschichteten Lithosphäre weitaus größer als die sich allein aus einer elastischen Schicht ableitbaren effektiven elastischen Dicke. Die effektive elastische Dicke verliert damit ihren Stellenwert für die Abschätzung der Lithosphärenmächtigkeit. Wir zeigen, wie weit effektive elastische Dicke und Lithosphärenmächtigkeit differieren können, wie die Viskositätsstruktur diese Differenz für glaziale Auflasten beeinflusst und welche Konsequenzen sich daraus für den Spannungszustand der Lithosphäre ergeben.

Mit welchem Recht drängt sich  
Gegenwart vor? Imagination hieß  
die Herrin der Welt.

Erhard Kästner

# 1

---

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der durch Auflasten verursachten Deformation des Erdkörpers. Die Auflasten können dabei Luftdruckvariationen, Meeresspiegeländerungen, Eisschilde oder Gebirge sein. Um dabei den ‘Festkörper’ Erde realistisch zu modellieren, wird das Problem kontinuumsmechanisch mit Hilfe der Gravito-Viskoelastodynamik (GVED)<sup>1</sup> für ebene Geometrie formuliert. Obwohl die Erde nahezu Kugelgestalt hat, ist die Annahme einer flachen Erde bei kleinräumigen Deformationen, für die die Krümmung der Oberfläche vernachlässigbar ist, von Interesse. Die Form der Lösungen ist in diesem Fall einfacher als für sphärische Geometrie und die numerische Berechnung stabiler. Die GVED beschreibt im Wesentlichen folgende Eigenschaften eines Kontinuums: 1. Das Kontinuum reagiert auf Anregungen viskoelastisch, d. h. dass neben dem aktuellen Spannungszustand auch die Belastungsgeschichte in den aktuellen Deformationszustand eingeht. 2. Das Kontinuum unterliegt im ungestörten Zustand der durch die Schwere erzeugten hydrostatischen Vorspannung. 3. Das mechanische und das gravitative Verhalten sind gekoppelt. Die letzte Eigenschaft ist bei der Behandlung für ebene Geometrie problematisch, so dass nicht von vorneherein klar ist, ob die vollständige Form der Feldgleichungen das Deformationsverhalten der Erde adäquat wiedergibt (Amelung & Wolf, 1994). Häufig wird bei der Beschreibung des Verhaltens des Kontinuums die Kompressibilität vernachlässigt. Ihr Einfluss auf die Lösungen der GVED wird in dieser Arbeit anhand verschiedener Näherungen betrachtet und für die Deformation eines homogenen Halbraumes bzw. einer elastischen Lithosphäre über einem homogenen Halbraum berechnet. Eine konventionelle Annahme dabei ist, die Lithosphäre als elastische Schicht zu modellieren. In dieser Arbeit wird insbesondere der Einfluss der Viskoelastizität der Lithosphäre auf die glazial isostatische Ausgleichsbewegung (GIA)<sup>2</sup> untersucht.

### 1.1 Gravito-Viskoelastodynamik

Die Feldgleichungen, der GVED wurden bereits von Love (1911) für ein elastisches Materialgesetz formuliert. Auf ihr basieren die Berechnung der Eigenschwingungen der Erde (Alterman *et al.*, 1959; Lapwood & Usami, 1981) sowie der Gezeitendeformationen und Auflastdeformationen, für die der Trägheitsterm in der Bewegungsgleichung vernachlässigt ist (Takeuchi *et al.*, 1962). Die zunächst elastisch formulierten Feldgleichungen wurden später auf eine Maxwell-Rheologie übertragen (Parsons, 1972; Peltier, 1974; Cathles, 1975; Nakiboglu & Lambeck, 1980; Wolf, 1985b, 1991a). Theoretisch kann die GVED aus folgenden Grundlagen hergeleitet werden: 1. der topologischen Beschreibung eines geschichteten Kontinuums und materieller Tensorfelder sowie den damit verbundenen Abbildungsvorschriften für kleine Deformationen, 2. den Erhaltungssätzen für Masse und Impuls, 3. den allgemeinen Prinzipien für ein lineares Materialgesetz,

---

<sup>1</sup> engl. Gravito-ViscoElastoDynamics

<sup>2</sup> engl. Glacial Isostatic Adjustment

4. der Definition des Newton-Potentials und der Schwere und 5. der Theorie kleiner Störungen. Damit ist es möglich, die Feldgleichungen zu linearisieren und getrennt nach den Referenzfeldern, die den Ausgangszustand beschreiben, und den Inkrementialfeldern, die eine Störung beschreiben, zu betrachten. Bei der Behandlung quasi-statischer Deformationen, d. h. bei Vernachlässigung des Trägheitsterms, können die Lösungen der inkrementiellen Feldgleichungen im Laplace-Bereich durch ein diskretes Spektrum von Eigenfunktionen bzw. Relaxationsmoden dargestellt werden (Peltier, 1974, 1976; Wu & Peltier, 1982). Eine übliche Vereinfachung ist dabei die Annahme von InkompRESSIBILITÄT, so dass die Materialparameter in den einzelnen Schichten homogen sind. Sieht man das Material dagegen als kompressibel an, stellt ein homogener viskoelastischer Körper keinen konsistenten Ausgangszustand dar (Love, 1911; Wolf, 1991a). Trotz dieser Inkonsistenz, d. h. der Untersuchung kompressibler Störungen eines aus homogenen Schichten bestehenden Körpers zu betrachten, ist dieser Ansatz sowohl für die Modellierung von Eigenschwingungen als auch für die Modellierung der GIA verbreitet. Jeans (1903) und Love (1908) wiesen bereits auf die Folgen dieser Vereinfachungen für eine elastische Kugel hin, die darin bestehen, dass der Ausgangszustand der Erdkugel bei zu großer Elastizität und Kompressibilität instabil ist. Die damit verbundenen Probleme für die Modellierung einer viskoelastischen Kugel wurden von Plag & Jüttner (1995), Hanyk *et al.* (1999) sowie Vermeersen & Mitrovica (2000) diskutiert. Im Wesentlichen treten dabei Rayleigh-Taylor-Instabilitäten auf, und das Spektrum der Relaxationsmoden erweitert sich um eine unendliche Anzahl sogenannter D-Moden. Tromp & Dahlen (1990) erwähnten die Existenz zusätzlicher Singularitäten im Eigenschwingungsspektrum einer viskoelastischen Kugel, die sie aber nicht berücksichtigten. Wiczerkowski (1999) fand Instabilitäten für Jupitergezeiten auf Io und konnte diese den elastischen Instabilitäten von Love (1908) zuordnen. Inwieweit sich diese Charakteristika auf die Modellierung kompressibler Störungen für ebene Geometrie übertragen, wird in dieser Arbeit untersucht. Bei Betrachtung von Oberflächenwellen zeigen sich kontinuierliche Anteile im Spektrum, die mit dem inkonsistenten Ausgangszustand verbunden sind (Maupin, 1996). Für das hier untersuchte Auflastproblem wird gezeigt, dass die Ergebnisse einer ähnlichen Untersuchung von Purcell (1998) teilweise revidiert werden müssen.

## 1.2 Lithosphäre

Die Berücksichtigung der Lithosphäre bei der Interpretation der GIA unterlag einer wechselvollen Geschichte. Wie Wolf (1993) ausführte, wurde ihre Bedeutung zu Beginn des vergangenen Jahrhunderts mit der des oberen Mantels als Substratum gleichgesetzt. Dies änderte sich mit den Arbeiten von van Bemmelen & Berlage (1935) und Haskell (1935), die den Einfluss der Lithosphäre als unbedeutend einstufte und sie in ihren Modellierungen vernachlässigten. Dass dieser Ansatz ungenügend war, zeigte McConnell (1965), der die Bedeutung der Lithosphäre als elastische Deckschicht eines viskos geschichteten Erdmodells hervorhob. Seitdem wurde das originäre Konzept wieder aufgegriffen, die Lithosphäre als kompetente Schicht zu berücksichtigen, „die die Fähigkeit hat, die Ausgleichsbewegung zu beeinflussen“ (Wolf, 1993), jedoch mit der Einschränkung, dass sie vor Allem in den Randgebieten der pleistozänen Eisschilde von Bedeutung ist.

Damit wurde die GIA vor Allem in Hinblick auf die Materialeigenschaften des Erdmantels interpretiert, wobei der Bestimmung der Mantelviskosität mit  $10^{21}$  Pa s durch Haskell (1935) große Bedeutung beizumessen ist (Mitrovica, 1996). Die Wissenschaft konzentrierte sich auf die Viskositätsstruktur des Erdmantels, maß der Lithosphäre nur die Bedeutung einer elastischen

Randbedingung zu und modellierte sie in der Dünne-Platten-Näherung (TPA)<sup>1</sup> (Walcott, 1970). Als einziger Parameter war die Biegesteifigkeit von Interesse, die die Deformation in der Nähe des Lastrandes dominiert und aus der eine elastische Dicke abgeleitet werden kann. Die Werte, die in der Literatur genannt werden, schwanken zwischen 50 km und mehr als 200 km für die kratonischen Gebiete von Fennoskandien und Nordamerika (Wolf, 1993). Gleichzeitig hängen die aus Belastungsprozessen bestimmten elastischen Dicken auch von der lateralen Ausdehnung der Last, der Belastungsdauer und dem Alter der Lithosphäre ab (z. B. Burov & Diament, 1995). Diese Werte stehen im Widerspruch zu Lithosphärendicken von 200 bis 400 km, die durch Erkundungsverfahren wie Seismologie, Geoelektrik oder Geothermie bestimmt wurden (z. B. Calcagnile, 1982; Balling, 1995). Die Diskrepanz führte zu Differenzierungen des Begriffes Lithosphäre, so dass man heute zwischen der seismologischen Lithosphäre (LID), der thermischen und der rheologischen Lithosphäre unterscheidet (Anderson, 1995). Die *seismologische* Lithosphäre bezeichnet den Übergang zu signifikant geringeren seismischen Scherwellengeschwindigkeiten, die *thermische* Lithosphäre bezeichnet den Bereich, in dem der Wärmetransport rein konduktiv erfolgt, und grenzt damit den konvektiv wärmetransportierenden Bereich des Mantels ab; die *rheologische* Lithosphäre bezeichnet den Bereich, in dem das Material für geologische Zeitskalen elastisch reagiert. Die rheologische Lithosphäre stimmt noch am Besten mit dem ursprünglichen Konzept überein, “a surface shell of the earth with the capacity of sustaining long-enduring stress differences without significant flow“ [Von Hochstetter (1880, S. 3) nach Wolf (1993)]. Mit dem Modell einer temperaturaktivierten Rheologie (Ranalli & Murphy, 1987) kann man die rheologische Lithosphäre durch eine Geotherme von 450°C–600°C definieren. Ein weiteres Strukturmerkmal, das die Biegeeigenschaften einer elastischen Lithosphäre signifikant beeinflusst, sind Schwächezonen innerhalb der Lithosphäre, die zum Beispiel durch die Materialänderung von der Kruste zum Mantel verursacht werden (Turcotte *et al.*, 1984; Kruse *et al.*, 1991). Dabei entkoppelt die Schwächezone in der Unterkruste die elastische obere Kruste von der elastischen Mantellithosphäre bezüglich der Scherkräfte, was die Biegesteifigkeit der gesamten Lithosphäre erheblich reduziert. Dies kann zu einer vollständigen Entkopplung der oberen Kruste führen.

Überträgt man diese rheologischen Charakteristika der Lithosphäre, die im Wesentlichen tektonische Prozesse beschreiben, auf die GIA, ergibt sich das Problem der sehr viel geringeren Belastungsdauer. Die GIA läuft auf Zeitskalen zwischen  $10^4$  und  $10^6$  a ab, wohingegen geologische Zeitskalen bei  $> 10^7$  a beginnen. Damit müssen die rheologischen Erkenntnisse zu kleineren Belastungsdauern extrapoliert werden. Hinzu kommt, dass die rheologischen Gesetze in der Lithosphäre auf diesen Zeitskalen unzureichend sind, zumal die Kriechraten von nur  $10^{-15} \text{ s}^{-1}$  sehr viel geringer sind als die im Labor reproduzierbaren von  $10^{-8} \text{ s}^{-1}$  (z. B. Ranalli & Murphy, 1987; Kohlstedt *et al.*, 1995). In dieser Arbeit werden die beiden Aspekte einer viskoelastischen Lithosphäre, duktile Schwächezone in der Kruste und viskoelastische Mantellithosphäre, in Hinblick auf die GIA behandelt. Bezüglich einer duktilen Schwächezone innerhalb einer elastischen Lithosphäre wird hier erstmals die Wichtigkeit des Viskositätskontrastes zwischen dieser Schicht und dem oberen Mantel erörtert. Desweiteren wird, ausgehend von einem *nichtlinearen* rheologischen Gesetz, eine lineare viskoelastische Parametrisierung der Mantellithosphäre abgeleitet.

Ein weiterer Grund, die Lithosphäre bei der Modellierung der GIA zu berücksichtigen, ist die Untersuchung der Horizontalbewegung, da sie in stärkerem Maße als die Vertikalkomponente von der oberflächennahen Struktur der Lithosphäre abhängt. Die durch die GIA verursachten horizontalen Geschwindigkeiten liegen dabei eine Größenordnung unter Vertikalen Geschwindigkeiten und konnten erst ab ca. 1990 durch die Verbesserung vorhandener Messtechniken wie

---

<sup>1</sup> engl. Thin Plate Approximation

VLBI<sup>1</sup> und die Entwicklung Satelliten gestützter Methoden wie SLR<sup>2</sup> oder GPS<sup>3</sup> mit der nötigen Genauigkeit von  $< 1 \text{ mm/a}$  gemessen werden (James & Morgan, 1990). Auf Grund der großen Basislängen bei VLBI werden die mit dieser Methode gemessenen Geschwindigkeitsvektoren durch die Radialkomponente der Bewegung beeinflusst (James & Lambert, 1993). Erst mit GPS ist es möglich die Horizontalbewegung unabhängig von der Basislänge als Tangentialkomponente mit der nötigen Genauigkeit zu beobachten.

### 1.3 Zielsetzung der Arbeit

Die Ziele dieser Arbeit lassen sich in folgenden Punkten zusammenfassen:

- Herleitung der die Gravito-Viskoelastodynamik (GVED) beschreibenden Feldgleichungen für ein geschichtetes Kontinuum aus allgemeinen Prinzipien
- Bestimmung der allgemeinen Lösungen für inkompressible und kompressible Deformationen eines geschichteten Halbraumes für verschiedene Näherungen der GVED
- Diskussion der Näherungen in Bezug auf Stabilität anhand der Energiebeiträge zur Deformation und anhand der zeitlichen Entwicklung der Deformationen an der Oberfläche
- Einfluss einer kompressiblen elastischen Lithosphäre auf die Ausgleichsbewegung eines viskoelastischen Halbraumes bei Auflast
- Deformationsverhalten einer viskoelastischen Lithosphäre und ihr Einfluss auf die Ausgleichsbewegung

Dazu werden in [Kap. 2](#) die Grundlagen der kinematischen Formulierung für einen mehrschichtigen Halbraum dargestellt und aus allgemeinen Erhaltungssätzen in dieser Formulierung die Feldgleichungen der GVED hergeleitet. In [Kap. 3](#) werden die Feldgleichungen für ein zylindersymmetrisches Problem gelöst und die analytischen Lösungen für verschiedene Näherungen der GVED in [Anh. B](#) angegeben. Mathematische Hilfsmittel sind dazu in [Anh. A](#) und [B](#) zusammengestellt. In [Kap. 4](#) wird das Verhalten der Näherungen für einen homogenen Halbraumes diskutiert und in [Kap. 5](#) in Bezug auf das Deformationsverhalten einer elastischen Lithosphäre betrachtet. In [Kap. 6](#) wird das Verhalten einer viskoelastisch geschichteten Lithosphäre über einem viskoelastischen Halbraum untersucht. Da das Verhalten der Lösungen über ihre Relaxationsspektren beschrieben werden kann, sind deren Hauptcharakteristika in [Anh. C](#) zusammengestellt. Verzeichnisse der verwendeten Abkürzungen und mathematischen Symbole sowie der erscheinenden Abbildungen und Tabellen schließen sich an das Literaturverzeichnis an.

---

<sup>1</sup> engl. Very Long Baseline Interferometry

<sup>2</sup> engl. Satellite Laser Ranging

<sup>3</sup> engl. Global Positioning System

## Gravito-Viskoelastodynamik

In diesem Kapitel werden die Feldgleichungen vorgestellt, die das mechanische Verhalten eines als Kontinuum<sup>1</sup> aufgefassten Körpers beschreiben. In [Abschn. 2.1, S. 9](#) stellen wir nach [Wolf \(1997, S. 12\)](#) die Kinematik eines Kontinuums in kartesischen Koordinaten dar, wobei wir uns auf kleine Auslenkungen beschränken. In dieser Darstellung leiten wir in [Abschn. 2.2, S. 16](#) die mechanischen Feldgleichungen her, die sich aus der Massenerhaltung und Impulserhaltung ergeben. Die Materialgleichung fassen wir als lineares hereditäres Relaxationsfunktional auf. Die gravitativen Feldgleichungen ergeben sich aus dem Newton-Potential und bestimmen das durch die Dichteverteilung hervorgerufene Schwerepotential und die dadurch verursachte Schwere ([Abschn. 2.3, S. 21](#)). Die Grenzflächenbedingungen an den Schichtgrenzen folgern wir entsprechend aus den Erhaltungssätzen und der Definition des Schwerepotentials ([Abschn. 2.4, S. 23](#)). Um die Feldgleichungen zu linearisieren, teilen wir die Totalfelder in Referenzfelder auf, die den hydrostatischen Ausgangszustand beschreiben, und Inkrementialfelder, die durch eine kleine Störung aus dem Ausgangszustand hervorgehen ([Abschn. 2.5, S. 26](#)).

In dem Kapitel wird die in der Kontinuumsmechanik gebräuchliche Indexnotation für kartesische Koordinaten verwendet, die die Einstein'sche Summationskonvention einschließt.<sup>2</sup>

### 2.1 Kinematische Formulierung für ein geschichtetes Kontinuum

In diesem Abschnitt wird für ebene Geometrie die kinematische Formulierung der Bewegung eines Kontinuums und die Darstellung in tensoriellen Feldgrößen vorgestellt, die die physikalischen Eigenschaften des Kontinuums beschreiben (siehe [Wieczerkowski, 1999](#), Kapitel 2).

#### 2.1.1 Konfigurationen

Um das Kontinuum in verschiedenen Zuständen zu beschreiben, folgen wir der Darstellung von [Truesdell & Noll \(1992\)](#). Die Autoren unterscheiden dabei verschiedene geometrische Konfigurationen und zulässige Koordinatentransformationen zwischen diesen, die den Begriff einer Bewegung mathematisch fassen.

##### Referenzkonfiguration

Das deformierbare Kontinuum  $\mathcal{B}$  sei eine dreidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit<sup>3</sup> und werde durch bijektive Abbildungen, die im Folgenden als Konfigurationen bezeichnet wer-

---

<sup>1</sup> Der Begriff Kontinuum bezeichnet einen stetig mit Materie gefüllten Raum.

<sup>2</sup> Eine Einführung in diese Notation findet sich in [Wolf \(1997, S. 12\)](#).

<sup>3</sup> Differenzierbare Mannigfaltigkeit ist der mathematische Begriff für ein Kontinuum ohne Definition eines Bezugssystems.

den, in den dreidimensionalen Euklid'schen Raum  $\mathbb{R}^3$  abgebildet. Über die Referenzkonfiguration

$$\xi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{X}_+ \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

definieren wir die Geometrie des Kontinuums. Jedem Materiepunkt wird dabei ein Koordinatentripel  $(X_1, X_2, X_3)$  zugeordnet, das wir als Referenzposition bezeichnen. Die Geometrie ist so gewählt, dass das Kontinuum den internen Halbraum  $\mathcal{X}_+$  mit  $X_3 > 0$  einnimmt. Für den nicht mit Materie gefüllten externen Halbraum  $\mathcal{X}_- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{X}}_+$  gilt  $X_3 < 0$ .  $\overline{\mathcal{X}}_+$  bezeichnet dabei den Abschluss der Menge  $\mathcal{X}_+$ ,<sup>1</sup>

Um verschiedene isochemische Bereiche des Kontinuums zu unterscheiden, bestehe  $\mathcal{X}_+$  aus  $L$  ebenen Schichten (disjunkte offene Mengen)  $\mathcal{X}_+^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ , wobei  $l = 1$  die Schicht bezeichnet, die an den externen Halbraum grenzt:

$$\mathcal{X}_+ = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{X}_+^{(l)}. \quad (2.2)$$

Der Teil  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$  des Randes einer Schicht  $\overline{\mathcal{X}}_+^{(l)} \setminus \mathcal{X}_+^{(l)}$  beschreibt die Grenzfläche, die für  $l = 1$  den Übergang zum externen Halbraum  $\mathcal{X}_-$  und für  $l = 2, \dots, L$  den Übergang zur Schicht  $\mathcal{X}_+^{(l-1)}$  festlegt, wobei die Schichten des Kontinuums aneinander grenzen sollen (Anh. 2.1, S. 10). Für die Schichten  $l > 1$  gilt dann

$$\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)} = \overline{\mathcal{X}}_+^{(l)} \cap \overline{\mathcal{X}}_+^{(l-1)}. \quad (2.3)$$

Der Bereich des Randes

$$\partial^\infty \mathcal{X}_+ := \partial \mathcal{X}_+ \setminus \partial^I \mathcal{X}_+^{(1)} \quad (2.4)$$

beinhaltet für die Schichten  $\mathcal{X}_+^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ , die unendliche laterale Ausdehnung und für  $\mathcal{X}_+^{(L)}$  auch die unendliche vertikale Ausdehnung ( $X_3 \rightarrow \infty$ ).

### Aktuelle Konfiguration

Die aktuelle Konfiguration  $\rho$  des Kontinuums  $\mathcal{B}$ ,

$$\rho : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{R}_+ \subset \mathbb{R}^3, \quad (2.5)$$

in der jedem Materiepunkt das Koordinatentripel  $(r_1, r_2, r_3)$  zugeordnet ist, geht durch einen differenzierbaren Homöomorphismus<sup>2</sup>  $\chi$ , der im Folgenden als Bewegung bezeichnet wird, aus der Referenzkonfiguration  $\xi$  hervor (Noll, 1958):

$$\chi : \mathcal{X}_+ \longrightarrow \mathcal{R}_+. \quad (2.6)$$

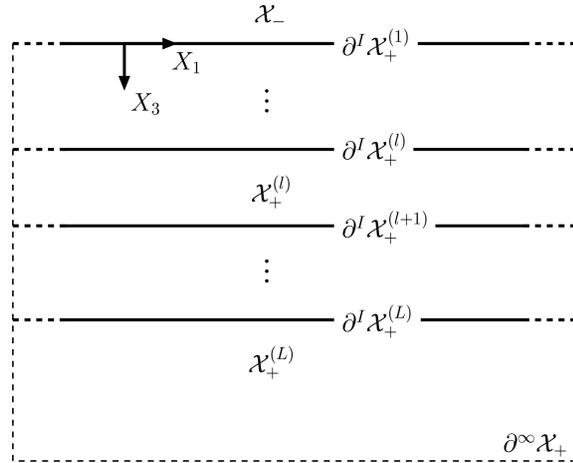


Abbildung 2.1: Geometrie des geschichteten Halbraumes in der Referenzkonfiguration.

<sup>1</sup> Der Abschluss einer Menge geht aus dieser hervor, indem man alle Häufungspunkte der Menge hinzufügt.

<sup>2</sup> Ein Homöomorphismus ist eine stetige bijektive Abbildung, deren Inverse ebenfalls stetig ist.

Demzufolge stellt  $\mathcal{R}_- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{R}_+}$  den externen Halbraum in der aktuellen Konfiguration dar. Mit dieser Einschränkung von  $\chi$  wird gewährleistet, dass keine Risse, Durchdringungen und Nihilationen innerhalb des Kontinuums auftreten, jede Teilmenge über

$$\chi: \mathcal{X}_+^{(l)} \longrightarrow \mathcal{R}_+^{(l)} \quad (2.7)$$

abgebildet wird und sich das Kontinuum  $\mathcal{B}$  im gestörten Zustand wiederum aus disjunkten Mengen zusammensetzt:

$$\mathcal{R}_+ = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{R}_+^{(l)}. \quad (2.8)$$

Sofern jede neue Konfiguration durch eine stetige Bewegung des Kontinuums eingenommen wird, ist es gerechtfertigt,  $\chi(t)$  als stetig differenzierbar nach der Zeit  $t \in \mathbb{R}$  anzusehen (Truesdell & Noll, 1992, S. 37ff.). Diese Betrachtungsweise bezeichnen wir als *materiell*, und es ist sinnvoll den Materiepunkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}_+$  in der Referenzkonfiguration von einem *Raumpunkt*  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  zu unterscheiden, an dem sich ein Materiepunkt zum Zeitpunkt  $t$  befindet (Marsden & Hughes, 1983, S. 2).

### 2.1.2 Lagrange'sche Formulierung

In der *Lagrange'schen Formulierung* wird zu jedem Zeitpunkt  $t$  die aktuelle räumliche Koordinate  $r_i$  eines Materiepunktes als Funktion seiner materiellen Koordinate  $X_i$  und seiner Verschiebung  $u_i$  angegeben, d. h. mit  $\chi$  identifiziert:

$$r_i = r_i(\mathbf{X}, t) := X_i + u_i(\mathbf{X}, t) \equiv \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}_+. \quad (2.9)$$

Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung eines Materiepunktes sind dementsprechend die erste und zweite *materielle* Zeitableitung von  $r_i$ :

$$v_i := d_t r_i := \frac{d}{dt} r_i(\mathbf{X}, t), \quad a_i := d_t^2 r_i := \frac{d^2}{dt^2} r_i(\mathbf{X}, t). \quad (2.10)$$

Eine tensorielle Feldgröße  $f_{ij\dots}$  an der Koordinate  $r_i$  sei in jeder Schicht so oft wie nötig stetig differenzierbar und werde durch seine materielle Koordinate  $X_i$  und ihre Änderung in  $t$  festgelegt:

$$f_{ij\dots} = f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}_+. \quad (2.11)$$

Wir bezeichnen sie deshalb als *materielle Feldgröße*. Ihre zeitliche Änderung ergibt sich durch die materielle Zeitableitung

$$d_t f_{ij\dots} := \frac{d}{dt} f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t). \quad (2.12)$$

Der *materielle Gradient* der Feldgröße wird in kartesischen Koordinaten wie folgt notiert:

$$f_{ij\dots,k} := \frac{\partial}{\partial X_k} f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t). \quad (2.13)$$

Insbesondere definiert

$$b_{ij} := r_{i,j} \quad (2.14)$$

den Bewegungsgradienten.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>  $b_{ij}$  wird auch als Deformationsgradient bezeichnet.

### 2.1.3 Euler'sche Formulierung

In der *Euler'schen Formulierung* ist der Raumpunkt eine unabhängige Variable. Damit ist der Materiepunkt  $X_i$  eine Funktion des Raumpunktes und der Verschiebung  $U_i = u_i$  und kann mit Hilfe von (2.9) mit der Inversen von  $\chi$  identifiziert werden:

$$X_i = X_i(\mathbf{r}, t) = r_i - U_i(\mathbf{r}, t) \equiv \chi^{-1}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R}_+. \quad (2.15)$$

Die Euler'sche Formulierung für eine tensorielle Feldgröße lautet

$$F_{ij\dots} = F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.16)$$

Eine Einschränkung des Definitionsbereiches auf  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_+$  ist nur dann möglich, wenn  $F_{ij\dots}$  eine materielle Feldgröße ist, d. h. eine Lagrange'sche Formulierung existiert (S. 10).

Die zeitliche Änderung einer Feldgröße bezogen auf  $r_i$  wird mit Hilfe der *räumlichen Zeitableitung*

$$\partial_t F_{ij\dots} := \frac{\partial}{\partial t} F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t) \quad (2.17)$$

beschrieben. Ist die Feldgröße materiell, existiert auch ihre materielle Zeitableitung (2.12),

$$d_t F_{ij\dots} = \partial_t F_{ij\dots} + F_{ij\dots,k} V_k, \quad (2.18)$$

wobei die Definition

$$F_{ij\dots,k} := \frac{\partial}{\partial r_k} F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t) \quad (2.19)$$

für den *räumlichen Gradienten* der Feldgröße verwendet worden ist.  $V_k$  stellt gemäß (2.10) die Geschwindigkeit des Kontinuums dar. Der räumliche Gradient der Referenzposition  $X_{i,j}$  ist gleich der Inversen  $b_{ij}^{-1}$  des Bewegungsgradienten,

$$b_{ij}^{-1} = X_{i,j}. \quad (2.20)$$

Materielle Feldgrößen stimmen in der Euler'schen und Lagrange'schen Formulierung überein:

$$F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t) = f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t). \quad (2.21)$$

Bilden wir in (2.21) den räumlichen Gradienten, verbindet nach Anwendung der Kettenregel und (2.20) die Beziehung

$$F_{ij\dots,k} = f_{ij\dots,l} b_{lk}^{-1} \quad (2.22)$$

den räumlichen mit dem materiellen Gradienten. Wählen wir als Feldgröße die Verschiebung, so erhalten wir mit (2.15) und (2.20) insbesondere

$$U_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,k} U_{k,j}, \quad (2.23)$$

so dass für kleine Verschiebungen der räumliche und der materielle Verschiebungsgradient übereinstimmen.

### 2.1.4 Materielle und räumliche Inkremente

Wir nehmen im Folgenden an, dass sich der Zustand des Kontinuums in der aktuellen Konfiguration nur geringfügig von seinem Zustand in der Referenzkonfiguration unterscheidet. Beschreiben wir die Zustände des Kontinuums durch materielle tensorielle Feldgrößen, kann der aktuelle Wert einer Feldgröße in der Lagrange'schen Formulierung als

$$f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) + f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) \quad (2.24)$$

geschrieben werden. Hierbei stellt  $f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X})$  die Feldgröße in der Referenzkonfiguration dar und wird im Folgenden als die den Ausgangszustand beschreibende Feldgröße bezeichnet.  $f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t)$  heißt *materielles Inkrement* und beschreibt die Änderung der Feldgröße bezüglich des Materiepunktes.

Im Unterschied zum materiellen Inkrement beschreibt das *räumliche Inkrement* in der Lagrange'schen Formulierung  $f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t)$  die Änderung einer Feldgröße bezüglich des Raumpunktes  $X_i$ , und das räumliche Inkrement in der Euler'schen Formulierung  $F_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{r}, t)$  die Änderung einer Feldgröße bezüglich des Raumpunktes  $r_i$  (Abb. 2.2). Für kleine Störungen kann ihre Differenz  $f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) - F_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{r}, t) \simeq [F_{ij\dots,k}^{(0)}(\mathbf{X}) - F_{ij\dots,k}(\mathbf{r}, t)] U_k(\mathbf{r}, t)$  vernachlässigt werden, so dass die räumlichen Inkremente gleich sind. Somit ist ihre Formulierung als Feldgröße konsistent, da für diese gemäß (2.21) Gleichheit gefordert wurde. Das *advective Inkrement*

$$f_{ij\dots}^{(\text{ad})}(\mathbf{X}, t) := f_{ij\dots,k}^{(0)}(\mathbf{X}) u_k(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) - f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) \quad (2.25)$$

verbindet das räumliche mit dem materiellen Inkrement (Abb. 2.2). Feldgrößen, die eine Zustandsänderung des Kontinuums verursachen, werden als Anregungen  $f_{ij\dots}^*(\mathbf{X}, t)$  bezeichnet.

### 2.1.5 Grenzflächenbedingungen

Die Unstetigkeit einer Feldgröße  $f_{ij\dots}$  an einer Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$  ist gegeben durch

$$[f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_-^+ := f_{ij\dots}^+(\mathbf{X}, t) - f_{ij\dots}^-(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}. \quad (2.26)$$

Dabei bezeichnen

$$f_{ij\dots}^+(\mathbf{X}, t) := \lim_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}} f_{ij\dots}(\mathbf{X}', t), \quad \mathbf{X}' \in \mathcal{X}_+^{(l)}, \quad (2.27)$$

$$f_{ij\dots}^-(\mathbf{X}, t) := \lim_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}} f_{ij\dots}(\mathbf{X}', t), \quad \mathbf{X}' \in \mathcal{X}_+^{(l-1)}. \quad (2.28)$$

Der Wert einer Feldgröße auf einer Grenzfläche wird bedarfsweise als Mittelwert definiert:

$$f_{ij\dots}^\pm(\mathbf{X}, t) := \frac{1}{2} [f_{ij\dots}^+(\mathbf{X}, t) + f_{ij\dots}^-(\mathbf{X}, t)], \quad \mathbf{X} \in \partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}. \quad (2.29)$$

Desweiteren sind Anregungen  $f_{ij\dots}^*(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{X} \in \partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$  auf den Grenzflächen erlaubt, so dass zum Beispiel

$$[f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_-^+ = f_{ij\dots}^+(\mathbf{X}, t) - f_{ij\dots}^-(\mathbf{X}, t) + f_{ij\dots}^*(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \partial^I \mathcal{X}_+^{(l)} \quad (2.30)$$

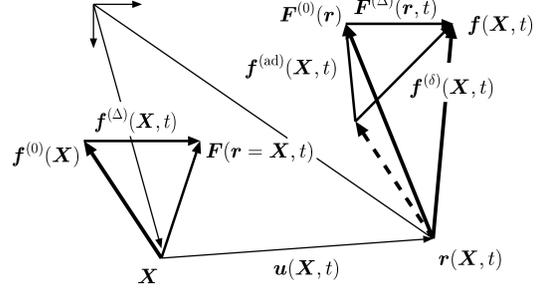


Abbildung 2.2: Inkremente tensorieller Feldgrößen. Der gestrichelte Vektor ist die Parallelverschiebung von  $\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{X})$  nach  $\mathbf{r}$ .

gilt.

Mit der Grenzflächenbedingung

$$[r_i(\mathbf{X}, t)]_{-}^{+} = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial^I \mathcal{X}_{+}^{(l)} \quad (2.31)$$

wird erreicht, dass zwei infinitesimal benachbarte Materiepunkte, die sich an der Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{X}_{+}^{(l)}$  gegenüberstehen, nach einer Bewegung infinitesimal benachbart bleiben und die Grenzfläche in der aktuellen Konfiguration  $\partial^I \mathcal{R}_{+}^{(l)}$  lautet. Mit dieser Einschränkung kann man die Definitionen (2.26)–(2.28) auch Euler'sch formulieren. Als *Regularitätsbedingung* gilt für die in dieser Arbeit betrachteten Bewegungen

$$|f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)| < \infty, \quad \mathbf{X} \in \partial^\infty \mathcal{X}_{+}. \quad (2.32)$$

### 2.1.6 Integraldarstellungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Transformationsregeln der Linien-, Flächen- und Volumenintegrale von der Euler'schen in die Lagrange'sche Formulierung. Zu diesem Zweck definieren wir die differentiellen Elemente als Feldgrößen, und schreiben für das räumliche Linien-, Flächen- bzw. Volumenelement<sup>1</sup>

$$dS_i(\mathbf{r}) := dr_i, \quad dA_i(\mathbf{r}) := d^2 r_i, \quad dV(\mathbf{r}) := d^3 r \quad (2.33)$$

und entsprechend für das materielle Linien-, Flächen- bzw. Volumenelement,

$$ds_i^{(0)}(\mathbf{X}) := dX_i, \quad da_i^{(0)}(\mathbf{X}) := d^2 X_i, \quad dv^{(0)}(\mathbf{X}) := d^3 X. \quad (2.34)$$

Ein Teilvolumen  $\mathcal{V}_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}_{+}$  der Referenzkonfiguration wird entsprechend (2.6)

$$\chi: \mathcal{V}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{R}} \quad (2.35)$$

bewegt, wobei  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}_{+}$  gilt. Integrieren wir eine Feldgröße  $F_{ij\dots}$  über das aktuelle Volumen  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ , gilt mit (2.21)

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t) dV(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) dv(\mathbf{X}, t). \quad (2.36)$$

in der Lagrange'schen Formulierung (rechts) ist das räumliche Volumenelement, für das gemäß (2.21)  $dv(\mathbf{X}, t) = dV(\mathbf{r})$  gilt, eine von der Bewegung abhängende Feldgröße. Die Transformationsregel für ein räumliches Volumenelement in ein materielles Volumenelement lautet (z. B. Malvern, 1969, S. 208)

$$dv(\mathbf{X}, t) = |j(\mathbf{X}, t)| dv^{(0)}(\mathbf{X}) \quad (2.37)$$

mit der Jacobi-Determinante

$$j(\mathbf{X}, t) := \det[\mathbf{b}(\mathbf{X}, t)]. \quad (2.38)$$

---

<sup>1</sup> Zur Verdeutlichung geben wir in diesem Abschnitt die Argumente mit an.

Nehmen wir an, dass neben der Verschiebung auch der Gradient der Verschiebung klein sein soll, gilt mit (2.9) und (2.14), dass  $j(\mathbf{X}, t) > 0$ . Wir lassen deshalb im Folgenden die Betragsstriche weg und erhalten für (2.36) mit (2.37)

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t) dV(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) j(\mathbf{X}, t) dv^{(0)}(\mathbf{X}). \quad (2.39)$$

Eine in  $\mathcal{X}_+$  eingebettete Fläche  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$  der Referenzkonfiguration wird entsprechend (2.6)

$$\chi: \mathcal{A}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{R}} \quad (2.40)$$

bewegt, so dass  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  eine in  $\mathcal{R}_+$  eingebettete Fläche darstellt. Dann gilt für ein Oberflächenintegral

$$\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{R}}} F_{ij\dots k}(\mathbf{r}, t) dA_k(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{A}_{\mathcal{X}}} f_{ij\dots k}(\mathbf{X}, t) da_k(\mathbf{X}, t), \quad (2.41)$$

wobei in der Euler'schen Formulierung das räumliche vektorielle Flächenelement  $dA_i(\mathbf{r}) = N_i(\mathbf{r}) dA(\mathbf{r})$  mit  $N_i(\mathbf{r})$  als Flächennormale von  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  und  $dA(\mathbf{r})$  als räumlichem skalarem Flächenelement geschrieben werden kann. In der Lagrange'schen Formulierung ist dagegen  $da_i(\mathbf{X}, t) = n_i(\mathbf{X}, t) da(\mathbf{X}, t)$ , in der die räumliche Flächennormale und das räumliche Flächenelement als Feldgrößen aufgefasst werden. Die Transformationsregel für ein räumliches Flächenelement in ein materielles lautet (z. B. Malvern, 1969, S. 169)

$$n_i(\mathbf{X}, t) da(\mathbf{X}, t) = j(\mathbf{X}, t) b_{ji}^{-1}(\mathbf{X}, t) n_j^{(0)}(\mathbf{X}) da^{(0)}(\mathbf{X}), \quad (2.42)$$

wobei  $n_j^{(0)}$  die materielle Flächennormale ist, so dass sich

$$\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{R}}} F_{ij\dots k}(\mathbf{r}, t) N_k(\mathbf{r}) dA(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{A}_{\mathcal{X}}} f_{ij\dots k}(\mathbf{X}, t) j(\mathbf{X}, t) b_{mk}^{-1}(\mathbf{X}, t) n_m^{(0)}(\mathbf{X}) da^{(0)}(\mathbf{X}) \quad (2.43)$$

ergibt. Um ein Integral der Form  $\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{R}}} F_{ij\dots} dA$  zu transformieren, nutzen wir  $dA = \sqrt{N_i dA N_i} dA$  aus und erhalten mit (2.42) und  $j > 0$

$$\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{R}}} F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t) dA(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{A}_{\mathcal{X}}} f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) \sqrt{n_m^{(0)}(\mathbf{X}) b_{mk}^{-1}(\mathbf{X}, t) b_{pk}^{-1}(\mathbf{X}, t) n_p^{(0)}(\mathbf{X})} j(\mathbf{X}, t) da^{(0)}(\mathbf{X}). \quad (2.44)$$

Die Transformation eines räumlichen Linienelementes in ein materielles lautet

$$dS_i(\mathbf{r}) = ds_i(\mathbf{X}, t) = b_{ij}(\mathbf{X}, t) ds_j^{(0)}(\mathbf{X}), \quad (2.45)$$

so dass für ein Wegintegral

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} F_{ij\dots k}(\mathbf{r}, t) dS_k(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{X}_1}^{\mathbf{X}_2} f_{ij\dots k}(\mathbf{X}, t) b_{km}(\mathbf{X}, t) ds_m^{(0)}(\mathbf{X}) \quad (2.46)$$

gilt.

## 2.2 Mechanische Feldgleichungen

Im folgenden Abschnitt wird die Lagrange'sche Formulierung der Feldgleichungen, die den mechanischen Zustand des Kontinuums beschreiben, aus Erhaltungssätzen hergeleitet. Dabei werden in der Euler'schen Formulierung die Massenerhaltung durch die Kontinuitätsgleichung (Abschn. 2.2.1, S. 16) und die Impulserhaltung durch die Bewegungsgleichung (Abschn. 2.2.2, S. 16) beschrieben. Die Materialgleichung (Abschn. 2.2.3, S. 18) fassen wir als lineares hereditäres Relaxationsfunktional in der Formulierung von Gurtin & Sternberg (1962) auf.

### 2.2.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus der Massenerhaltung, die in der materiellen Darstellung

$$d_t \left( \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} P dV \right) = 0 \quad (2.47)$$

lautet. Dabei bezeichnet  $P = \rho$  die Massendichten in der Euler'schen bzw. Lagrange'schen Formulierung. Es ist leicht einzusehen, dass in der materiellen Darstellung kein Massenfluss durch die Oberfläche des Volumens auftreten darf, da sich die Oberfläche mit den Teilchen mitbewegt. Da  $\chi$  bijektiv ist, können desweiteren keine Quellen und Senken erscheinen (Abschn. 2.1, S. 9). Gleichung (2.47) impliziert mit (2.36) in der Lagrange'schen Darstellung, dass ausgehend von der Referenzkonfiguration für jede weitere Konfiguration

$$\int_{\mathcal{X}_+} \rho dv - \int_{\mathcal{X}_+} \rho^{(0)} dv^{(0)} = 0 \quad (2.48)$$

gelten muss. Ersetzen wir  $dv$  mit Hilfe von (2.37) und berücksichtigen, dass dann der Integrand von

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} (j \rho - \rho^{(0)}) dv^{(0)} = 0 \quad (2.49)$$

für jedes Teilvolumen  $\mathcal{V}_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}_+$  verschwinden muss, erhalten wir die differentielle Formulierung der Massenerhaltung:

$$\rho^{(0)} = j \rho. \quad (2.50)$$

### 2.2.2 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung folgt in Anlehnung an die Impulserhaltung der Punktmechanik aus einer äquivalenten Formulierung für ein Kontinuum. Dabei wird der Begriff des Teilchens durch den des Kontinuums ersetzt, die Summe über einzelne Teilchen durch ein Integral über die Dichteverteilung (Malvern, 1969, S. 213):

*Die zeitliche Änderung des Impulses einer gegebenen Masse des Kontinuums, die das Volumen  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  einnimmt, ist gleich dem Integral aus den an der Oberfläche  $\partial\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  extern angreifenden Flächenkräfte  $T_i$  (Traktionen) und dem Integral über die in seinem Inneren wirkenden Volumenkräften  $PF_i$ .*

Diese Darstellung fordert für die internen Kräfte das Prinzip von *actio et reactio* (Newton's drittes Postulat). In der Euler'schen Formulierung ergibt sich damit

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} P d_t V_i dV = \int_{\partial\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} T_{ij} N_j dA + \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} P F_i dV , \quad (2.51)$$

wobei links die Beziehung

$$d_t \left[ \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} P F_{ij\dots} dV \right] = \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} P d_t F_{ij\dots} dV \quad (2.52)$$

(Malvern 1969, S. 211) und im ersten Summanden rechts die Definition der Traktion  $T_i := T_{ij} N_j$  mit der Cauchy'schen Spannung  $T_{ij}$  ausgenutzt worden ist.

Die Symmetrie der Cauchy'schen Spannung  $T_{ij}$  ergibt sich aus der Erhaltung des Drehimpulses, für das anstelle von Newton's drittem Postulat für die Kräfte Egalität, Opposition und Kollinearität gefordert werden muss (Malvern, 1969, S. 215). Zusätzlich darf das Material nicht polar sein.<sup>1</sup>

Transformieren wir (2.51) mit (2.39) und (2.43) in die Lagrange'sche Formulierung und verwenden gemäß (2.10)  $d_t V_i = d_t^2 r_i$ , so folgt

$$\int_{\partial\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} t_{ij} j b_{kj}^{-1} n_k^{(0)} da^{(0)} + \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \rho (f_i - d_t^2 r_i) j dv^{(0)} = 0 . \quad (2.53)$$

Mit der Definition der Piola'schen Spannung<sup>2</sup> entsprechend (z. B. Marsden & Hughes, 1983, S. 135)

$$\tau_{ij} := j b_{jk}^{-1} t_{ik} , \quad (2.54)$$

die die aktuellen Traktionen bezogen auf ein materielles Flächenelement beschreibt, und der Massenerhaltung (2.50) folgt

$$\int_{\partial\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \tau_{ij} n_j^{(0)} da^{(0)} + \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \rho^{(0)} (f_i - d_t^2 r_i) dv^{(0)} = 0 . \quad (2.55)$$

Wenden wir auf den ersten Summanden den Gauß'schen Satz an, und nehmen wir an, dass der Integrand verschwinden muss, damit

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} [\tau_{ij,j} + \rho^{(0)} (f_i - d_t^2 r_i)] dv^{(0)} = 0 \quad (2.56)$$

auf jedem Teilvolumen  $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$  erfüllt wird, ergibt sich die differentielle Bewegungsgleichung in der Lagrange'schen Formulierung zu

$$\tau_{ij,j} + \rho^{(0)} (f_i - d_t^2 r_i) = 0 . \quad (2.57)$$

In dieser Darstellung der Bewegungsgleichung beziehen sich somit alle Kräfte auf die Referenzkonfiguration. Dass die Definition (2.54) sinnvoll ist, kann man wie folgt zeigen:

<sup>1</sup> Bei polaren Materialien treten innerhalb des Kontinuums Kräftepaare auf, die dazu führen, dass die Spannung von der räumlichen Rotation abhängt (z. B. Eringen, 1989, S. 112).

<sup>2</sup> Sie wird auch als nicht symmetrische Piola-Kirchhoff'sche oder erste Piola-Kirchhoff'sche Spannung bezeichnet (Wolf, 1991a).

Wenden wir den Gauß'schen Satz bereits in der Euler'schen Formulierung (2.51) an und transformieren danach in materielle Koordinaten, so erhalten wir mit (2.22) und (2.39) für den ersten Summanden

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} T_{ij,j} dV = \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} t_{ij,k} b_{kj}^{-1} dv^{(0)}. \quad (2.58)$$

Vergleichen wir diesen mit dem ersten Summanden von (2.56), indem wir mittels (2.54) die Piola'sche Spannung durch die Cauchy'sche Spannung ersetzen, erhalten wir

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \tau_{ij,j} dv^{(0)} = \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} (j b_{jk}^{-1} t_{ik})_{,j} dv^{(0)} = \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} (j b_{jk}^{-1})_{,j} t_{ik} dv^{(0)} + \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} j b_{jk}^{-1} t_{ik,j} dv^{(0)}. \quad (2.59)$$

Um eine Übereinstimmung mit (2.58) zu erhalten, muss somit der Term

$$\int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} (j b_{jk}^{-1})_{,j} t_{ik} dv^{(0)} \quad (2.60)$$

verschwinden, was durch die Piola-Identität  $(j b_{jk}^{-1})_{,j} = 0$  (Marsden & Hughes, 1983, S. 117) erfüllt ist.

### 2.2.3 Materialgleichung

Die Materialgleichung verbindet den aktuellen Spannungszustand des Kontinuums mit seiner Konfigurationsgeschichte. Die üblichen Materialgesetze, die von Laborexperimenten auf geophysikalische Prozesse extrapoliert werden (Kirby, 1983), beschreiben einen stationären Zustand, der nicht von der Deformationsgeschichte abhängt (z. B. Birger, 1996). Um den transienten Übergang vom Verhalten eines elastischen Festkörpers zu einer viskosen Flüssigkeit zu beschreiben, muss die Deformationsgeschichte jedoch in die Materialgleichung eingehen. Dies wird im Allgemeinen durch das Prinzip des schwindenden Gedächtnisses<sup>1</sup> erreicht. Es besagt, dass weiter zurückliegende Deformationen einen geringeren Einfluss auf den jetzigen Spannungszustand haben als weniger weit zurückliegende (Truesdell & Noll, 1992, S. 101).

Grundlagen solcher Materialgesetze liefert die Viskoelastizitätstheorie (z. B. Coleman & Noll, 1961). Wir folgen in diesem Abschnitt im Wesentlichen der Darstellung von Gurtin & Sternberg (1962) für die lineare Viskoelastizitätstheorie. Sie vereinheitlicht die verschiedenen Darstellungen linearer Gesetze, die aus dem Boltzmann'schen Superpositionsprinzip hervorgehen (z. B. Gross, 1953), und diskutiert die Existenz der Laplace-Transformierten. Mit dem so zur Verfügung gestellten Apparat ist es möglich, verschiedene lineare Gesetze zu diskutieren (Müller, 1986; Körnig & Müller, 1989; Birger, 1996; Rümpker & Wolf, 1996; Wiecekowsky & Wolf, 1998). Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Maxwell-Viskoelastizität als einfachstes und für die Modellierung von GIA konventionelles Materialgesetz (z. B. Peltier, 1974; Cathles, 1975; Wolf, 1985b) (Abschn. 3.3, S. 38).

#### Allgemeine Prinzipien

Nach Noll (1958) muss eine Materialgleichung folgenden Prinzipien genügen: (1) Bestimmtheit, d. h. die Spannung eines Materieteilchens am Ort  $r_i(\mathbf{X}, t)$  zur Zeit  $t$  ist durch die Vorgeschichte der Bewegung einer beliebig kleinen Umgebung von  $X_i$  definiert, und (2) Objektivität, d. h. der durch eine Materialgleichung beschriebene Prozess soll gegenüber einer Koordinatentransformation des Bezugssystems invariant sein. Das Prinzip der Bestimmtheit erfüllen wir, indem die Materialgleichung in Form eines Funktionals

$$T_{ij}(t) = \mathcal{M}_{ij}[\mathbf{r}(t - t')], \quad t' \geq 0 \quad (2.61)$$

<sup>1</sup> englisch: *fading memory*

geschrieben wird, wobei  $\mathcal{M}_{ij}$  ein hereditäres Materialgesetz darstellt,  $t$  der aktuelle Zeitpunkt und  $t'$  ein zurückliegender Zeitpunkt ist. Zusätzlich ist angenommen worden, dass die Materialgleichung rein mechanisch ist.<sup>1</sup> Das Prinzip der Objektivität erfüllen wir, indem die Abhängigkeit von  $\mathcal{M}_{ij}$  auf den Verschiebungsgradienten  $U_{i,j}$  beschränkt wird, so dass die Translationsinvarianz gewährleistet ist, und weiter auf die Verzerrung

$$E_{ij} := \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i} - U_{k,i} U_{k,j}), \quad (2.62)$$

so dass die Invarianz gegenüber einer Drehung gewährleistet ist (Landau & Lifschitz, 1989, S. 2). Schreiben wir das Materialgesetz in Form einer Tensoroperation, schließen wir auch die Invarianz gegenüber der Inversion mit ein.

Für (2.61) nehmen wir ein lineares *hereditäres Materialgesetz* an, so dass ausgehend von einem Spannungszustand in der ungestörten Referenzkonfiguration der aktuelle Spannungszustand

$$T_{ij} = T_{ij}^{(0)} + T_{ij}^{(\delta)} \quad (2.63)$$

lautet und das materielle Spannungszinkrement  $T_{ij}^{(\delta)}$  in der aktuellen Konfiguration durch ein Superpositionsintegral mit der Verzerrung  $E_{ij}$  verbunden ist. Für kleine Deformationen verschwindet zusätzlich in (2.62) der nichtlineare Term und mit (2.23) stimmen die Euler'sche und Lagrange'sche Verzerrung überein:

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij}. \quad (2.64)$$

Wir formulieren das Materialgesetz Lagrange'sch.

### Lineares hereditäres Materialgesetz

Gurtin & Sternberg (1962) gehen in ihrer in sich geschlossenen Darstellung der linearen Viskoelastizitätstheorie von zulässigen Spannungs- und Verzerrungsvorgeschichten aus. Eine Spannungs- bzw. Verzerrungsvorgeschichte heißt *zulässig*, wenn  $t_{ij}^{(\delta)}(t)$  bzw.  $\varepsilon_{ij}(t)$  stetig auf  $t \in (-\infty, \infty)$  und  $t_{ij}^{(\delta)}(t) = 0$  bzw.  $\varepsilon_{ij}(t) = 0$  auf  $t \in (-\infty, 0)$  sind. Ein Materialgesetz heißt *linear hereditär* bezüglich einer zulässigen Verzerrungsvorgeschichte, wenn es die Prinzipien der Linearität, zeitlichen Invarianz, Kausalität und Stetigkeit bezüglich  $t$  erfüllt. Allgemein kann man ein solches Materialgesetz in Form einer Stieltjes-Konvolution  $\varepsilon_{kl} * dm_{ijkl}$  schreiben,

$$t_{ij}^{(\delta)} = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{kl}(t-t') dm_{ijkl}(t'), \quad (2.65)$$

wobei die tensoriellen Relaxationsfunktionen  $m_{ijkl}$  folgende Eigenschaften besitzen:

- (a)  $m_{ijkl} = m_{jikl} = m_{jilk}$  für  $t \in (-\infty, \infty)$ ,
- (b)  $m_{ijkl} = 0$  für  $t \in (-\infty, 0)$ ,
- (c)  $m_{ijkl}$  von beschränkter Variation auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $t \in (-\infty, \infty)$ ,
- (d)  $m_{ijkl}$  rechtsseitig stetig.

<sup>1</sup> Wird zum Beispiel eine thermomechanische Kopplung betrachtet, können in  $\mathcal{M}_{ij}$  weitere Zustandsfunktionen erscheinen (Eringen, 1989, S. 162).

Gemäß Eigenschaft (b) erfüllt das Materialgesetz das Prinzip der Kausalität. Die Form (2.65) der Stieltjes-Konvolution ist kommutativ,<sup>1</sup> so dass

$$\varepsilon_{kl} * dm_{ijkl} = m_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} . \quad (2.67)$$

Die Stieltjes-Konvolution (2.65) kann durch eine Riemann-Konvolution  $\varepsilon_{kl} * d_t m_{ijkl}$  ersetzt werden:

$$t_{ij}^{(\delta)} = \varepsilon_{kl} m_{ijkl}(0) + \int_0^t \varepsilon_{kl}(t-t') d_{t'} m_{ijkl}(t') dt' . \quad (2.68)$$

Sofern  $|\varepsilon_{ij}(t)|$  und  $|m_{ijkl}(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$  von  $\mathcal{O}(e^{s_0 t})$  sind, gilt für alle Laplace-Variablen  $s \in \{s \mid \operatorname{Re}(s) > s_0\}$ , dass die Laplace-Transformierte von (2.68) bezüglich der Zeit

$$\mathcal{L}\{t_{ij}^{(\delta)}(t)\} := \tilde{t}_{ij}^{(\delta)}(s) = \int_0^\infty t_{ij}^{(\delta)}(t) e^{-st} ds = s \tilde{m}_{ijkl}(s) \tilde{\varepsilon}_{kl}(s) \quad (2.69)$$

existiert (z. B. Bronstein & Semendjajew, 1987). Die Tilde bezeichnet dabei die Laplace-Transformierte der jeweiligen Funktion. Um die Gleichungen in einer Form zu schreiben, die dem Hooke'schen Gesetz entspricht, fassen wir  $s \tilde{m}_{ijkl}$  zu Relaxationsmoduln zusammen.

Soll das Materialgesetz isotrop sein, so reduzieren sich die 21 linear unabhängigen Komponenten von  $m_{ijkl}(t)$  auf genau zwei skalare Funktionen. In Anlehnung an die Lamé'schen Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  für elastische Medien definieren wir Lamé'sche Relaxationsfunktionen  $m_1(t)$  und  $m_2(t)$ , so dass

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(\delta)} &= \delta_{ij} \varepsilon_{kk} m_1(0) + \delta_{ij} \int_0^t \varepsilon_{kk}(t-t') d_{t'} m_1(t') dt' \\ &\quad + 2 \varepsilon_{ij} m_2(0) + 2 \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-t') d_{t'} m_2(t') dt' . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Hierbei ist  $\delta_{ij}$  der Einheitstensor zweiter Stufe. Die Volumenrelaxation wird dann mit Hilfe von

$$m_3 = m_1 + \frac{2}{3} m_2 \quad (2.71)$$

und die Scherrelaxation über  $m_2$  beschrieben. Wir lassen keine Volumenrelaxation zu und definieren  $m_3(t)$  über den elastischen Kompressionsmodul  $\kappa$  (siehe Wiecekowsk, 1999, S. 20):

$$\kappa = m_3 = \text{konst.} \quad (2.72)$$

Einsetzen von (2.71) und (2.72) in (2.70) liefert das materielle Druckinkrement

$$p^{(\delta)} = -\kappa \varepsilon_{ii} \quad (2.73)$$

und die inkrementielle Materialgleichung

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(\delta)} &= \delta_{ij} \left[ \varepsilon_{kk} \kappa - \frac{2}{3} \varepsilon_{kk} m_2(0) - \frac{2}{3} \int_0^t \varepsilon_{kk}(t-t') d_{t'} m_2(t') dt' \right] \\ &\quad + 2 \varepsilon_{ij} m_2(0) + 2 \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-t') d_{t'} m_2(t') dt' . \end{aligned} \quad (2.74)$$

<sup>1</sup> Mit  $\varepsilon_{ij} = 0$  für  $t \in (-\infty, 0)$  weichen Gurtin & Sternberg (1962) von anderen Autoren ab, indem sie explizit annehmen, dass die lokale Spannungsvorgeschichte vollständig durch eine zulässige Verzerrungsvorgeschichte definiert ist, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt. Mit dieser Annahme können sie die obere Integrationsgrenze in (2.65) auf  $t$  reduzieren. Bei Coleman & Noll (1961) und Malvern (1969, S. 319ff.) ist die obere Integrationsgrenze  $\infty$ , so dass das Integral nicht kommutativ ist.

Nach Laplace-Transformation von (2.74) erhalten wir

$$\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} = \tilde{\lambda} \tilde{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2 \tilde{\mu} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad (2.75)$$

wobei wir die Lamé'schen Relaxationsmoduln

$$\tilde{\lambda} := \kappa - \frac{2}{3} s \tilde{m}_2, \quad (2.76)$$

$$\tilde{\mu} := s \tilde{m}_2 \quad (2.77)$$

eingeführt haben;  $\tilde{\mu}$  bezeichnen wir als Scherrelaxationsmodul.

## 2.3 Gravitative Feldgleichungen

Allgemein ist das Schwerepotential  $\Phi(\mathbf{r})$  am Raumpunkt  $r_i$  über das Newton-Potential definiert als das Negative der auf die Einheitsmasse normierten potentiellen Energie, die das Materieteilchen durch seine Wechselwirkung mit allen anderen Materieteilchen innerhalb eines Gebietes  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  erfährt (Teisseyre, 1989, S. 2), so dass

$$\Phi(\mathbf{r}, t) := \gamma \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} \frac{P(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.78)$$

$\gamma$  ist dabei die Gravitationskonstante. Diese Integraldarstellung stellt sicher, dass die skalare Funktion des Potentials  $\Phi$  und deren lokaler Gradient  $\Phi_{,i}$  als stetige Feldgrößen existieren, sofern  $P$  innerhalb von  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  beschränkt und außerhalb von  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  Null ist und  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  endlich ist. Entsprechend existiert für eine stückweise stetige Dichteverteilung die Schwere als Gradientenfeld

$$G_i(\mathbf{r}, t) := \gamma \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} \frac{(r'_i - r_i) P(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.79)$$

Für die gewählte ebene Geometrie können das Schwerepotential und der Schwerevektor nicht selbstkonsistent aus der Dichteverteilung hervorgehen. Wir verwenden die Theorie jedoch für die in Abschn. 2.5.3, S. 28 definierten Inkremente, für die wir unter Anderem fordern, dass  $P^{(\delta)}$  für  $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$  verschwindet.

In der Lagrange'schen Formulierung lauten die entsprechenden Ausdrücke (2.78) und (2.79) mit (2.39) und (2.50)

$$\phi(\mathbf{X}, t) := \gamma \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \frac{\rho^{(0)}(\mathbf{X}')}{|\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}', t)|} dv^{(0)}(\mathbf{X}'), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}_+, \quad (2.80)$$

sowie

$$g_i(\mathbf{X}, t) := \gamma \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \frac{[r_i(\mathbf{X}', t) - r_i(\mathbf{X}, t)] \rho^{(0)}(\mathbf{X}')}{|\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}', t)|^3} dv^{(0)}(\mathbf{X}'), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}_+. \quad (2.81)$$

Diese Darstellung schränkt jedoch den Wertebereich der Raumpunkte entsprechend  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_+$  ein.

### 2.3.1 Potentialgleichung

Sofern  $P(\mathbf{r})$  innerhalb jeder Schicht  $\mathcal{R}_+^{(l)}$  einer Hölderbedingung genügt,<sup>1</sup> gilt für das Potential eines Materieteilchens  $\mathbf{r} \in \mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  die Poisson'sche Differentialgleichung

$$\Phi_{,ii} = -4\pi\gamma P. \quad (2.82)$$

<sup>1</sup> Die Hölderbedingung besagt, dass für alle Punkte  $\mathbf{r}' \in \mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  mit  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < c$  Konstanten  $A > 0$  und  $\alpha > 0$  existieren, so dass  $|\rho(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r}')| \leq A r^\alpha$ . Diese Bedingung ist stärker als Stetigkeit und für  $\alpha < 1$  schwächer als Differenzierbarkeit (Teisseyre, 1989).

Um dies zu zeigen, unterteilt man  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  in ein Gebiet  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_1}$ , für das die Dichte am Punkt  $r_i$  verschwindet, und ein genügend kleines Gebiet  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_2}$ , das eine Kugel mit Radius  $r_s$  um den Punkt  $r_i$  beschreibt und für das die homogene Dichte  $P_s = P(\mathbf{r})$  ist. Die Hölderbedingung gewährleistet, dass  $\Phi(\mathbf{r})$  von  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_1}$  als harmonische Funktion mit  $\Phi_{,ii} = 0$  existiert. Das Potential für einen inneren Punkt der homogenen Kugel  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_2}$  lautet mit (2.79)

$$\Phi = -2\pi\gamma P_s \left( \frac{1}{3} r_i r_i - r_s^2 \right) . \quad (2.83)$$

Die zweite Ableitung  $\Phi_{,ii}$  liefert dann (2.82).

Um die Potentialgleichung in der Lagrange'schen Formulierung zu erhalten, schreiben wir (2.83) mit (2.50) und  $\rho_s^{(0)} =: j_s \rho_s$ :

$$j_s \phi = -2\pi\gamma \rho_s^{(0)} \left( \frac{1}{3} r_i r_i - r_s^2 \right) . \quad (2.84)$$

Bilden wir zweimal den materiellen Gradienten, nutzen aus, dass  $P_s$  und damit auch  $\rho_s^{(0)}$  und  $j_s$  konstant sind, und multiplizieren die bei der Gradientenbildung auf der rechten Seite erscheinenden Bewegungsgradienten  $b_{ij}$  mit seiner Inversen, lautet die Potentialgleichung in der Lagrange'schen Formulierung<sup>1</sup>

$$j (\phi_{,jk} b_{ji}^{-1} b_{ki}^{-1} + \phi_{,j} b_{ji,k}^{-1} b_{ki}^{-1}) = -4\pi\gamma \rho^{(0)} . \quad (2.85)$$

### 2.3.2 Schweregleichung

Die Schweregleichung verbindet die Schwere (2.79) mit dem Schwerepotential (2.78). Da wir von einer Rotation des Kontinuums absehen, vernachlässigen wir den Zentrifugalanteil der Schwere. Sofern die Dichteverteilung innerhalb von  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  stückweise stetig ist, kann in beiden Gleichungen Integration und Differentiation vertauscht werden, so dass

$$\Phi_{,i} = G_i . \quad (2.86)$$

Bilden wir den materiellen Gradienten des Potentials (2.80), ergibt sich

$$\phi_{,i} = \gamma \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \frac{[r_k(\mathbf{X}', t) - r_k(\mathbf{X}, t)] b_{ki}(\mathbf{X}, t) \rho^{(0)}(\mathbf{X}')}{|\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}', t)|^3} dv^{(0)}(\mathbf{X}') . \quad (2.87)$$

Vergleicht man (2.87) mit (2.81) lautet die Schweregleichung in der Lagrange'schen Formulierung

$$g_i = \phi_{,j} b_{ji}^{-1} . \quad (2.88)$$

Mit (2.13) und (2.21) kann (2.88) auch direkt aus (2.86) bestimmt werden. Zu bemerken ist hier, dass sich das materielle Schwerefeld nicht als Gradient des materiellen Potentialfeldes ergibt, da sich der Beobachtungspunkt durch die Bewegung des Kontinuums verändert hat.

Damit auch in der Lagrange'schen Darstellung die Schwere der räumliche Gradient des Schwerepotentials bleibt, berechnen wir mit (2.80) und (2.81) das Potential und die Schwere am Raumpunkt  $X_i$  aus der Lagrange'schen Darstellung der aktuellen Konfiguration:

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \gamma \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{X}}} \frac{\rho^{(0)}(\mathbf{X}')}{|\mathbf{X} - \mathbf{r}(\mathbf{X}', t)|} dv^{(0)}(\mathbf{X}') , \quad (2.89)$$

<sup>1</sup> (2.85) unterscheidet sich von Wolf (1997, Gl. 3.7), wo neben materiellen auch räumliche Gradienten erscheinen.

sowie

$$G_i(\mathbf{X}, t) := \gamma \int_{\mathcal{V}_X} \frac{[r_i(\mathbf{X}', t) - X_i] \rho^{(0)}(\mathbf{X}')}{|\mathbf{X} - \mathbf{r}(\mathbf{X}', t)|^3} dv^{(0)}(\mathbf{X}') . \quad (2.90)$$

Sofern sich der Zustand des Kontinuums in der aktuellen Konfiguration nur geringfügig von seinem Ausgangszustand unterscheidet (Abschn. 2.1.4, S. 13), führen diese Darstellungen auf die lokalen Inkremente

$$\phi^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) = \Phi(\mathbf{X}, t) - \phi^{(0)}(\mathbf{X}) , \quad (2.91)$$

$$g_i^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) = G_i(\mathbf{X}, t) - g_i^{(0)}(\mathbf{X}) . \quad (2.92)$$

## 2.4 Grenzflächenbedingungen

Wir formulieren die Grenzflächenbedingungen zunächst Euler'sch und transformieren sie dann in die Lagrange'sche Formulierung.

### 2.4.1 Mechanische Feldgrößen

Für jede Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$  bzw.  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$  sind Unstetigkeiten in den Materialparametern erlaubt. Um eine Kopplung der Schichten untereinander zu erreichen, fordern wir jedoch, dass die Grenzflächen miteinander verschweißt sind<sup>1</sup> und die Spannungen über die Traktion auf der Grenzfläche übertragen werden.

#### Stetigkeit der Konfiguration

Die Grenzflächen sollen entsprechend (2.31) in jeder Konfiguration infinitesimal benachbart bleiben, so dass mit

$$[V_i]_{\pm}^+ = 0 \quad (2.93)$$

die Konfiguration an einer Grenzfläche stetig ist.

#### Stetigkeit der Traktion

Die Stetigkeit der Traktion ergibt sich aus der Impulserhaltung an einer Grenzfläche. Entsprechend Lapwood & Usami (1981, S. 217ff.) betrachten wir dazu eine genügend kleine kreisförmige Scheibe  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} \subset \partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$  mit der Fläche  $A$ , so dass  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  eben ist. Weiter legen wir einen flachen Zylinder  $\mathcal{Z}$  mit Kreisflächen parallel zu  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  und der Dicke  $h$  in die Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$ , so dass er je zur Hälfte in die Schichten  $\mathcal{R}_+^{(l-1)}$  und  $\mathcal{R}_+^{(l)}$  ragt (Abb. 2.3). Die Flächenmassendichte  $\Sigma$  betrachten wir realisiert als superponierte Dirac'sche Deltafunktion senkrecht zu  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$

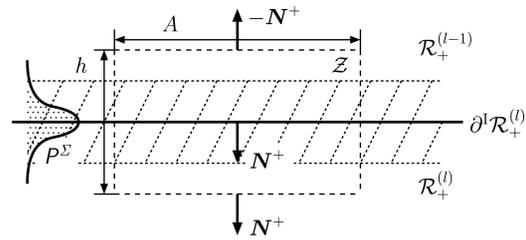


Abbildung 2.3: Flacher Zylinder  $\mathcal{Z}$  beidseitig der Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$  und Flächenmassendichte  $P^\Sigma$  (schraffiert).

$$P^\Sigma(\mathbf{r}') = \Sigma \delta[(r_i - r'_i) N_i^+(\mathbf{r})] , \quad \mathbf{r} \in \partial^I \mathcal{R}_+^{(l)} . \quad (2.94)$$

<sup>1</sup> englisch: *welded boundary condition*

Allgemein gilt in  $\mathcal{Z}$  die Impulserhaltung (2.51), so dass

$$\int_{\partial\mathcal{Z}} T_{ij} N_j dA = - \int_{\mathcal{Z}} (P^\Sigma + P) (F_i - d_t V_i) dV. \quad (2.95)$$

$\partial\mathcal{Z}$  unterteilt sich in die beiden ebenen Flächen  $\partial^-\mathcal{Z} \subset \mathcal{R}_+^{(l-1)}$  und  $\partial^+\mathcal{Z} \subset \mathcal{R}_+^{(l)}$  mit den Flächennormalen  $-N_i^+$  und  $N_i^+$  sowie den Mantel  $\partial^M\mathcal{Z}$ . Wählen wir  $h$  gegenüber dem Radius von  $\mathcal{Z}$  genügend klein, können wir erreichen, dass auf der linken Seite der Kräftefluss durch  $\partial^M\mathcal{Z}$  klein gegenüber dem Fluss durch  $\partial^-\mathcal{Z}$  und  $\partial^+\mathcal{Z}$  ist. Mit der Stetigkeit der Konfiguration (2.93) und der Bewegung (s. S. 11), ist auch  $d_t V_i$  stetig. Die Volumenkraft  $F_i$  ist regulär, so dass sich für den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  in (2.95) und  $N_i = N_i^+$

$$\int_{\mathcal{D}\mathcal{R}} [T_{ij}^+ - T_{ij}^-] N_j dA = - \int_{\mathcal{D}\mathcal{R}} \Sigma (F_i^\pm - d_t V_i) dA \quad (2.96)$$

ergibt, wobei der Mittelwert  $F_i^\pm$  durch (2.29) definiert ist und der Beitrag von  $P$  verschwindet. Da (2.96) auf jeder Teilfläche  $\mathcal{D}\mathcal{R}$  erfüllt sein muss, gilt für die Grenzflächenbedingung der Traktion in der Euler'schen Formulierung

$$[T_{ij} N_j]_\pm^+ = - \Sigma (F_i^\pm - d_t V_i). \quad (2.97)$$

Um die Grenzflächenbedingung in die Lagrange'sche Formulierung transformieren zu können, nutzen wir in (2.96) die Definition der Beschleunigung, (2.10), die Transformationsregeln für Feldgrößen, (2.21) und (2.22), sowie die Transformationsregeln für die Integrale, (2.43) und (2.44):

$$\int_{\mathcal{D}\mathcal{X}} [t_{ij} j b_{mj}^{-1} n_m^{(0)}]_\pm^+ da^{(0)} = - \int_{\mathcal{D}\mathcal{X}} (f_i^\pm - d_t^2 r_i) \sigma \sqrt{n_m^{(0)} b_{mk}^{-1} b_{pk}^{-1} n_p^{(0)}} j da^{(0)}. \quad (2.98)$$

Dabei ist  $\mathcal{D}\mathcal{X}$  der Definitionsbereich der kreisförmigen Scheibe  $\mathcal{D}\mathcal{R}$  in der Referenzkonfiguration. Ersetzen wir mit (2.54) die Cauchy'sche durch die Piola'sche Spannung und beziehen die Flächenmassendichte auf die Referenzkonfiguration,

$$\sigma^R := \sigma \sqrt{n_i^{(0)} b_{ik}^{-1} b_{jk}^{-1} n_j^{(0)}}, \quad (2.99)$$

die sich durch die Divergenz der Grenzfläche von der aktuellen Flächendichte  $\sigma$  unterscheidet, erhalten wir

$$\int_{\mathcal{D}\mathcal{X}} [\tau_{ij} n_j^{(0)}]_\pm^+ da^{(0)} = - \int_{\mathcal{D}\mathcal{X}} (f_i^\pm - d_t^2 r_i) \sigma^R da^{(0)}. \quad (2.100)$$

Mathematisch bedeutet  $\sigma^R$ , dass die Last unabhängig von der Konfiguration  $\partial^l\mathcal{R}_+^{(l)}$  des Kontinuums als Randbedingung vorgegeben ist (Truesdell & Noll, 1992, S. 126). Mit der Bedingung, dass (2.100) auf jeder Teilfläche erfüllt sein muss, lautet die Grenzflächenbedingung der Traktion in der Lagrange'schen Formulierung

$$[\tau_{ij} n_j^{(0)}]_\pm^+ = - (f_i^\pm - d_t^2 r_i) \sigma^R. \quad (2.101)$$

### 2.4.2 Gravitative Feldgrößen

#### Stetigkeit des Schwerepotentials

Um die Stetigkeit des Potentials an einer Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$  zu zeigen, an der eine Flächenmassendichte als Störung vorgegeben ist, folgen wir der Argumentation von Lapwood und Usami (1981, S. 219) für einen Dichtesprung an einer Grenzfläche: Wir betrachten dazu wiederum [Abb. 2.3 auf S. 23](#). Das Schwerepotential unterteilen wir gemäß

$$\Phi = \Phi^{\mathcal{Z}} + \Phi^{\text{O}} \quad (2.102)$$

in das durch die Masse im Zylinder  $\mathcal{Z}$  verursachte Schwerepotential [\(2.78\)](#)

$$\Phi^{\mathcal{Z}}(\mathbf{r}_a) = \gamma \int_A \int_h \frac{P + P^\Sigma}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'|} dV \quad (2.103)$$

und das durch die Masse außerhalb des Zylinders hervorgerufene Potential  $\Phi^{\text{O}}$ .  $\Phi^{\mathcal{Z}}$  ist stetig bezüglich eines beliebigen Aufpunktes  $\mathbf{r}_a$  außerhalb des Zylinders. Gleiches gilt für das Schwerepotential  $\Phi$  innerhalb jeder einzelnen Schicht. Nach [\(2.102\)](#) ist dann aber auch  $\Phi^{\text{O}}$  innerhalb jeder einzelnen Schicht stetig. Wir bilden nun den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$ , wobei wir in [\(2.103\)](#) die Beiträge  $\Phi_1^{\mathcal{Z}}$  und  $\Phi_2^{\mathcal{Z}}$  bezüglich  $P$  und  $P^\Sigma$  unterscheiden. Für  $\Phi_2^{\mathcal{Z}}$  nutzen wir aus, dass  $P^\Sigma$  in  $\mathcal{Z}$  stetig und für  $h \rightarrow 0$  endlich bleibt. Damit ist

$$\Phi_2^{\mathcal{Z}}(\mathbf{r}_a) = \int_A \frac{\Sigma}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'|} dA \quad (2.104)$$

über die Grenzfläche stetig. Für den ersten Beitrag folgt  $\Phi_1^{\mathcal{Z}} \rightarrow 0$ , so dass das Potential  $\Phi^{\text{O}} \rightarrow \Phi - \Phi_2^{\mathcal{Z}}$  an der Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$ , das heißt über einen Dichtesprung stetig ist. Damit folgt

$$[\Phi]_{\pm}^{\pm} = 0. \quad (2.105)$$

Die Stetigkeit der Transformation von der Euler'schen Formulierung in die Lagrange'sche Formulierung und [\(2.21\)](#) führt dann entsprechend auf

$$[\phi]_{\pm}^{\pm} = 0. \quad (2.106)$$

#### Stetigkeit des Schwerevektors

Um die Grenzflächenbedingung für die Schwere  $\phi_{,i}$  über  $\partial^I \mathcal{R}_+^{(l)}$  und unter Berücksichtigung einer Flächenmassendichte  $\Sigma$  zu bestimmen, gehen wir wie in [Abschn. 2.4.1, S. 23](#) für die Traktion vor ([Abb. 2.3 auf S. 23](#)): Allgemein gilt innerhalb von  $\mathcal{Z}$  die Poisson'sche Differentialgleichung [\(2.82\)](#). Integrieren wir über  $\mathcal{Z}$  und wenden den Gauß'schen Satz an, so erhalten wir

$$\int_{\partial \mathcal{Z}} \Phi_{,i} N_i dA = -4\pi\gamma \int_{\mathcal{Z}} (P + P^\Sigma) dV. \quad (2.107)$$

Unterteilen wir  $\partial \mathcal{Z}$  in die beiden ebenen Flächen  $\partial^- \mathcal{Z} \subset \mathcal{R}_+^{(l-1)}$  und  $\partial^+ \mathcal{Z} \subset \mathcal{R}_+^{(l)}$  parallel zu  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  mit den Flächennormalen  $-N_i^+$  und  $N_i^+$  sowie dem Mantel  $\partial^M \mathcal{Z}$  und wählen  $h$  gegenüber dem Radius von  $\mathcal{Z}$  genügend klein, so dass der Kräftefluss durch  $\partial^M \mathcal{Z}$  klein gegenüber dem Fluss durch  $\partial^- \mathcal{Z}$  und  $\partial^+ \mathcal{Z}$  ist, erreichen wir, dass sich die Masse auf der rechten Seite von [\(2.107\)](#) auf den Beitrag von  $P^\Sigma$  [\(2.94\)](#) reduziert. Mit  $h \rightarrow 0$  ergibt sich aus [\(2.107\)](#) und  $N_i = N_i^+$

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}} \left( \Phi_{,i}^+ - \Phi_{,i}^- \right) N_i dA = -4\pi\gamma \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}} \Sigma dA. \quad (2.108)$$

Da diese Gleichung für jede Teilfläche  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  erfüllt sein muss, gilt für die Grenzflächenbedingung der Schwere in der Euler'schen Formulierung

$$[\Phi_{,i} N_i]_{\pm}^+ = -4\pi\gamma\Sigma. \quad (2.109)$$

Um die Grenzflächenbedingung in die Lagrange'sche Formulierung transformieren zu können, nutzen wir in (2.108) entsprechend der Darstellung für die Stetigkeit der Traktion (S. 23) die Transformationsregeln (2.21), (2.22), (2.43) und (2.44) und ersetzen mit Hilfe von (2.99)  $\sigma$  durch  $\sigma^R$ :

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}} [\phi_{,j} b_{ji}^{-1} j b_{ki}^{-1} n_k^{(0)}]_{\pm}^+ da^{(0)} = -4\pi\gamma \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}} \sigma^R da^{(0)}. \quad (2.110)$$

Mit der Bedingung, dass (2.110) auf jeder Teilfläche erfüllt sein muss, lautet die Grenzflächenbedingung für die Schwere in der Lagrange'schen Formulierung

$$[\phi_{,j} b_{ji}^{-1} j b_{ki}^{-1} n_k^{(0)}]_{\pm}^+ = -4\pi\gamma\sigma^R. \quad (2.111)$$

Im Unterschied zu Wolf (1997, Gl. 3.12) erscheint in dieser Darstellung der Normalenvektor der Referenzkonfiguration.

## 2.5 Linearisierung der Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen

Die in Abschn. 2.2, S. 16 und Abschn. 2.3, S. 21 gelisteten Feldgleichungen sowie die Grenzflächenbedingungen aus Abschn. 2.4, S. 23 werden nun zusammengestellt (Abschn. 2.5.1, S. 26) und dann über einen Störungsansatz linearisiert. Dazu teilen wir die Felder in ihren Referenzanteil (Abschn. 2.5.2, S. 27) und ihren Inkrementialanteil (Abschn. 2.5.3, S. 28) auf.

### 2.5.1 Totalfelder

Die Totalfelder werden beschrieben durch die *Kontinuitätsgleichung* (2.50) aus Abschn. 2.2.1, S. 16

$$\rho j = \rho^{(0)}, \quad (2.112)$$

die *Bewegungsgleichung* (2.57) aus Abschn. 2.2.2, S. 16

$$\tau_{ij,j} + \rho^{(0)} g_i = 0, \quad (2.113)$$

wobei der Trägheitsterm vernachlässigt ist, die *Materialgleichung* (2.61) aus Abschn. 2.2.3, S. 18

$$t_{ij} = \mathcal{M}_{ij}[\mathbf{r}(t-t')], \quad t' \geq 0, \quad (2.114)$$

wobei (2.54) die Cauchy'sche Spannung  $t_{ij}$  mit der Piola'sche Spannung  $\tau_{ij}$  verknüpft, die *Potentialgleichung* (2.85) aus Abschn. 2.3.1, S. 21

$$j \{ \phi_{,jk} b_{ji}^{-1} b_{ki}^{-1} + \phi_{,j} b_{ji,k}^{-1} b_{ki}^{-1} \} = -4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.115)$$

und die *Schweregleichung* (2.88) aus Abschn. 2.3.2, S. 22

$$g_i = \phi_{,j} b_{ji}^{-1}. \quad (2.116)$$

Die *mechanischen Grenzflächenbedingungen* (2.93) und (2.101) aus Abschn. 2.4.1, S. 23 lauten unter Vernachlässigung des Trägheitstermes

$$[r_i]_-^+ = 0, \quad (2.117)$$

$$[n_j^{(0)} \tau_{ij}]_-^+ = -g_i \sigma^R. \quad (2.118)$$

Die *gravitativen Grenzflächenbedingungen* (2.106) und (2.111) aus Abschn. 2.4.2, S. 25 lauten

$$[\phi]_-^+ = 0, \quad (2.119)$$

$$[\phi_{,j} b_{ji}^{-1} j n_k^{(0)} b_{ki}^{-1}]_-^+ = -4\pi\gamma\sigma^R, \quad (2.120)$$

wobei  $\sigma^R$  die Flächendichte in der Grenzfläche  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$  darstellt. Für die Behandlung von GIA repräsentiert die Flächendichte  $\sigma^R$  in der Oberfläche  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(1)}$  die glaziale Eislast.

### 2.5.2 Referenzfelder

Die Referenzfelder beschreiben das Kontinuum in seinem Ausgangszustand. Im Folgenden wird angenommen, dass sich das Kontinuum im Ausgangszustand im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Weiterhin wird  $\sigma^R = 0$  angenommen. Das Spannungsfeld ist isotrop,

$$t_{ij}^{(0)} = -\delta_{ij} p^{(0)}, \quad (2.121)$$

und über den Druck  $p := -t_{ii}/3$  definiert. Entsprechend Abschn. 2.2.3, S. 18 liefert die Materialgleichung für die Referenzkonfiguration keinen Beitrag. Sofern wir annehmen, dass der Ausgangszustand durch isotrope, isochemische und inkompressible Schichten  $\mathcal{X}_+^{(l)}$  beschrieben wird, reduziert sich die *Kontinuitätsgleichung* (2.112) auf

$$\rho^{(0)} = \text{konst.} \quad (2.122)$$

Die übrigen Feldgleichungen (2.113), (2.115) und (2.116) lassen sich mit  $b_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ ,  $j^{(0)} = 1$  und  $\tau_{ij}^{(0)} = t_{ij}^{(0)}$  [nach (2.9), (2.38) und (2.54)] für den Ausgangszustand berechnen:

$$-p_{,i}^{(0)} + \rho^{(0)} g_i^{(0)} = 0, \quad (2.123)$$

$$\phi_{,ii}^{(0)} = -4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.124)$$

$$g_i^{(0)} = \phi_{,i}^{(0)}. \quad (2.125)$$

Die Grenzflächenbedingungen  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$  ergeben sich entsprechend (2.117)–(2.120) zu

$$[r_i^{(0)}]_-^+ = 0, \quad (2.126)$$

$$[p^{(0)}]_-^+ = 0, \quad (2.127)$$

$$[\phi^{(0)}]_-^+ = 0, \quad (2.128)$$

$$[\phi_{,i}^{(0)}]_-^+ = 0. \quad (2.129)$$

In (2.129) ist zusätzlich berücksichtigt, dass im hydrostatischen Ausgangszustand die Schwere senkrecht auf der Grenzfläche steht. Ist dies nicht der Fall, lautet (2.129)  $[\phi_{,i}^{(0)}]_-^+ n_i^{(0)} = 0$ .

Aus diesen Gleichungen kann der Ausgangszustand des Kontinuums für ebene Geometrie *nicht* selbstkonsistent berechnet werden. Das Integral der Poisson'schen Differentialgleichung (2.124) divergiert für einen Halbraum mit nicht verschwindender konstanter Dichte. Somit muss das Potential  $\phi^{(0)}$  im gesamten Raum vorgeben werden.

### 2.5.3 Inkrementialfelder

Die Inkrementialfelder liefern den Störungsbeitrag zu den Totalfeldern (2.24). Wir nehmen an, dass alle Störungen isochemisch und isentrop (Wolf, 1991a), aber kompressibel sind. Die Feldgleichungen für die Inkrementialfelder ergeben sich durch Substitution der nach Referenzfeld und Inkrementialfeld aufgeteilten Totalfelder (2.24) in die Feldgleichungen (2.112), (2.113), (2.115) und (2.116) und Entwicklung nach Termen erster Ordnung in den Inkrementen. Der Verschiebungsgradient  $u_{i,j}$  wird ebenfalls als Inkrement angesehen, so dass  $U_{i,j} = u_{i,j}$ ,  $j = 1 + u_{i,i}$  und  $b_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - u_{i,j}$  gelten. Damit folgt die *Kontinuitätsgleichung* aus (2.112):

$$\rho^{(\delta)} = -u_{i,i} \rho^{(0)}. \quad (2.130)$$

Die Verbindung zwischen den Inkrementen der Piola'schen und Cauchy'schen Spannung (2.54) ergibt sich zu (z. B. Vermeersen & Vlaar, 1991)

$$\tau_{ij}^{(\delta)} = t_{ij}^{(\delta)} + u_{k,k} t_{ij}^{(0)} - u_{j,k} t_{ik}^{(0)}, \quad (2.131)$$

so dass mit (2.121) für ein Kontinuum mit hydrostatischem Ausgangszustand

$$\tau_{ij}^{(\delta)} = t_{ij}^{(\delta)} + p^{(0)} (u_{j,i} - \delta_{ij} u_{k,k}) \quad (2.132)$$

gilt. Entwickelt man die mechanischen Feldgrößen nach materiellen Inkrementen und die gravitativen Feldgrößen nach lokalen Inkrementen, erhält man aus (2.113), (2.123) und (2.132) für die *Bewegungsgleichung*

$$t_{ij,j}^{(\delta)} + (\rho^{(0)} g_j^{(0)} u_j)_{,i} - \rho^{(0)} g_i^{(0)} u_{j,j} + \rho^{(0)} g_i^{(\Delta)} = 0. \quad (2.133)$$

Die *Materialgleichung* lautet entsprechend (2.65)

$$t_{ij}^{(\delta)} = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{kl}(t-t') dm_{ijkl}(t'), \quad (2.134)$$

wobei wir Linearität bezüglich  $u_{i,j}$  durch

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.135)$$

in (2.62) erreicht haben.

Die *Potentialgleichung* ergibt sich aus (2.115) zu

$$\phi_{,ii}^{(\Delta)} = 4\pi\gamma (\rho^{(0)} u_i)_{,i} \quad (2.136)$$

und die *Schweregleichung* aus (2.116) zu

$$g_i^{(\Delta)} = \phi_{,i}^{(\Delta)}. \quad (2.137)$$

Eine detaillierte Darstellung der Linearisierung findet sich in Wolf (1997, S. 23–25).

Die *Grenzflächenbedingungen* für die Inkrementialfelder folgen als lineare Größen aus den Grenzflächenbedingungen der Totalfelder (2.117)–(2.120), die wiederum nach den jeweiligen Inkrementen aus (2.9), (2.24) und (2.25) entwickelt sind. Nach Eliminierung der Grenzflächenbedingungen für die Referenzfelder (2.126)–(2.129) lauten sie

$$[u_i]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.138)$$

$$[n_j^{(0)} t_{ij}^{(\delta)}]_{\pm}^+ = -g_i^{(0)} \sigma^R, \quad (2.139)$$

$$[\phi^{(\Delta)}]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.140)$$

$$[n_i^{(0)} (g_i^{(\Delta)} - 4\pi\gamma \rho^{(0)} u_i)]_{\pm}^+ = -4\pi\gamma \sigma^R. \quad (2.141)$$

In (2.139) und (2.141) wurden zusätzliche Eigenschaften ausgenutzt:

Die Grenzflächenbedingung für das Inkrement der Traktion lautet nach Linearisierung von (2.118):

$$[n_j^{(0)} \tau_{ij}^{(\delta)}]_{-}^{+} = -g_i^{(0)} \sigma^R. \quad (2.142)$$

Ersetzen wir die Piola'sche durch die Cauchy'sche Spannung (2.54) gemäß

$$\tau_{ij}^{(0)} + \tau_{ij}^{(\delta)} = t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(\delta)} + t_{ij}^{(0)} (\delta_{jk} u_{k,k} - u_{j,k}) \quad (2.143)$$

und beachten die Stetigkeit der Flächennormalen (2.31) für deren Inkrement nach (2.42)

$$0 = [n_i^{(\delta)}]_{-}^{+} = [(\delta_{ij} u_{k,k} - u_{j,i}) n_j^{(0)}]_{-}^{+} \quad (2.144)$$

gilt, vereinfacht sich (2.142) zu (2.139).

Die Grenzflächenbedingung für das Schwereinkrement lautet nach Linearisierung von (2.120):

$$[n_i^{(0)} (g_i^{(\Delta)} + \phi_{,ij}^{(0)} u_j) + n_i^{(0)} \phi_{,j}^{(0)} (\delta_{ij} u_{k,k} - u_{i,j})]_{-}^{+} = -4\pi\gamma\sigma^R. \quad (2.145)$$

Nutzen wir im ersten Summanden, dass die Grenzfläche für eine hydrostatisch ausgeglichene Flüssigkeit eine Äquipotentialfläche bezüglich  $\phi^{(0)}$  mit der Eigenschaft  $|g_i^{(0)}| = \text{konst.}$  darstellt, so dass desweiteren mit (2.124)

$$\phi_{,ij}^{(0)} n_j^{(0)} = \phi_{,jj}^{(0)} n_i^{(0)} = -4\pi\gamma\rho^{(0)} n_i^{(0)} \quad (2.146)$$

gilt,<sup>1</sup> und im zweiten Summanden wiederum (2.144), vereinfacht sich (2.145) zu (2.141).

Für einen hydrostatischen Ausgangszustand unterscheiden sich somit die inkrementiellen Grenzflächenbedingungen in linearer Näherung nicht von den in Wolf (1997, S. 22) abgeleiteten, in denen die Flächenbelegung  $\sigma$  statt  $\sigma^R$  vorgegeben ist (2.99).

Aus den Feldgleichungen (2.130), (2.133)–(2.137) und den Grenzflächenbedingungen (2.138)–(2.141) lässt sich für eine vorgegebene Dichteverteilung  $\rho^{(0)}$ , ein lineares Materialgesetz (Abschn. 2.2.3, S. 18), ein Potentialfeld  $\phi^{(0)}$  sowie eine Störung  $\sigma^R$  auf den Grenzflächen das Deformationsverhalten des geschichteten Kontinuums berechnen. Die Verschiebungen und Spannungen als materielle Inkremente beschreiben dann den Deformationszustand relativ zum Ausgangszustand, und die gravitativen Feldgrößen als lokale Inkremente die Änderung an der Referenzposition.

<sup>1</sup> Dies muss auch für die Herleitung in Wolf (1997, S. 26) gefordert werden.

## 2.6 Resumé

In diesem Kapitel ist die Herleitung der für die folgenden Kapitel benötigten Feldgleichungen rekapituliert worden. Folgende Schlüsse sind dabei von besonderem Interesse:

- Die Bewegungsgleichungen in der Lagrange'schen Formulierung sind äquivalent zur Euler'schen Formulierung und können aus dieser durch entsprechende Koordinatentransformationen gewonnen werden. Dabei ist es möglich, diese Transformationen in der Tensornotation für kartesische Koordinaten auszuführen, ohne auf eine strengere kurvilineare Notation zurückgreifen zu müssen, bei der zwischen ko- und kontravarianten Tensoren unterschieden wird.
- Für die Formulierung des Materialgesetzes wurde ausgenutzt, dass neben der Deformation auch die Verschiebung eine inkrementielle Feldgröße ist.
- In der hier gewählten Darstellung ist die Flächenmassendichte  $\sigma^R$  als Störung aufgefasst worden, die für die Referenzkonfiguration vorgegeben ist. Demgegenüber wurde in der Darstellung von [Wolf \(1997\)](#) die Flächenmassendichte  $\sigma$  für die aktuelle Konfiguration vorgegeben, so dass sich die Grenzflächenbedingungen der Totalfelder unterscheiden:

[Wolf \(1997, S. 22\)](#)

hier [S. 27](#)

$$[r_i]_{\pm}^+ = 0 \quad (3.10) \quad [r_i]_{\pm}^+ = 0 \quad (2.117)$$

$$[n_j t_{ij}]_{\pm}^+ = -g_i \sigma \quad (3.13) \quad [n_j^{(0)} \tau_{ij}]_{\pm}^+ = -g_i \sigma^R \quad (2.118)$$

$$[\phi]_{\pm}^+ = 0 \quad (3.11) \quad [\phi]_{\pm}^+ = 0 \quad (2.119)$$

$$[n_i \phi_{,j} b_{ji}^{-1}]_{\pm}^+ = -4\pi\gamma\sigma \quad (3.12) \quad [\phi_{,j} b_{ji}^{-1} n_k^{(0)} b_{ki}^{-1}]_{\pm}^+ = -4\pi\gamma\sigma^R \quad (2.120)$$

Sofern in der Referenzkonfiguration alle Flächennormalen kollinear zur Schwere sind, hat diese abweichende Betrachtungsweise keine Auswirkung auf die inkrementiellen Grenzflächenbedingungen [\(2.138\)–\(2.141\)](#), da sie sich nicht von denen in [Wolf \(1997, S. 26, Gl. \(3.61\)–\(3.64\)\)](#) unterscheiden.

# 3

---

## Lösung der inkrementiellen Feldgleichungen für ein geschichtetes Kontinuum

Es werden nun die im vorherigen Kapitel hergeleiteten Feldgleichungen auf einen geschichteten Halbraum angewendet und für ein axialsymmetrisches Problem gelöst. Nach einer Darstellung des prinzipiellen Lösungsansatzes für die mechanischen und gravitativen Feldgleichungen in [Abschn. 3.1, S. 33](#) und [Abschn. 3.2, S. 37](#) wenden wir uns in [Abschn. 3.4, S. 39](#) Näherungslösungen zu, die sich bei Vernachlässigung verschiedener Terme in den Feldgleichungen ergeben. Dabei ist insbesondere die Regularität der im Laplace-Bereich gelösten Feldgleichungen für die Rücktransformation in den Zeitbereich von Interesse, die von dem betrachteten Materialgesetz abhängt. Wir verwenden die Maxwell-Viskoelastizität als Materialgesetz, die in [Abschn. 3.3, S. 38](#) vorgestellt wird. In [Abschn. 3.5, S. 43](#) skizzieren wir die inverse Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes und in [Abschn. 3.5.3, S. 47](#) die diskrete Hankel-Transformation, mit deren Hilfe die Rücktransformation in den Raumbereich erfolgt.

Die Feldgleichungen werden unter folgenden Annahmen gelöst:

- Der Ausgangszustand wird durch ein inkompressibles, hydrostatisch vorgespanntes Kontinuum definiert.
- Störungen des Ausgangszustandes sind kompressibel.
- Das Materialgesetz wird durch die Maxwell-Viskoelastizität bezüglich Scherungen und durch Elastizität bezüglich Kompression bestimmt.
- Die Materialparameter sowie der Schwerevektor sind in jeder Schicht konstant.

Setzen wir die Materialgleichung [\(2.74\)](#) in die inkrementielle Bewegungsgleichung [\(2.133\)](#) ein, berücksichtigen den inkompressiblen Ausgangszustand mit Hilfe von [\(2.123\)](#) und wenden die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit an, ergibt sich die Bewegungsgleichung zu

$$\tilde{\lambda}(\tilde{u}_{k,k})_{,i} + \tilde{\mu}(\tilde{u}_{j,i} + \tilde{u}_{i,j})_{,j} + (p_j^{(0)} u_j)_{,i} - \rho^{(0)} g_i^{(0)} \tilde{u}_{k,k} + \rho^{(0)} \tilde{g}_i^{(\Delta)} = 0. \quad (3.1)$$

Entsprechend lauten die Potentialgleichung [\(2.136\)](#) und die Schweregleichung [\(2.137\)](#)

$$\tilde{\phi}_{,ii}^{(\Delta)} = 4\pi\gamma\rho^{(0)}\tilde{u}_{i,i}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{g}_i^{(\Delta)} = \tilde{\phi}_{,i}. \quad (3.3)$$

Wir werden im Folgenden axialsymmetrische Anregungen betrachten, so dass es günstig ist, das Problem in Zylinderkoordinaten zu diskutieren ([Abschn. A, S. 99](#)). Dazu stellen wir die zu

lösenden Gleichungen kompakt in Operatorform dar:

$$\underbrace{\tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{I}} + \underbrace{\nabla(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla p^{(0)})}_{\text{II}} - \underbrace{\rho^{(0)} \mathbf{g}^{(0)} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{III}} + \underbrace{\rho^{(0)} \tilde{\mathbf{g}}^{(\Delta)}}_{\text{IV}} = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 \tilde{\phi}^{(\Delta)} = 4\pi\gamma\rho^{(0)} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(\Delta)} = \nabla \tilde{\phi}^{(\Delta)}, \quad (3.6)$$

wobei  $\nabla$  den Nabla-Operator und  $\nabla^2$  den Laplace-Operator bezeichnet. In (3.4) haben die Terme folgende Bedeutung:

- I** Die viskoelastische Kraft kann hinsichtlich dreier Zeitintervalle aufgeteilt werden:
- 1) die instantane elastische Antwort, die durch Kompressions- und Schermodul bestimmt wird,
  - 2) die Relaxation der Scherkräfte auf der Zeitskala der Maxwell-Zeit,
  - 3) das lineare Kriechen einer Newton'schen Flüssigkeit, das durch die dynamische Viskosität bestimmt wird.

- II** Die hydrostatische Vorspannung ergibt sich aus der Bewegung von Materiepunkten im Spannungsfeld des Ausgangszustandes, das durch ein hydrostatisches Druckfeld  $p^{(0)}$  beschrieben wird. Da die Schwere in jeder Schicht als konstant und vertikal nach unten gerichtet angenommen wird,

$$\mathbf{g}^{(0)} = g^{(0)} \mathbf{e}_z = \text{konst.}, \quad (3.7)$$

vereinfacht sich der Term zu

$$\nabla(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla p^{(0)}) = \rho^{(0)} g^{(0)} \nabla(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_z). \quad (3.8)$$

- III** Die interne Auftriebskraft wird durch die inkrementielle Dichteänderung bewirkt.

- IV** Das Schwereinkrement koppelt die Bewegungsgleichung (3.4) mit der Potentialgleichung (3.5). Im Folgenden vernachlässigen wir diesen Term.

Um den Einfluss der Terme auf die Lösung zu untersuchen, betrachten wir vier vereinfachte Bewegungsgleichungen:

- **I = 0** (Näherung C0): Kompressibilität ohne Schwere  
Sie repräsentiert das klassische Boussinesq-Problem (z. B. Farrell, 1972). Da in einer viskoelastischen Flüssigkeit die elastischen Rückstellkräfte, die hier ausschließlich wirken, relaxieren, ist diese Näherung nur für den elastischen Fall von Interesse.
- **I + II = 0** (Näherung C1): Kompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung  
Die hydrostatischer Vorspannung wirkt bei einer vertikalen Verschiebung als Rückstellkraft.
- **I + II + III = 0** (Näherung C2): Kompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung und internem Auftrieb  
Die interne Auftriebskraft wirkt bei Kompression der hydrostatischen Vorspannung entgegen.

- $\mathbf{I} + \mathbf{II} = \mathbf{0}$  und  $\lim \kappa \rightarrow \infty$  (Näherung IC): InkompRESSibilität mit hydrostatischer Vorspannung

Diese Näherung repräsentiert den inkompressiblen Grenzfall sowohl von Näherung C1 als auch von Näherung C2. Näherung IC ist in der Betrachtung von Auflastproblemen weit verbreitet (z. B. [Wolf, 1985c](#)) und ist auf GIA verschiedener Regionen der Erde angewendet worden: (Fennoskandien: [Breuer & Wolf, 1995](#); [Kaufmann & Wolf, 1996](#); [Thoma & Wolf, 1999](#)), (Kanada: [Wu & Hasegawa, 1996](#)), (Patagonien: [Ivins & James, 1999](#)) (Antarktis: [Ivins et al., 2003](#)).

Näherung  $\mathbf{I} + \mathbf{III} = \mathbf{0}$  wird nicht betrachtet, da für eine viskoelastische Flüssigkeit hier ebenfalls nach Spannungsrelaxation die Gegenkraft fehlt, die ein hydrostatisches Gleichgewicht herstellt ([Wolf, 1991a](#); [Wu, 1992](#)).

Die Grenzflächenbedingungen (2.138)–(2.141) sind unabhängig von der betrachteten Näherung und ergeben sich zu

$$[\tilde{\mathbf{u}}]_{-}^{+} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

$$[\tilde{\mathbf{t}}^{(\delta)} \cdot \mathbf{e}_z]_{-}^{+} = -g^{(0)} \mathbf{e}_z \tilde{\sigma}^R, \quad (3.10)$$

$$[\tilde{\phi}^{(\Delta)}]_{-}^{+} = 0, \quad (3.11)$$

$$[(\tilde{\mathbf{g}}^{(\Delta)} - 4\pi\gamma\rho^{(0)}\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_z]_{-}^{+} = -4\pi\gamma\tilde{\sigma}^R, \quad (3.12)$$

wobei wir  $\mathbf{n}^{(0)} = \mathbf{e}_z$  ([Abschn. 2.5.2, S. 27](#)) und (3.7) berücksichtigt haben. Die Regularitätsbedingungen aus (2.32) sind das Verschwinden aller inkrementiellen Feldgrößen für  $|\mathbf{X}| \rightarrow \infty$ ,

$$\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}^{(\delta)}, \tilde{\phi}^{(\Delta)}, \tilde{\mathbf{g}}^{(\Delta)}\} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{X} \in \partial^\infty \mathcal{X}_+, \quad (3.13)$$

sowie das Verschwinden der Traktion im oberen Halbraum,

$$[\tilde{\mathbf{t}}^{(\delta)} \cdot \mathbf{e}_z]_{-} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{X} \in \partial^I \mathcal{X}_+. \quad (3.14)$$

Die Abschnitte über kompressible Modelle beruhen teilweise auf Vorarbeiten von Wolf (unveröffentlichtes Manuskript).

### 3.1 Lösungsansatz für die mechanischen Feldgleichungen

Um (3.4) in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  ([S. 100](#)) zu lösen, machen wir die Annahme, dass sich  $\tilde{\mathbf{u}}$  hinsichtlich der Koordinaten und der Laplace-Variablen  $s$  faktorisieren lässt. Dann lautet der Produktansatz ([Rundle, 1980](#))

**Ansatz**

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, s) = & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\tilde{U}^n(k, z, s) \mathbf{B}^n(kr, \varphi) \\ & + \tilde{V}^n(k, z, s) \mathbf{C}^n(kr, \varphi) + \tilde{W}^n(k, z, s) \mathbf{P}^n(kr, \varphi)] k dk. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei ist folgende orthogonale Vektorbasis in Zylinderkoordinaten verwendet worden (Ben-Menahem & Singh, 1968):

$$\mathbf{B}^n = \frac{1}{k} \nabla [J_n(kr) e^{in\varphi}] = \left\{ \partial_{kr} J_n(kr) \mathbf{e}_r + i n \frac{J_n(kr)}{kr} \mathbf{e}_\varphi \right\} e^{in\varphi}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{C}^n = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{P}^n = \left\{ i n \frac{J_n(kr)}{kr} \mathbf{e}_r - \partial_{kr} J_n(kr) \mathbf{e}_\varphi \right\} e^{in\varphi}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{P}^n = J_n(kr) e^{in\varphi} \mathbf{e}_z. \quad (3.18)$$

Hier sind  $J_n(kr)$  die Bessel-Funktion erster Art und  $n$ -ter Ordnung (Abschn. A.1, S. 99),  $k$  die Wellenzahl,  $i := \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit und  $\tilde{U}^n$ ,  $\tilde{V}^n$  und  $\tilde{W}^n$  die spektralen Komponenten der Verschiebung, die wir im Folgenden als Verschiebung bezeichnen (Anh. A.3, S. 100) und  $\times$  das Kreuzprodukt.

### Differentialgleichungssystem

Setzen wir (3.15) mit (3.16)–(3.18) in (3.4) ein und vernachlässigen den Term IV, erhalten wir unter Ausnutzung des Nablakalküls<sup>1</sup>, der Lösung  $\phi$  für die Laplace'sche Differentialgleichung  $\nabla^2 \phi = 0$ ,

$$\phi = J_n(kr) e^{in\varphi \pm kz}, \quad (3.19)$$

und der Orthogonalität von  $\mathbf{B}^n$ ,  $\mathbf{C}^n$  und  $\mathbf{P}^n$  ein lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung nach der Koordinate  $z$ :

$$\underbrace{\tilde{\mu} \partial_z^2 \tilde{U}^n - k^2 (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{U}^n + k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{W}^n}_{\text{I}} + \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} k \tilde{W}^n}_{\text{II}} = 0, \quad (3.20)$$

$$\underbrace{\partial_z^2 \tilde{V}^n - k^2 \tilde{V}^n}_{\text{I}} = 0, \quad (3.21)$$

$$\underbrace{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \partial_z^2 \tilde{W}^n - k^2 \tilde{\mu} \tilde{W}^n - k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{U}^n}_{\text{I}} + \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} \partial_z \tilde{W}^n}_{\text{II}} + \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} (k \tilde{U}^n - \partial_z \tilde{W}^n)}_{\text{III}} = 0. \quad (3.22)$$

Dabei ist (3.21) von (3.20) und (3.22) entkoppelt. In Anlehnung an die Rayleigh- und Love-Wellen, die den Lösungsraum der dynamischen Bewegungsgleichung bilden, bezeichnen wir nach Singh (1970) die Gleichung (3.21) als L-Problem und (3.20), (3.22) als R-Problem. Damit sind  $\mathbf{B}^n$  und  $\mathbf{P}^n$  die Basisvektoren des R-Problems und  $\mathbf{C}^n$  der Basisvektor des L-Problems.

### Koeffizientenmatrix

Um die Bewegungsgleichungen für ein geschichtetes Modell zu lösen, schreiben wir das Differentialgleichungssystem als System erster Ordnung. Dazu führen wir die Traktion ein, die auf die Fläche normal zu  $\mathbf{e}_z$  wirkt (z. B. Singh, 1970),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{e}_z &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\tilde{R}^n(k, z, s) \mathbf{B}^n(kr, \varphi) \\ &+ \tilde{S}^n(k, z, s) \mathbf{C}^n(kr, \varphi) + \tilde{T}^n(k, z, s) \mathbf{P}^n(kr, \varphi)] k dk, \end{aligned} \quad (3.23)$$

<sup>1</sup> Gemeint sind Identitäten für zusammengesetzte Ausdrücke mit  $\nabla$  (z. B. Bronstein & Semendjajew, 1987, S. 576f.).

wobei  $\tilde{R}^n$ ,  $\tilde{S}^n$  und  $\tilde{T}^n$  die spektralen Komponenten der Traktion bezeichnen. Mit der Materialgleichung (2.75) ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_z = \tilde{\lambda} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{e}_z + \tilde{\mu} [\nabla (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_z) + (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}]. \quad (3.24)$$

Setzen wir (3.15) und (3.23) in (3.24) ein, erhalten wir

$$\tilde{R}^n = \tilde{\mu} (\partial_z \tilde{U}^n + k \tilde{W}^n), \quad (3.25)$$

$$\tilde{S}^n = \tilde{\mu} \partial_z \tilde{V}^n, \quad (3.26)$$

$$\tilde{T}^n = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \partial_z \tilde{W}^n - \tilde{\lambda} k \tilde{U}^n. \quad (3.27)$$

Differenzieren von (3.25)–(3.27) nach  $z$  und Substituieren der zweiten Ableitungen in (3.20)–(3.22), ergibt für das R- und L-Problem jeweils ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung, das wir formal

$$\partial_z \mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{Y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y} = [\tilde{U}^n, \tilde{W}^n, \tilde{R}^n, \tilde{T}^n]^T \quad (3.28)$$

bzw.

$$\partial_z \mathbf{Y}^L = \mathbf{A}^L \mathbf{Y}^L \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}^L = [\tilde{V}^n, \tilde{S}^n]^T \quad (3.29)$$

als jeweiligen Verschiebungs-Spannungs-Vektor schreiben. Die von  $z$  unabhängigen Koeffizientenmatrizen lauten respektive

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -k & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda} k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ \frac{4k^2 (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & -\delta_{\mathbf{II}} \rho^{(0)} g^{(0)} k & 0 & -\frac{\tilde{\lambda} k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ -\frac{(\delta_{\mathbf{II}} \tilde{\lambda} + \delta_{\mathbf{III}} 2\tilde{\mu}) \rho^{(0)} g^{(0)} k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & k & -\frac{(\delta_{\mathbf{II}} - \delta_{\mathbf{III}}) \rho^{(0)} g^{(0)}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{A}^L := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{\mu}} \\ \tilde{\mu} k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

wobei die Schaltfunktionen  $\delta_{\mathbf{II}}$  bzw.  $\delta_{\mathbf{III}}$  Eins sind, sofern Term  $\mathbf{II}$  bzw.  $\mathbf{III}$  in den Feldgleichungen berücksichtigt ist.

### Einschränkung auf axialsymmetrische Störungen

Solange zum Ursprung  $r = 0$  axialsymmetrische Anregungen der Bewegungsgleichung betrachtet werden, folgt aufgrund der Isotropie in den Materialeigenschaften, dass alle Abhängigkeiten von

der Koordinate  $\varphi$  verschwinden müssen. Damit verschwinden alle Terme mit  $n \neq 0$ , und die Lösung (3.15) reduziert sich mit (3.16)–(3.18) und  $\partial_x J_0(x) = -J_1(x)$  auf das R-Problem

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, z, s) = -\mathbf{e}_r \int_0^\infty \tilde{U}^0(k, z, s) J_1(kr) k dk + \mathbf{e}_z \int_0^\infty \tilde{W}^0(k, z, s) J_0(kr) k dk, \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}(r, z, s) \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_r \int_0^\infty \tilde{R}^0(k, z, s) J_1(kr) k dk + \mathbf{e}_z \int_0^\infty \tilde{T}^0(k, z, s) J_0(kr) k dk. \quad (3.33)$$

Die von  $k$ ,  $z$  und  $s$  abhängigen Funktionen  $\tilde{U}$  und  $\tilde{W}$  (das hochgestellte  $n = 0$  wird im Folgenden vernachlässigt) werden aus der Lösung des Differentialgleichungssystems und den zugehörigen Randbedingungen bestimmt. Das L-Problem wird im Folgenden nicht behandelt, da die betrachteten Störungen die Komponente für  $\mathbf{C}^n$  nicht anregen. Fasst man  $\int_0^\infty f(r) J_{\{0,1\}}(kr) r dr$  als Integraltransformationen  $F(k) := \mathcal{H}_{\{0,1\}}\{f(r)\}$  auf, sind  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{W}$ ,  $\tilde{R}$  und  $\tilde{T}$  Hankel-Transformierte:

$$\tilde{u}_r(r, z, s) = -\mathcal{H}_1^{-1}\{\tilde{U}(k, z, s)\} := -\int_0^\infty \tilde{U}(k, z, s) J_1(kr) k dk, \quad (3.34)$$

$$\tilde{u}_z(r, z, s) = \mathcal{H}_0^{-1}\{\tilde{W}(k, z, s)\} := \int_0^\infty \tilde{W}(k, z, s) J_0(kr) k dk, \quad (3.35)$$

$$\tilde{t}_{rz}(r, z, s) = -\mathcal{H}_1^{-1}\{\tilde{R}(k, z, s)\} := -\int_0^\infty \tilde{R}(k, z, s) J_1(kr) k dk, \quad (3.36)$$

$$\tilde{t}_{zz}(r, z, s) = \mathcal{H}_0^{-1}\{\tilde{T}(k, z, s)\} := \int_0^\infty \tilde{T}(k, z, s) J_0(kr) k dk. \quad (3.37)$$

Dieser Ansatz weist im Vergleich zu anderen Arbeiten abweichende Vorzeichenkonventionen auf (z. B. Farrell, 1972; Wolf, 1985a).

### Lösung für einen geschichteten Halbraum

Das System (3.28) kann mit Hilfe der Propagatormatrixmethode gelöst werden, wobei sich bei Kenntnis der Lösung  $\mathbf{Y}$  in der Tiefe  $z_0$  die Lösung in der Tiefe  $z$  entsprechend

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{P}(z, z_0) \mathbf{Y}(z_0) \quad (3.38)$$

ergibt (Anh. B, S. 107).

Betrachten wir einen aus  $L$  Schichten bestehenden Halbraum (Abb. 3.1), müssen wir für die Schichten  $l = 1, \dots, L-1$  je einen Schichtpropagator  $\mathbf{P}^{(l)}$  bestimmen, so dass

$$\mathbf{Y}^-(z_{l+1}) = \mathbf{P}^{(l)}(z_{l+1}, z_l) \mathbf{Y}^+(z_l). \quad (3.39)$$

Desweiteren werden die Grenzflächenbedingungen (3.9) und (3.10) an jeder Schichtgrenze durch eine Grenzflächenpropagation repräsentiert,

$$\mathbf{Y}^+(z_l) = \mathbf{Y}^-(z_l) + \mathbf{C}^{(l)}, \quad (3.40)$$

wobei  $\mathbf{C}^{(l)} = [0, 0, 0, -g^{(0)} \tilde{\Sigma}_l^R]^T$  eine Last auf der Grenzfläche  $z = z_l$  darstellt,  $\mathbf{Y}^+(z_l)$  und  $\mathbf{Y}^-(z_l)$  im Sinne von (2.27) bzw. (2.28) aufzufassen sind und die Hankel-transformierte Flächenmassendichte mit Hilfe von

$$\tilde{\sigma}_l^R(r, z, s) := \int_0^\infty \tilde{\Sigma}_l^R(k, z, s) J_0(kr) k dk \quad (3.41)$$

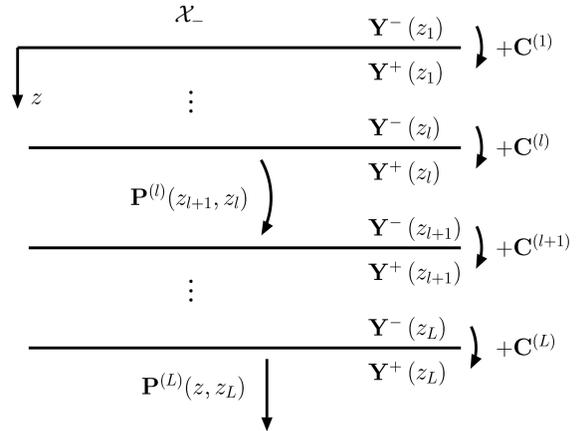


Abbildung 3.1: Schichtpropagation  $\mathbf{P}^{(l)}$  und Grenzschichtpropagation  $+C^{(l)}$  in einem geschichteten Halbraum.

definiert ist. Zusammen mit den Regularitätsbedingungen lautet die Lösung an der Oberfläche

$$\mathbf{Y}^-(z_1) = -\mathbf{Y}^C + \prod_{l=1}^{L-1} \mathbf{P}^{(l)}(z_l, z_{l+1}) \frac{\mathbf{H} \mathbf{M}^* \mathbf{S} \mathbf{Y}^C}{\det \mathbf{M}} \quad (3.42)$$

und setzt sich aus der speziellen Lösung für die Störungen

$$\mathbf{Y}^C := \mathbf{C}^{(1)} + \sum_{i=1}^{L-1} \prod_{l=1}^i \mathbf{P}^{(l)}(z_l, z_{l+1}) \mathbf{C}^{(i+1)} \quad (3.43)$$

und der allgemeinen Lösung für das homogene Problem zusammen, die mittels  $\mathbf{H} \mathbf{M}^* \mathbf{S} / \det \mathbf{M}$  an die spezielle Lösung angepasst ist (Abschn. B.1.3, S. 110). Dabei beschreiben  $\mathbf{H}$  die Halbraumlösung,  $\mathbf{M}$  die Funktionalmatrix,  $\mathbf{M}^*$  ihre transponierte Komatrix und  $\det \mathbf{M}$  ihre Determinante. Die Lösung kann für jede beliebige Tiefe durch Anwendung der Propagatoren berechnet werden.

## 3.2 Lösungsansatz für die gravitativen Feldgleichungen

In diesem Abschnitt wird die Lösung der Poisson'schen Gleichung (3.5) und der Schweregleichung (3.6) mit den Randbedingungen (3.11) und (3.12) dargestellt.

### Ansatz

Mit dem Ansatz

$$\tilde{\phi}^{(\Delta)}(r, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}^n(k, z, s) J_n(kr) e^{in\varphi} k dk \quad (3.44)$$

ergibt sich aus (3.5) und (3.11)

$$-k^2 \tilde{\Phi} + \partial_z^2 \tilde{\Phi} = 4\pi \gamma \rho^{(0)} \tilde{D}, \quad (3.45)$$

$$[\tilde{\Phi}]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (3.46)$$

wobei wir uns wieder auf axialsymmetrische Anregungen beschränken und den Index  $n$  gewöhnlich unterdrücken.

$$\tilde{D} = \partial_z \tilde{W} - k \tilde{U} \quad (3.47)$$

stellt die Hankel-transformierte Divergenz der Verschiebung dar. Weiterhin gilt für den Schwerevektor

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(\Delta)}(r, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\tilde{E}^n(k, z, s) \mathbf{B}^n(kr, \varphi) + \tilde{G}^n(k, z, s) \mathbf{P}^n(kr, \varphi)] k dk. \quad (3.48)$$

Da  $\tilde{\mathbf{g}}^{(\Delta)}$  gemäß (3.6) das Gradientenfeld des Potentials  $\phi^{(\Delta)}$  darstellt, treten in (3.48) keine Terme mit  $\mathbf{C}^n$  auf. Damit folgen aus (3.6) und (3.12)

$$\tilde{E} = k \tilde{\Phi}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{G} = \partial_z \tilde{\Phi}, \quad (3.50)$$

$$[\tilde{G} - 4\pi \gamma \rho^{(0)} \tilde{W}]_{\pm}^{\pm} = -4\pi \gamma \tilde{\Sigma}^R. \quad (3.51)$$

### Koeffizientenmatrix

Die Gleichungen (3.45) und (3.50) lassen sich als inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung schreiben:

$$\partial_z \mathbf{Z} = \mathbf{B} \mathbf{Z} + \mathbf{F}. \quad (3.52)$$

Dabei sind  $\mathbf{Z} := (\tilde{\Phi}, \tilde{G})^T$  der Lösungsvektor,  $\mathbf{F} := (0, 4\pi\gamma\rho^{(0)}\tilde{D})^T$  der Quellterm und  $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}$  die Koeffizientenmatrix der gravitativen Feldgleichungen. Die Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  lauten  $\pm k$ . Die in Abschn. B.2, S. 111 unter Beachtung der Regularitätsbedingung (3.13) bestimmte Lösung von (3.52) lautet

$$[\mathbf{Z}(z_1)]^- = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1 \end{pmatrix} 2\pi\gamma \sum_{l=1}^L e^{k(z_1-z_l)} \left( \tilde{\Sigma}_l^R - (\rho_l - \rho_{l-1})\tilde{W}(z_l) + \rho_l \bar{D}_l \right). \quad (3.53)$$

Der durch die Divergenz der Verschiebung verursachte Quellterm ist dabei

$$\bar{D}_l = \begin{cases} \int_{z_{l+1}}^{z_l} e^{k(z_l-z')} \tilde{D}(z') dz' & \text{für } l = 1, \dots, L-1, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \int_z^{z_L} e^{k(z_L-z')} \tilde{D}(z') dz' & \text{für } l = L. \end{cases} \quad (3.54)$$

Die Divergenz der Verschiebung  $\tilde{D}$  ergibt sich aus dem mechanischen Schichtpropagator  $\mathbf{P}^{(l)}$ , indem wir in (3.47) mittels (3.27)  $\partial_z \tilde{W}$  eliminieren, so dass

$$\tilde{D}(z) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_l + 2\tilde{\mu}_l} \sum_{i=1}^4 [\mathbf{P}_{4i}^{(l)}(z, z_l) - 2k\tilde{\mu}\mathbf{P}_{1i}^{(l)}(z, z_l)] [\mathbf{Y}_i(z_l)]^+. \quad (3.55)$$

Bei Kenntnis der Schichtpropagatoren können wir somit die Integrale in (3.54) geschlossen angeben. Die Dichte  $\rho_0$ , die für  $l = 1$  in (3.53) erscheint, ist die Dichte des oberen Halbraumes.

### 3.3 Maxwell-Viskoelastizität

Unter der Annahme von *Maxwell-Viskoelastizität* wird nunmehr die Relaxationsfunktion  $m_2$  festgelegt. Die Maxwell-Viskoelastizität wird als Differentialgleichung mittels

$$d_t t_{ij} + \frac{1}{\tau} t_{ij} = \mu_0 d_t \varepsilon_{ij}^d \quad (3.56)$$

dargestellt, wobei  $\varepsilon_{ij}^d := \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$  der Deviator der Verzerrung und  $\tau$  die Maxwell-Zeit ist. Für eine Heaviside'sche Verzerrung  $\varepsilon_{ij}^d h(t)$ <sup>1</sup> beschreibt die Relaxationsfunktion

$$m_2(t) := h(t) \mu_0 e^{-t/\tau} \quad (3.57)$$

als Lösung von (3.56) die vollständige Relaxation der instantanen elastischen Scherspannung (Abb. 3.2a auf der gegenüberliegenden Seite). Für eine Heaviside'sche Scherspannung  $t_{ij} h(t)$

<sup>1</sup> Die Definition der Heaviside-Funktion lautet  $h(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{für } t \in [0, \infty) \end{cases}$ .

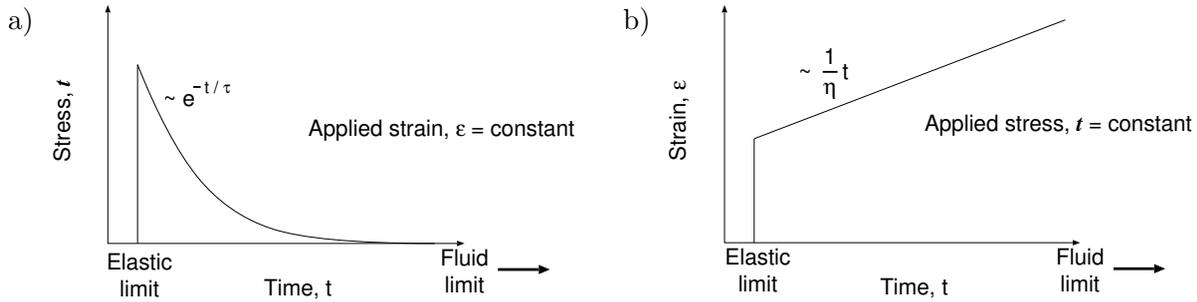


Abbildung 3.2: a) Spannungsverlauf [Relaxationsfunktion  $m_2$  (3.57)] für Maxwell-Viskoelastizität und eine konstant gehaltene Deformation und b) Deformationsverlauf [Kriechfunktion  $j_2$  (3.58)] für Maxwell-Viskoelastizität und eine konstant gehaltene Spannung.

zeigt die Kriechfunktion

$$j_2(t) := h(t) \left( \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\eta} t \right) \quad (3.58)$$

als Lösung von (3.56) zunächst eine instantane elastische Scherung proportional zu  $1/\mu_0$  und nachfolgend ein lineares Kriechen mit der stationären Viskosität  $\eta := \mu_0 \tau$  (Abb. 3.2b). Mit diesen Charakteristika stellt Maxwell-Viskoelastizität das einfachste lineare Materialgesetz dar, das elastisches und viskoses Verhalten sowohl gegenüber einer konstant gehaltenen Scherung als auch einer konstant gehaltenen Scherspannung in sich vereint, so dass seine Anwendung sehr verbreitet ist (z. B. Korolczuk, 1996). (3.57) genügt den Bedingungen für ein lineares hereditäres Materialgesetz in (2.66), so dass in (2.74) eingesetzt die inkrementielle Materialgleichung für Maxwell-Viskoelastizität

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(\delta)} = & \delta_{ij} \left[ \varepsilon_{kk} \kappa - \frac{2}{3} \varepsilon_{kk} \mu_0 + \frac{2}{3} \int_0^t \varepsilon_{kk}(t-t') \frac{\mu_0}{\tau} e^{-t'/\tau} dt' \right] \\ & + 2 \varepsilon_{ij} \mu_0 - 2 \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-t') \frac{\mu_0}{\tau} e^{-t'/\tau} dt' \end{aligned} \quad (3.59)$$

lautet.<sup>1</sup>

Mit (2.69) und (2.77) bestimmt die Laplace-Transformierte von (3.57) den Scherrelaxationsmodul für Maxwell-Viskoelastizität zu

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + (s\tau)^{-1}} \quad (3.60)$$

und mit (2.76) und (2.77) den ersten Lamé'schen Relaxationsmodul zu

$$\tilde{\lambda} = \kappa - \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{1 + (s\tau)^{-1}}. \quad (3.61)$$

### 3.4 Näherungslösungen

In diesem Abschnitt werden für die betrachteten Näherungen die mechanischen Feldgleichungen angegeben sowie die Regularität der Eigenwerte diskutiert. Die Regularität gewährleistet die Differenzierbarkeit in der komplexen Zahlenebene, die für die Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe des Residuensatzes erforderlich ist.

<sup>1</sup>Mit (2.67) und (2.68) kann (3.59) auch in einer Form dargestellt werden, in der die Ableitung nach der Zeit auf die Verzerrung und nicht auf die Relaxationsfunktion wirkt.

### 3.4.1 Kompressibilität ohne Schwere

Näherung C0 stellt das konventionelle Boussinesq-Problem dar. Wir erhalten sie, wenn wir alle Terme vernachlässigen, in denen die Schwere auftritt:

$$\underbrace{\tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{I}} = \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

#### Differentialgleichungssystem

Unter Berücksichtigung von (3.20)–(3.22) ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\tilde{\mu} \partial_z^2 \tilde{U} - k^2 (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{U} + k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{W} = 0, \quad (3.63)$$

$$\partial_z^2 \tilde{V} - k^2 \tilde{V} = 0, \quad (3.64)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \partial_z^2 \tilde{W} - k^2 \tilde{\mu} \tilde{W} - k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{U} = 0. \quad (3.65)$$

#### Eigenwerte

Mit dem Lösungsansatz  $e^{mz}$  lautet die charakteristische Gleichung für das R-Problem

$$(m^2 - k^2)^2 = 0 \quad (3.66)$$

mit  $m_1 = k$  und  $m_2 = -k$  als Eigenwerte der Vielfachheit Zwei, und entsprechend für das L-Problem

$$m^2 - k^2 = 0 \quad (3.67)$$

mit  $m_1 = k$  und  $m_2 = -k$  der Vielfachheit Eins.

### 3.4.2 Kompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung

Für Näherung C1 werden neben den viskoelastischen Kräften die hydrostatische Vorspannung berücksichtigt, so dass

$$\underbrace{\tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{I}} + \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} \nabla (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_z)}_{\text{II}} = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

#### Differentialgleichungssystem

Mit (3.20) und (3.22) erhalten wir für das R-Problem

$$\tilde{\mu} \partial_z^2 \tilde{U} - k^2 (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{U} + k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{W} + \rho^{(0)} g^{(0)} k \tilde{W} = 0, \quad (3.69)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \partial_z^2 \tilde{W} - k^2 \tilde{\mu} \tilde{W} - k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{U} + \rho^{(0)} g^{(0)} \partial_z \tilde{W} = 0. \quad (3.70)$$

#### Eigenwerte

Aus den Gleichungen (3.69) und (3.70) ergibt sich die charakteristische Gleichung für das R-Problem

$$(m^2 - k^2)^2 + 2k\epsilon m(m^2 - k^2) = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon := \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}, \quad (3.71)$$

deren Lösungen die einfachen Eigenwerte

$$\begin{aligned} m_1 &= k, & m_3 &= -m_1, \\ m_2 &= k(\sqrt{1 + \epsilon^2} - \epsilon), & m_4 &= -k(\sqrt{1 + \epsilon^2} + \epsilon) \end{aligned} \quad (3.72)$$

sind. Da wegen (3.71) in (3.72) Wurzelterme als Funktion der Laplace-Variablen  $s$  erscheinen, müssen wir die Regularität der Eigenwerte gesondert betrachten.

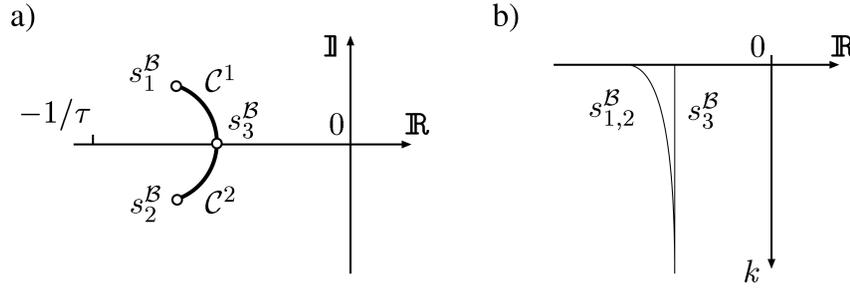


Abbildung 3.3: Schnittlinie und Verzweigungspunkte von  $\sqrt{1 + \epsilon(s)^2}$  in der komplexen Zahlenebene. a) Positionen der Schnittlinien  $\mathcal{C}^1$ ,  $\mathcal{C}^2$  und der Verzweigungspunkte  $s_1^B$ ,  $s_2^B$  und  $s_3^B$  in der komplexen Zahlenebene. b) Realteile der Verzweigungspunkte als Funktion der Wellenzahl  $k$ .

### Regularität

Die Regularität<sup>1</sup> der Eigenwerte muss in der gesamten komplexen Zahlenebene, d. h. für  $s \in \mathbb{C}$  untersucht werden. In den Formeln für die Eigenwerte  $m_{2,4}$  erscheint gemäß (3.72) der Ausdruck  $\sqrt{1 + \epsilon(s)^2}$ , so dass für  $\epsilon = \pm i$ , und  $\epsilon = \pm i \infty$  Verzweigungspunkte auftreten. Desweiteren sind die Eigenwerte für  $\epsilon = \pm i \alpha$  mit  $\alpha \geq 1$  imaginär, was mit den Schnittlinien von  $\sqrt{1 + \epsilon(s)^2}$  übereinstimmt.<sup>2</sup> Gleichzeitig bedeutet dies mit  $\sqrt{1 + \epsilon(s)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ , dass die Schnittlinien auf einem Kreisbogen liegen (Abb. 3.3a). Für Maxwell-Viskoelastizität ergeben sich mit (3.60), (3.61) und (3.71) die Verzweigungspunkte  $s_{1,2}^B$  und  $s_3^B$  sowie die Schnittlinien  $\mathcal{C}_{1,2}$  aus

$$s(\alpha) = -\frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{\kappa \mp \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k\alpha i}} \right)^{-1} = \begin{cases} s_{1,2}^B & \text{für } \alpha = 1, \\ \mathcal{C}_{1,2} & \text{für } \alpha > 1, \\ s_3^B & \text{für } \alpha \rightarrow \infty, \\ \text{regulär} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.73)$$

Aus  $2k\alpha i$  in (3.73) ist ersichtlich, dass der Pfad von  $s_{1,2}^B(k)$  mit den Schnittlinien  $\mathcal{C}_{1,2}$  zusammenfällt. Für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert der Realteil  $\text{Re}\{s_{1,2}^B\} (\propto k^{-2}) \rightarrow s_3^B = -\frac{1}{\tau} \frac{\mu_0}{\kappa + 4/3\mu_0}$  (Abb. 3.3b) und für  $k \rightarrow 0$  schließen sich die Schnittlinien zu einem Kreis mit dem Radius  $(s_3^B + 1/\tau)/2$ .

### 3.4.3 Kompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung und internem Auftrieb

In Näherung C2 berücksichtigen wir zusätzlich zur hydrostatischen Vorspannung den internen Auftrieb:

$$\underbrace{\tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{I}} + \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} \nabla (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_z)}_{\text{II}} - \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} \mathbf{e}_z \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{III}} = \mathbf{0}. \quad (3.74)$$

<sup>1</sup> Eine Funktion  $f(z)$  heißt im Punkt  $z = z_0 \in \mathbb{C}$  regulär, wenn sie in einer Umgebung von  $z_0$  differenzierbar ist (Bronstein & Semendjajew, 1987, S. 519).

<sup>2</sup> Die Schnittlinie von  $\sqrt{z}$  stimmt mit der negativen Realachse überein. Damit ist  $z = |z|e^{i\phi}$  mit  $-180^\circ < \phi \leq 180^\circ$ . Diese Wahl entspricht der Konvention in der komplexen Arithmetik von FORTRAN.

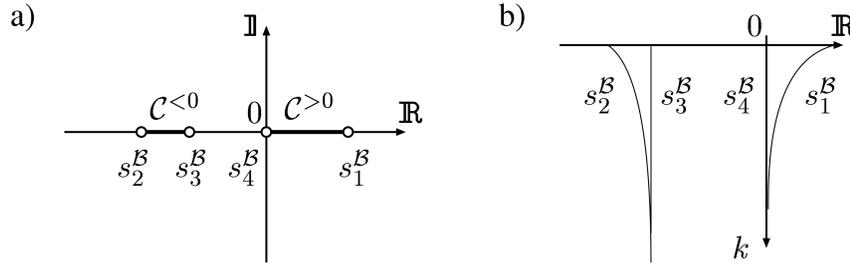


Abbildung 3.4: Schnittlinien und Verzweigungspunkte von  $\sqrt{1 - \epsilon(s)}$  in der komplexen Zahlenebene. a) Positionen der Schnittlinien  $\mathcal{C} < 0$  und  $\mathcal{C} > 0$  und der zugeordneten Verzweigungspunkte  $s_2^{\mathcal{B}}, s_3^{\mathcal{B}}$  und  $s_1^{\mathcal{B}}, s_4^{\mathcal{B}}$  in der komplexen Zahlenebene. b) Realteile der Verzweigungspunkte als Funktion der Wellenzahl  $k$ .

### Differentialgleichungssystem

Mit (3.20) und (3.22) erhalten wir für das R-Problem

$$\tilde{\mu} \partial_z^2 \tilde{U} - k^2 (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{U} + k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{W} + \rho^{(0)} g^{(0)} k \tilde{W} = 0, \quad (3.75)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \partial_z^2 \tilde{W} - k^2 \tilde{\mu} \tilde{W} - k (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \partial_z \tilde{U} + \rho^{(0)} g^{(0)} k \tilde{U} = 0. \quad (3.76)$$

### Eigenwerte

Die charakteristische Gleichung von (3.75) und (3.76) lautet

$$(m^2 - k^2)^2 - \epsilon^2 k^4 = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon := \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k \sqrt{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{\mu}}} \quad (3.77)$$

und liefert die einfachen Eigenwerte

$$\begin{aligned} m_1 &= k \sqrt{1 + \epsilon}, & m_3 &= -m_1, \\ m_2 &= k \sqrt{1 - \epsilon}, & m_4 &= -m_2. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Sofern  $\epsilon > 1$ , sind  $m_{2,4}$  imaginär. Damit ist für ein elastisches Kontinuum,  $\tilde{\mu} = \mu_0$ , für  $k < k^{\text{g}}$  die Stabilität nicht mehr gewährleistet, wobei der Wellenzahl der Stabilitätsgrenze,

$$k^{\text{g}} := k \epsilon = \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{\sqrt{(\kappa + \frac{4}{3} \mu_0) \mu_0}}, \quad (3.79)$$

die von Love (1911, S. 111) über die elastischen Module definierte Stabilitätsgrenze entspricht.

### Regularität

Die Eigenwerte  $m_{2,4}$  weisen bei  $\epsilon = 1$  Verzweigungspunkte auf. Für Maxwell-Viskoelastizität ergeben sich mit (3.60), (3.61) und (3.77) zwei Verzweigungspunkte:

$$s_{1,2}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\mu_0}{2\kappa} \left( \frac{k\kappa}{\rho^{(0)} g^{(0)}} \right)^2 \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{3} \left( \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k\kappa} \right)^2} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (3.80)$$

Für  $\epsilon = \infty$  weisen die Eigenwerte  $m_{1,\dots,4}$  Verzweigungspunkte auf, die aus  $(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{\mu} = 0$  hervorgehen:

$$s_3^{\mathcal{B}} = -\frac{1}{\tau} \frac{\kappa}{\kappa + \frac{4}{3} \mu_0}, \quad s_4^{\mathcal{B}} = 0. \quad (3.81)$$

Die Schnittlinien, auf denen die Eigenwerte imaginär sind, lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{<0} &:= \{ s \in \mathbb{R} \mid s_2^{\mathcal{B}} \leq s \leq s_3^{\mathcal{B}} \}, \\ \mathcal{C}^{>0} &:= \{ s \in \mathbb{R} \mid s_4^{\mathcal{B}} \leq s \leq s_1^{\mathcal{B}} \}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Für  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich aus (3.80), dass  $s_1^{\mathcal{B}}(\propto k^{-2}) \rightarrow 0$  und  $s_2^{\mathcal{B}}(\propto k^{-2}) \rightarrow s_3^{\mathcal{B}}$  konvergiert (Abb. 3.4 auf der gegenüberliegenden Seite).

### 3.4.4 Inkompressibilität mit hydrostatischer Vorspannung

Für ein inkompressibles Medium, Näherung IC, ergibt sich das materielle Druckinkrement aus  $p^{(\delta)} := -\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Setzen wir dies in (3.4) ein und berücksichtigen, dass die Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  in (3.4) und (3.5) verschwindet, so erhalten wir

$$\underbrace{\tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \nabla p^{(\delta)}}_{\text{I, } \lambda \rightarrow \infty} + \underbrace{\rho^{(0)} g^{(0)} \nabla[\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_z]}_{\text{II}} = \mathbf{0}, \quad (3.83)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.84)$$

#### Differentialgleichungssystem

Für die Lösung von (3.83) und (3.84) wird zusätzlich das Hankel-transformierte Druckinkrement

$$\tilde{p}^{(\delta)}(\mathbf{X}, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{P}^n(k, z, s) J_n(kr) k dk \quad (3.85)$$

verwendet. Mit (3.16)–(3.18) und der Axialsymmetrie ergibt sich für das R-Problem

$$\tilde{\mu} \partial_z^2 \tilde{U} - \tilde{\mu} k^2 \tilde{U} - k \tilde{P} + \rho^{(0)} g^{(0)} k \tilde{W} = 0, \quad (3.86)$$

$$\tilde{\mu} \partial_z^2 \tilde{W} - k^2 \tilde{W} - \partial_z \tilde{P} + \rho^{(0)} g^{(0)} \partial_z \tilde{W} = 0, \quad (3.87)$$

$$\partial_z \tilde{W} - k \tilde{U} = 0. \quad (3.88)$$

#### Eigenwerte

Das Differentialgleichungssystem (3.86)–(3.88) führt auf die charakteristische Gleichung

$$(m^2 - k^2)^2 = 0, \quad (3.89)$$

so dass die Eigenwerte

$$m_1 = k, \quad m_2 = -k \quad (3.90)$$

lauten und die Vielfachheit Zwei haben. Die Eigenwerte sind regulär.

## 3.5 Rücktransformation in den Raum-Zeit-Bereich

Um die Lösung in der Raum-Zeit-Bereich zu transformieren, wird für endliche Zeitintervalle eine Faktorisierung der Lastgeschichte,  $\sigma^{\text{R}}(r, t) = \sigma^{\text{r}}(r) \sigma^{\text{t}}(t)$ , angenommen. Hierbei stellt  $\sigma^{\text{r}}$  die Form der Last und  $\sigma^{\text{t}}$  die zeitliche Änderung der Lasthöhe dar. Nach Laplace- und Hankel-Transformation lautet die Lastgeschichte für ein Zeitintervall, für das  $\sigma^{\text{r}}$  und damit insbesondere der Lastradius  $r_{\text{L}}$  konstant ist,

$$\tilde{\Sigma}^{\text{R}}(k, s) = \Sigma^{\text{r}}(k r_{\text{L}}) \tilde{\sigma}^{\text{t}}(s). \quad (3.91)$$

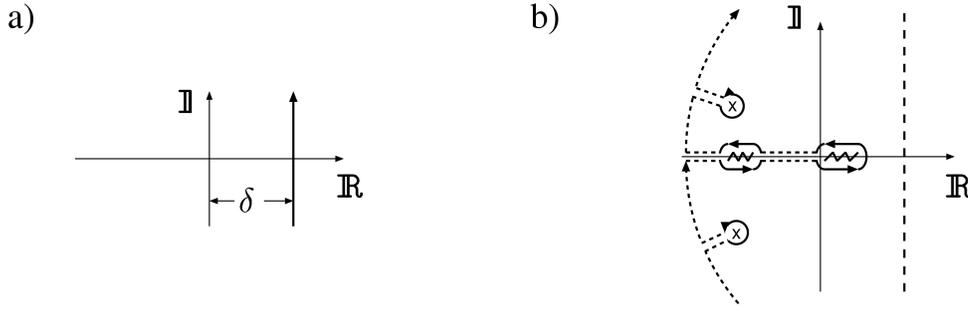


Abbildung 3.5: Ersetzen des Bromwich-Integrationsweges a), durch Kontour die alle nicht regulären Bereiche (Kreuze und Zickzacklinien) ausschließt b). Gestrichelte Integrationswege sowie der Halbkreis liefern keinen Beitrag, so dass die durchgezogenen Wege um die nicht regulären Bereiche verbleiben.

Die Faltung der Lastgeschichte mit der spektralen Lösung der Feldgleichung ergibt

$$\mathbf{y}(r, t) * \sigma^{\text{R}}(r, t) = \mathcal{H}^{-1} \left\{ \Sigma^{\text{r}}(k r_{\text{L}}) \mathcal{L}^{-1} \left[ \tilde{\sigma}^{\text{t}}(s) \tilde{\mathbf{Y}}(k, s) \right] \right\} . \quad (3.92)$$

Der Stern symbolisiert hier die Faltung sowohl mit der räumlichen Verteilung der Last als auch mit ihrer zeitlichen Änderung.  $\mathcal{L}^{-1}$  bezeichnet die inverse Laplace-Transformation. Zunächst betrachten wir die inverse Laplace-Transformation für eine Heaviside'sche Lastgeschichte. In [Abschn. 3.5.3, S. 47](#) behandeln wir die inverse Hankel-Transformation für die Rücktransformation in den Raumbereich.

### 3.5.1 Inverse Laplace-Transformation mit Hilfe des Bromwich-Integrals

Für die Rücktransformation der spektralen Lösungen in den Zeitbereich wird das Bromwich-Integral verwendet. Mit diesem lässt sich die inverse Laplace-Transformation schreiben als

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds , \quad (3.93)$$

wobei die Funktion  $f(t)$  die Bedingungen

$$\tilde{f}(s) \text{ regulär für } \text{Re } s > \delta , \quad (3.94)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0 \quad (3.95)$$

erfüllen muss ([Bronstein & Semendjajew, 1987, S 634f.](#)) und der Abstand  $\delta$  zur Imaginärachse so gewählt ist, dass alle nicht regulären Bereiche links vom Integrationsweg liegen ([Abb. 3.5a](#)).

Durch einen Halbkreis in der linken Halbebene kann dieser Integrationsweg für  $t > 0$  geschlossen werden und das Integral durch Ausschluss aller nichtregulären Bereiche mit Hilfe des Residuensatzes gelöst werden ([Abb. 3.5b](#)).

### 3.5.2 Faltung mit der Heaviside-Funktion

Die Faltung der spektralen Lösung  $\tilde{\mathbf{Y}}(s)$  mit einer Heaviside'schen Anregung<sup>1</sup>  $h(t)$  lautet formal

$$\mathbf{Y}(t) * h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{\mathbf{Y}}(s)\tilde{h}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \tilde{\mathbf{Y}}(s) \frac{1}{s} e^{st} ds, \quad (3.96)$$

wobei  $1/s$  die Laplace-Transformierte von  $h(t)$  ist. Da  $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{Y}}$  beschränkt ist, erfüllt der Integrand von (3.96) die Bedingung (3.95). Der als elastische Amplitude bezeichnete Grenzwert für  $t \rightarrow 0$  lautet mit (3.96)

$$\mathbf{Y}^E := \lim_{t \rightarrow 0} [\mathbf{Y}(t) * h(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \tilde{\mathbf{Y}}(s) \frac{1}{s} ds = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{Y}}(s). \quad (3.97)$$

Der als inviskose Amplitude bezeichnete Grenzwert für  $t \rightarrow \infty$  existiert nur dann, wenn  $\tilde{\mathbf{Y}}(s)$  für  $\text{Re}\{s\} \leq 0$  regulär ist. Dann gilt insbesondere, dass  $\tilde{\mathbf{Y}}(0)$  regulär ist, und mittels der Cauchy'schen Integralformel

$$\mathbf{Y}^F := \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{Y}(t) * h(t)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{s=0} \tilde{\mathbf{Y}}(s) \frac{1}{s} ds = \tilde{\mathbf{Y}}(0). \quad (3.98)$$

Mit (3.97) lässt sich das Faltungsintegral (3.96) alternativ in der Form

$$\mathbf{Y}(t) * h(t) = \mathbf{Y}^E + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \tilde{\mathbf{Y}}(s) \frac{1}{s} (e^{st} - 1) ds \quad (3.99)$$

schreiben. Sofern die inviskose Amplitude existiert, lautet sie mit  $t \rightarrow \infty$  in (3.99)

$$\mathbf{Y}^F = \mathbf{Y}^E - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \tilde{\mathbf{Y}}(s) \frac{1}{s} ds. \quad (3.100)$$

Sind alle nichtregulären Bereiche identifiziert, reduziert sich die Integration unter Anwendung des Residuensatzes auf

$$\mathbf{Y}(t) * h(t) = \mathbf{Y}^E + \frac{1}{2\pi i} \sum_k \oint_{C_k} \tilde{\mathbf{Y}}(s) \frac{1}{s} (e^{st} - 1) ds, \quad (3.101)$$

wobei  $C_k$  den Weg bezeichnet, der den jeweiligen nichtregulären Bereich ausschließt und die Summe alle vorhandenen nichtregulären Bereiche erfassen muss.

Bei Anwendung dieses Ansatzes auf Probleme der Gravito-Viskoelastodynamik wird häufig davon ausgegangen, dass die nichtregulären Bereiche als einfache isolierte Pole auf der Realachse vorliegen. In diesem Fall kann das Heaviside'sche Theorem auf den jeweiligen Pol angewendet werden (Arfken, 1985, S. 400):

*Lässt sich der Integrand als Quotient zweier regulärer Funktionen  $p(s)$  und  $q(s)$  darstellen, wobei  $q(s)$  an der Polstelle  $s_k$  eine einfache isolierte Nullstelle aufweist, gilt*

$$\text{Res} \left\{ \frac{p(s_k)}{q(s_k)} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} \frac{p(s)}{q(s)} ds = \left. \frac{p(s)}{\partial_s q(s)} \right|_{s=s_k}. \quad (3.102)$$

<sup>1</sup> Zur Definition von  $h(t)$  siehe S. 38.

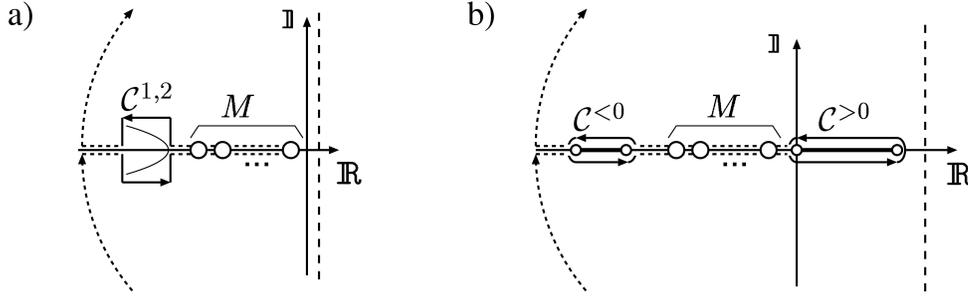


Abbildung 3.6: Kontouren für Näherungen C1, a), und C2, b), die die jeweiligen nicht regulären Bereiche ausschließen. Die gestrichelt gezeichneten Integrationswege sowie der Halbkreis liefern keinen Beitrag, so dass die durchgezogenen Wege um die nicht regulären Bereiche verbleiben.

Mit dem Lösungsvektor (3.42) und (3.101) liefern die Ableitungen an den Nullstellen der Funktionaldeterminante die Residuen

$$\text{Res} \left\{ \tilde{\mathbf{Y}}(s_k) \right\} = \frac{\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{N}}(s_k)}{\partial_s \det \mathbf{M}|_{s=s_k}}, \quad (3.103)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{N}}$  der Zähler des Lösungsvektors ist. Die Residuen oder Moden werden somit durch die Relaxationszeit  $-1/s_k$  und die viskose Amplitude

$$\mathbf{Y}_k^{\text{V}} := -\text{Res} \left\{ \tilde{\mathbf{Y}}(s_k) \right\} \frac{1}{s_k} \quad (3.104)$$

charakterisiert, und das Faltungsintegral lautet

$$\mathbf{Y}(t) * h(t) = \mathbf{Y}^{\text{E}} + \sum_k \mathbf{Y}_k^{\text{V}} (1 - e^{s_k t}). \quad (3.105)$$

Die Eigenvektoren der Näherungen C1 und C2 liefern neben den Relaxationsmoden nichtreguläre Bereiche (S. 41 bzw. S. 42). Die Schnittlinien und Verzweigungspunkte müssen dementsprechend identifiziert und durch entsprechende Integrationswege ausgeschlossen werden. Für Näherung C1 gilt

$$\mathbf{Y}(t) * h(t) = \mathbf{Y}^{\text{E}} + \sum_k^M \mathbf{Y}_k^{\text{V}} (1 - e^{s_k t}) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{1,2}} \frac{\tilde{\mathbf{Y}}(s)}{s} (1 - e^{s t}) ds \quad (3.106)$$

und für Näherung C2

$$\mathbf{Y}(t) * h(t) = \mathbf{Y}^{\text{E}} + \sum_k^M \mathbf{Y}_k^{\text{V}} (1 - e^{s t}) - \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C^{<0}} + \oint_{C^{>0}} \right] \frac{\tilde{\mathbf{Y}}(s)}{s} (1 - e^{s t}) ds, \quad (3.107)$$

wobei  $\oint$  ein geschlossenes Wegintegral um die jeweilige Schnittlinie bezeichnet. Für die numerische Integration entlang der in Abb. 3.6 dargestellten Integrationswege greifen wir auf Standardroutinen zurück (Press *et al.*, 1992), die wir gegebenenfalls für eine komplexe Arithmetik erweitert haben. Die Faltung mit einer beliebigen Lastgeschichte ergibt sich unmittelbar aus dem Faltungssatz (z. B. Thoma & Wolf, 1999).

### 3.5.3 Inverse Hankel-Transformation mit Hilfe der diskreten Hankel-Transformation

Die Faltung des Lösungsvektors  $\mathbf{Y}(k, t)$  mit der Lastfunktion  $\Sigma^r(k)$  lautet

$$\mathbf{y}(r, t) * \sigma^r(r) = (-1)^{0,1} \mathcal{H}_{0,1}^{-1} \{ \mathbf{Y}(k, t) \Sigma^r(k) \} = (-1)^{0,1} \int_0^\infty \mathbf{Y}(k, t) \Sigma^r(k) J_{0,1}(kr) k dk \quad (3.108)$$

und kann im Allgemeinen nur numerisch gelöst werden. Anstelle einer einfachen Integration mit Hilfe der Simpson-Regel verwenden wir die von [Johnston et al. \(1998\)](#) vorgeschlagene diskrete Hankel-Transformation. Sie beruht auf der finiten Hankel-Transformation ([Sneddon, 1951, S. 82](#)):

*Sofern  $f(r)$  für  $r \in (0, R)$  Dirichlet-Bedingungen erfüllt und in diesem Bereich ihre finite Hankel-Transformierte*

$$F(\alpha_i) = \int_0^R f(r) J_n(r \xi_i^n) k dk \quad (3.109)$$

*lautet, wobei  $\xi_i^n$  eine Nullstelle von  $J_n(R \xi_i^n) = 0$  bezeichnet, gilt für jeden Punkt in  $r \in (0, R)$ , an dem  $f(r)$  stetig ist,*

$$f(r) = \frac{2}{R^2} \sum_i^\infty F(\xi_i^n) \frac{J_n(r \xi_i^n)}{[J_n'(R \xi_i^n)]^2}, \quad (3.110)$$

*wobei über alle positiven Nullstellen  $\xi_i^n$  summiert wird.*

Für  $R \rightarrow 1$  in (3.109) ergibt sich mit  $r = R r'$  und  $J_0' = -J_1$  in (3.110) die diskrete inverse Hankel-Transformation für den Grad 0 zu

$$f(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^\infty F(\alpha_i/R) \frac{J_0(r \alpha_i/R)}{J_1^2(\alpha_i)}, \quad (3.111)$$

wobei  $\alpha_i$  die positiven Nullstellen von  $J_0$  bezeichnet. Entsprechend lautet mit  $J_1'(\beta_i) = J_0(\beta_i) - 1/\beta_i J_1(\beta_i) = J_0(\beta_i)$  die diskrete inverse Hankel-Transformation für den Grad 1

$$f(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^\infty F(\beta_i/R) \frac{J_1(r \beta_i/R)}{J_0^2(\beta_i)}, \quad (3.112)$$

wobei  $\beta_i$  die positiven Nullstellen von  $J_1$  bezeichnet. Für die Transformation der Feldgrößen  $\mathbf{Y}(t)$  setzen wir voraus, dass im Abstand von fünf Lastradien die Störung abgeklungen ist, so dass  $R = 5 r_L$  gilt.

### 3.6 Resumé

In diesem Kapitel sind die in [Kap. 2](#) präsentierten Feldgleichungen für ein zylindersymmetrisches Problem gelöst worden. Dabei wird die Abhängigkeit von der Radialentfernung durch Besselfunktionen und trigonometrische Funktionen beschrieben und die Abhängigkeit von der Tiefe durch Exponentialfunktionen. Die Tiefenabhängigkeit ergibt sich dabei aus einem homogenen Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, das von der betrachteten Näherung der Bewegungsgleichung [\(3.4\)](#) abhängt:

- Näherung C0: konventionelles Boussinesq-Problem als elastisches Vergleichsmodell,  $\mathbf{I} = 0$
- Näherung C1: Berücksichtigung der hydrostatischen Vorspannung,  $\mathbf{I} + \mathbf{II} = 0$
- Näherung C2: Berücksichtigung der hydrostatischen Vorspannung und des internen Auftriebs,  $\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} = 0$
- Näherung IC: inkompressibler Grenzfall von Näherung C1 bzw. Näherung C2

Um die Bewegungsgleichung von der Schweregleichung zu entkoppeln, ist Term  $\mathbf{IV}$  nicht berücksichtigt worden, und um die stabilisierende Wirkung von Term  $\mathbf{II}$  für eine viskoelastische Flüssigkeit nicht außer Acht zu lassen, ist dieser Term nur in Näherung C0 vernachlässigt.

Die Annahme (linearer) Maxwell-Viskoelastizität für die Materialgleichung ermöglicht es, nach Laplace-Transformation die zeitliche Abhängigkeit in der Bewegungsgleichung zu eliminieren. Die inverse Laplace-Transformation ist über das Bromwich-Integral bestimmt worden. Um das Integral auf die Residuen der zu invertierenden Funktion reduzieren zu können, muss das reguläre Verhalten der Lösungen diskutiert werden. Irreguläres Verhalten tritt dabei in allen Näherungen in Form einfach isolierter Polstellen auf, die sich als Relaxationsmoden (isolierte Nullstellen von  $\det \mathbf{M}$ ) interpretieren lassen. Weitere Irregularitäten treten in folgenden Näherungen auf:

- Näherung C1: zwei Schnittlinien in der negative Halbebene,  $|s| < 0$
- Näherung C2: eine Schnittlinie in der negativen und eine Schnittlinie in der positiven Halbebene mit  $s = 0$  als Verzweigungspunkt

Diese als kontinuierliche Moden interpretierten Bereiche müssen berücksichtigt werden.

Für die inverse Hankel-Transformation ist das von [Johnston \*et al.\* \(1998\)](#) verwendete Verfahren präsentiert.

## Homogener viskoelastischer Halbraum

Die Lösung der in [Kap. 2](#) vorgestellten inkrementiellen Feldgleichungen für ein viskoelastisches Kontinuum beruht im Wesentlichen auf der von Peltier vorgeschlagenen Methode, die viskoelastischen Feldgleichungen für einen radial geschichteten Planeten Laplace'sch zu transformieren und ihre Lösung durch ein diskretes Spektrum von Eigenfunktionen darzustellen, die als Relaxationsmoden bezeichnet werden ([Peltier, 1974, 1976](#); [Wu & Peltier, 1982](#)). Die Relaxationsmoden sind dabei vergleichbar mit den Eigenschwingungen, die die Lösungen der dynamischen Feldgleichungen einer elastischen Kugel beschreiben ([Alterman \*et al.\*, 1959](#)). Die weitreichenden Parallelen dieser beiden Darstellungen wurden von [Tromp & Mitrovica \(1999a\)](#) herausgestellt. [Wolf \(1985b\)](#) übertrug den modalen Ansatz auf einen vertikal geschichteten Halbraum. Der Charakter der Relaxationsmoden des ebenen Modelles war dabei mit denen des entsprechenden sphärischen Modelles vergleichbar. In Hinblick auf das dynamische Problem entspricht dies dem Übergang von Eigenschwingungen für sphärische Geometrie zu Oberflächenwellen für ebene Geometrie.

Bei Annahme inkompressibler Störungen wird die Lösung durch ein diskretes Spektrum von Relaxationsmoden dargestellt, deren Anzahl sich nach der Zahl der Schichten des Erdmodells richtet ([Han & Wahr, 1995](#); [Vermeersen \*et al.\*, 1996a](#); [Wu & Ni, 1996](#)), aber auch von der angenommenen Rheologie, z. B. Maxwell- oder Burgers-Viskoelastizität, abhängt ([Rümpker & Wolf, 1996](#); [Wolf, 1997](#)). Betrachtet man kompressible Störungen, tritt für sphärische Geometrie das Problem auf, dass die Anzahl der Moden nicht mehr endlich ist. [Han & Wahr \(1995\)](#) forderten die Existenz einer abzählbaren unendlichen Menge von Moden innerhalb eines endlichen Intervalles. Diese wurden von [Vermeersen \*et al.\* \(1996b\)](#), [Hanyk \*et al.\* \(1999\)](#) und [Vermeersen & Mitrovica \(2000\)](#) eingehend untersucht. Eng verbunden mit der Frage, ob in einem Spektrum alle Moden auffindbar sind und ihre Amplituden bestimmt werden können, ist die Frage nach der Vollständigkeit der spektralen Darstellung der Lösung. Allerdings ist diese Frage bereits für das elastodynamische Problem nicht geklärt (z. B. [Malischewsky, 1987](#), S. 206).

Die Anzahl der Untersuchungen über kompressible viskoelastische Störungen eines Halbraumes ist klein. [Wolf \(1985b\)](#) bemerkte, dass eine Darstellung durch diskrete Moden nicht mehr möglich ist. Er verwendete deshalb eine polynomiale Näherung für die Darstellung der Eigenwerte. Analog ergeben sich kontinuierliche Spektren für die Wellenausbreitung in unendlich ausgedehnten Kontinua ([Wilcox, 1984](#)) sowie für Oberflächenwellen (z. B. [Maupin, 1996](#)). Ihre Existenz und Bedeutung für viskoelastische Störungen wird im Folgenden erstmals diskutiert.

Ein weiteres Problem kompressibler Störungen ergibt sich aus der Annahme eines homogenen Ausgangszustandes. Eine kleine kompressive Störung nahe der Oberfläche führt für eine inviskose Flüssigkeit zu einer Singularität, sofern die hydrostatische Vorspannung [Term **II** in der Bewegungsgleichung (3.4)] nicht berücksichtigt ist ([Wolf, 1991b](#); [Wu, 1992](#)). Wenn der interne Auftriebsterm [Term **III**] berücksichtigt ist, ergeben sich für ein viskoelastisches Kontinuum Rayleigh–Taylor-Instabilitäten ([Plag & Jüttner, 1995](#)). In diesem Fall ist auch für einen elastischen Körper die Stabilität nicht gewährleistet, sofern die elastische Rückstellkraft kleiner als ein bestimmte Stabilitätsgrenze ist ([Jeans, 1903](#); [Love, 1908](#); [Wieczerkowski, 1999](#)). [Wolf \(1985b\)](#)

umgang das Problem möglicher Instabilitäten dadurch, dass er den internen Auftriebsterm vernachlässigte.

Ein anderer Weg, dieses Problem zu umgehen, besteht darin, Dichte und Kompressionsmodul als Funktion der Tiefe über die Williamson–Adams-Beziehung vorzuschreiben (Bullen, 1975, S. 67f.) und lokal inkompressible Störungen, das heißt  $\rho^{(\Delta)} = 0$ , für das lokale Dichtekrement anzunehmen (Wolf, 1997). Im Gegensatz zur materiellen Inkompressibilität wird dabei das lokale Druckinkrement  $p^{(\Delta)} = \kappa \rho^{(\Delta)} / \rho^{(0)}$  aus  $\kappa \rightarrow \infty$  und  $\rho^{(\Delta)} \rightarrow 0$  gebildet (Abschn. 3.4.4, S. 43). Unter dieser Annahme wurden Lösungen für eine viskose Kugel von Li & Yuen (1987) und Wu & Yuen (1991) bestimmt, für einen viskoelastischen Halbraum von Wolf & Kaufmann (2000) und für eine viskoelastische Kugel von Martinec *et al.* (2001a) und Wolf & Li (2002). Eine wichtige Konsequenz dieser Annahme ist, dass der Auftriebsterm nicht mehr in der Bewegungsgleichung erscheint und die durch die Kompressibilität bedingten Probleme in den Relaxationsspektren verschwinden. Als Folge entsprechen den Relaxationsmoden jene für ein materiell inkompressibles viskoelastisches Kontinuum (Näherung IC), und es erscheinen keine Instabilitäten (Wolf & Kaufmann, 2000).

In diesem Kapitel wird das generelle Verhalten der in Kap. 3 behandelten Näherungslösungen an Hand eines homogenen Halbraumes dargestellt und die Problematik des mit kompressiblen Störungen inkonsistenten Ausgangszustandes herausgestellt. Dabei wird auf die analytischen Darstellungen aus Anh. B, S. 107 zurückgegriffen. Da die Wellenzahl  $k$  in SI-Einheiten unhandlich ist, verwenden wir in den folgenden Kapiteln die dem Legendre-Grad für sphärische Geometrie entsprechende normierte Wellenzahl

$$n := k R_{\oplus}. \quad (4.1)$$

Zunächst diskutieren wir die Störungen eines homogenen, elastischen Halbraumes (Erdmodell U, Tab. 4.1). Danach wenden wir uns dem viskoelastischen Halbraum zu (Abschn. 4.2, S. 54), wobei

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\kappa$ (GPa)	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Mantel	3380	124.7	67.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 4.1: Parameterwerte für Erdmodell U. Für Näherung IC gilt  $\kappa = \infty$ .

die Diskussion der Moden sowie der Regularität im Mittelpunkt stehen. In diesem Abschnitt gehen wir auf die Stabilitätsgrenze ein.

## 4.1 Störungen eines elastischen Halbraumes

Für die Diskussion der Näherungen bei Elastizität ersetzt nach Einsetzen von (3.60) in (3.97) der elastische Schermodul den Scherrelaxationsmodul, so dass die Abhängigkeit von der Laplace-Variablen verschwindet.

### 4.1.1 Verschiebungen

#### Horizontalverschiebung

Abbildung 4.1a auf der gegenüberliegenden Seite zeigt die auf das hydrostatische Gleichgewicht  $\Sigma^R / \rho^{(0)}$  normierte und mit der normierten Wellenzahl multiplizierte elastische Horizontalverschiebungen an der Oberfläche. Die Verschiebung von Näherung IC verschwindet wegen  $\nu = 1/2$  in (B.99). Im Vergleich der kompressiblen Näherungen erkennt man, dass nur für kleine Wellenzahlen signifikante Unterschiede zwischen den Näherungen auftreten. Für große  $n$  verschwindet

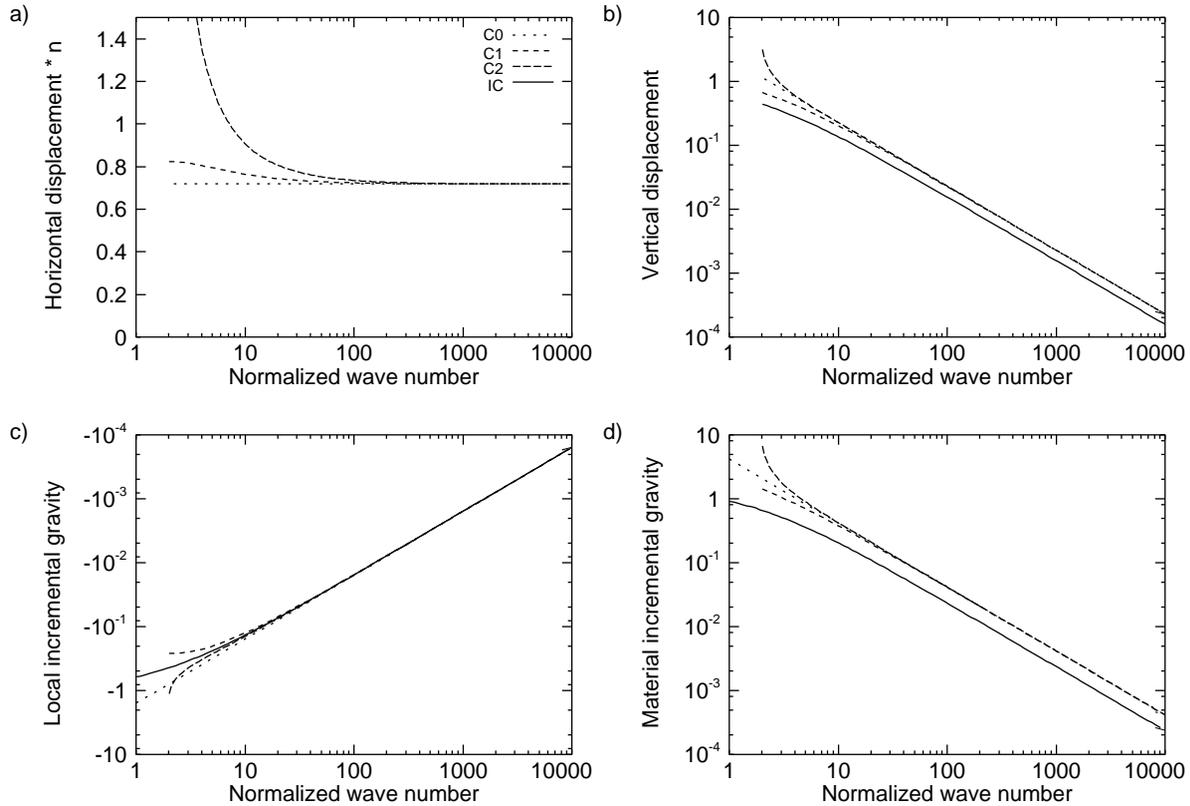


Abbildung 4.1: Verschiebungen und Schwereinkremente an der Oberfläche für einen elastischen, homogenen Halbraum in betrachteten Näherungen als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$  (nach der Strichlänge geordnet: Näherung C0 – C1 – C2 – IC). a) zeigt die Horizontalverschiebung  $U^E n$ , Näherung IC ist hier Null, b) die Vertikalverschiebung  $W^E$  in logarithmischer Darstellung, c) das lokale Schwereinkrement  $G^{(\Delta)E}$  und d) das materielle Schwereinkrement  $G^{(\delta)E}$ , beide in logarithmischer Darstellung (beachte das negative Vorzeichen in c). In c) und d) ist die Schwerewirkung der Last abgezogen. Die Verschiebungen sind auf  $\Sigma^R/\rho^{(0)}$  normiert, die Schwerestörungen sind auf  $2\pi\gamma\Sigma^R$  normiert.

der Einfluss der hydrostatischen Vorspannung. Die Proportionalität zu  $1 - 2\nu$  ist für alle Näherungen ausschlaggebend, siehe (B.73), (B.99) und (B.127), und die zusätzlichen Terme in (B.85) und (B.122) sind nur für kleine Wellenzahlen von Bedeutung. Näherung C1 unterscheidet sich für kleine Wellenzahlen von Näherung C0 durch eine geringfügig größere Verschiebung. Für  $n \rightarrow 3$  divergiert Näherung C2.

### Vertikalverschiebung

In Abb. 4.1b ist die auf das hydrostatische Gleichgewicht normierte Vertikalverschiebung an der Oberfläche logarithmisch dargestellt. Die Verschiebungen der kompressiblen Modelle sind um den Faktor  $2(1 - \nu)$  erhöht, siehe (B.74) und (B.100). Für große  $n$  verschwindet wiederum der Einfluss der hydrostatischen Vorspannung. Für kleine Wellenzahlen ist die Vertikalverschiebung für Näherung C1 gegenüber der für Näherung C0 verringert, da die hydrostatische Vorspannung als zusätzliche Rückstellkraft wirkt. Dagegen dominiert für kleine Wellenzahlen in Näherung C2 der interne Auftrieb gegenüber der hydrostatischen Vorspannung, was zu einer Erhöhung der Vertikalverschiebung führt. Für  $n \lesssim 3$  übertrifft die Verschiebung das Schwimmgleichgewicht, was

auf eine Singularität hinweist, die sich aus der Bedingung ergibt, dass in (3.77) nur für  $\epsilon \leq 1$  der elastische Zustand stabil ist. Für  $\epsilon > 1$  sind die Eigenwerte  $m_{2,4}$  imaginär, so dass die Störung mit der Tiefe durch eine harmonische Funktion beschrieben wird und nicht mehr die Bedingung der Regularität für  $z \rightarrow \infty$  erfüllt. Dieses Verhalten wurde bereits von Love (1911, S. 111ff.) für eine homogene Kugel diskutiert. Für die gewählten Parameter (Tab. 4.1 auf S. 50) liegt die Wellenzahl der Stabilitätsgrenze gemäß (3.79) bei  $n^g = 1.7$ .

### 4.1.2 Schwere

#### Lokales Schwereinkrement

Das lokale Schwereinkrement  $g^{(\Delta)}$ , das die Freiluft-Schwereanomalie annähert, geht unmittelbar aus den Feldgleichungen hervor. Für Näherung IC setzt es sich aus der direkten Anziehungskraft der Flächenlast und dem Massendefizit durch die Vertikalverschiebung zusammen. Für die kompressiblen Näherungen muss gemäß (B.52) desweiteren der Quellterm  $\bar{D}$  berücksichtigt werden, der durch das Dichteinkrement verursacht wird. Für Näherung C0 kompensiert er den Beitrag des Massendefizites, der durch die zusätzliche Vertikalverschiebung  $W^{C0} - W^{IC} \propto 1 - 2\nu$  hervorgerufen wird. Somit weicht das lokale Schwereinkrement (B.75) nicht von dem von Näherung IC ab. Dieses Verhalten zeigen für große  $n$  auch Näherungen C1 und C2 (Abb. 4.1c auf der vorherigen Seite), so dass für alle Näherungen

$$G^{(\Delta)E} \simeq 2\pi\gamma\Sigma^R \left( 1 - \rho^{(0)} W^{IC} \right) \quad (4.2)$$

gilt, wobei  $W^{IC}$  die Vertikalverschiebung von Näherung IC bezeichnet.

#### Materielles Schwereinkrement

Mit (2.25) tritt für das materielle Schwereinkrement  $g^{(\delta)}$  das advektive Inkrement  $g^{(ad)} = \partial_z g^{(0)} w$  hinzu, das die Schwereänderung durch die Bewegung der Massenpunkte berücksichtigt:

$$\begin{aligned} G^{(\delta)E} &\simeq 2\pi\gamma\Sigma^R \left( 1 - \rho^{(0)} W^{IC} \right) + \partial_z g^{(0)} W^E \\ &= 2\pi\gamma\Sigma^R \left[ 1 + \rho^{(0)} \left( \alpha W^E - W^{IC} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei  $\alpha := \partial_z g^{(0)} / (2\pi\gamma\rho^{(0)}) = 4\bar{\rho} / (3\rho^{(0)}) \simeq 2.2$  für  $\rho^{(0)} = 3380 \text{ kg m}^{-3}$  und  $\bar{\rho} = 5517 \text{ kg m}^{-3}$  als mittlere Dichte der Erde gilt,<sup>1</sup> und somit das materielle Dichteinkrement durch die Bewegung im Schwerefeld dominiert wird. Mit  $W^E \propto 2(1-\nu)$  können wir den Einfluss der Kompressibilität in (4.3) über

$$G^{(\delta)E} \simeq 2\pi\gamma\Sigma^R \left\{ 1 + \rho^{(0)} W^{IC} \left[ \alpha 2(1-\nu) - 1 \right] \right\} \quad (4.4)$$

abschätzen. Der Einfluss der Kompressibilität zeigt sich in den vergleichbaren Verläufen der Vertikalverschiebung und des materiellen Schwereinkrements (Abb. 4.1b, d auf der vorherigen Seite).

### 4.1.3 Energiebilanz

Die Beiträge der verschiedenen Terme in der Bewegungsgleichung zur Deformation lassen sich am Einfachsten an Hand der Potentiale untersuchen, die die von den Flächen- und Volumenkräften

---

<sup>1</sup>  $\partial_z g^{(0)} = \frac{8}{3}\gamma\pi\bar{\rho} \simeq 3.08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$

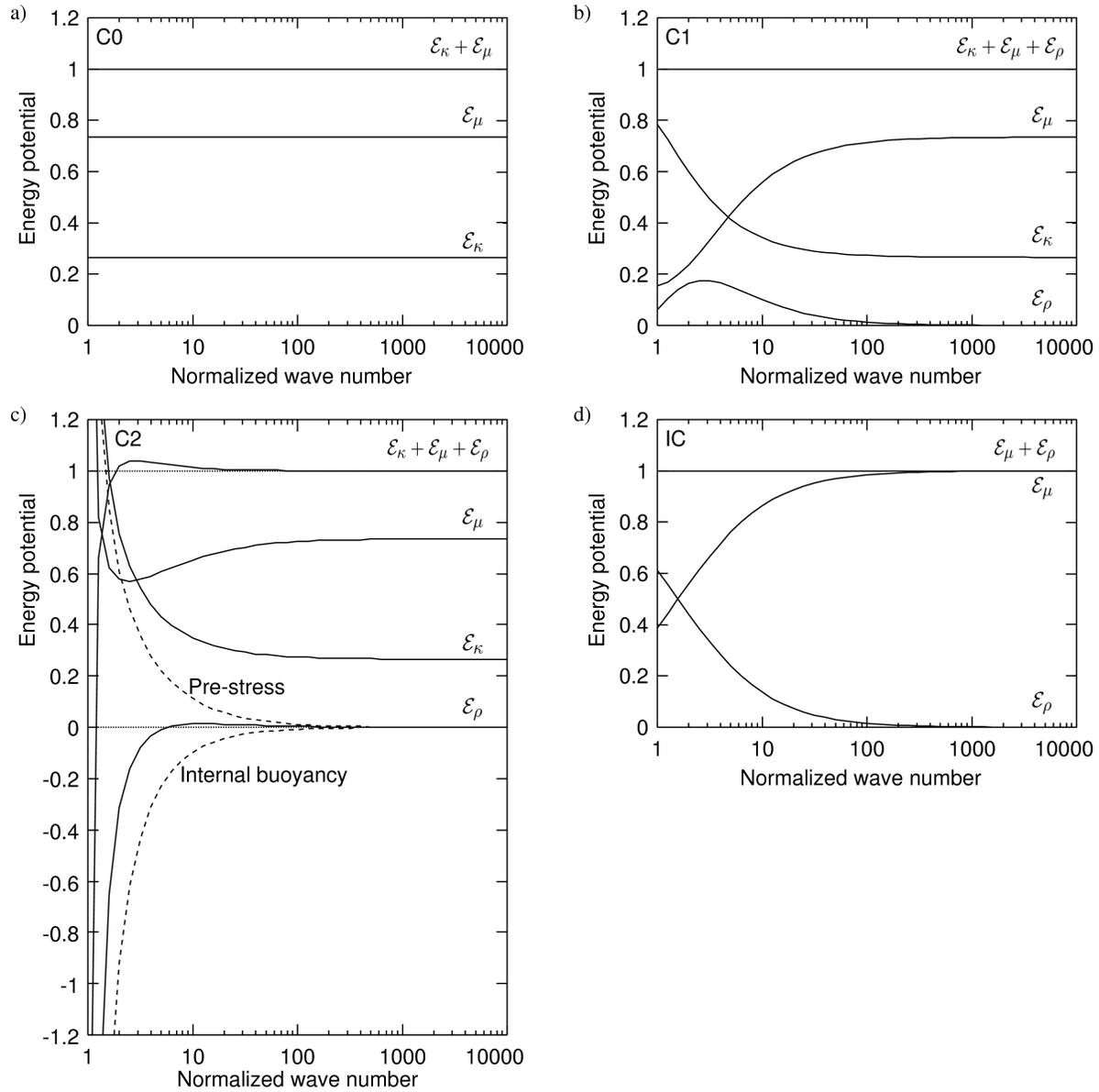


Abbildung 4.2: Potentiale zur elastischen Deformation für Erdmodell U in betrachteten Näherungen als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ . Dargestellt sind die auf  $\mathcal{E}_C$  normierten Beiträge  $\mathcal{E}_\kappa$ ,  $\mathcal{E}_\mu$ ,  $\mathcal{E}_\rho$  und deren Summe  $\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\rho$  in a) für Näherung C0, in b) für Näherung C1, in c) für Näherung C2 und in d) für Näherung IC. In c) ist der Energiebereich auf  $-1.2$  bis  $1.2$  erweitert, und die Beiträge der hydrostatischen Vorspannung (pre-stress) und des internen Auftriebes (internal buoyancy) zu  $\mathcal{E}_\rho$  sind gestrichelt.

verrichtete Arbeit beschreiben (Abschn. A.3.4, S. 102). Es können vier Potentiale auftreten: das Kompressionspotential  $\mathcal{E}_\kappa$ , das Scherpotential  $\mathcal{E}_\mu$ , das Auftriebspotential  $\mathcal{E}_\rho$  und das Anregungspotential  $\mathcal{E}_C$ , das die Arbeit beschreibt, die aufgebracht werden muss, um das Kontinuum zu deformieren. Die Energieerhaltung fordert gemäß (A.39)  $\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\rho = \mathcal{E}_C$ . In Abb. 4.2 auf der vorherigen Seite sind die auf  $\mathcal{E}_C$  normierten Potentiale für Erdmodell U in den Näherungen C0, C1, C2 und IC dargestellt.

Für Näherung C0 (Abb. 4.2a) sind das Kompressions- und das Scherpotential konstant. Sie sind gleich dem Anregungspotential, und es gilt  $\mathcal{E}_\kappa/\mathcal{E}_\mu = (1 - \nu - 2\nu^2)/(1 - \nu + \nu^2)/2$ . Damit ist unabhängig von der Wahl der elastischen Parameter  $\mathcal{E}_\mu \geq 2\mathcal{E}_\kappa$ .<sup>1</sup>

Für Näherung C1 (Abb. 4.2b) nimmt  $\mathcal{E}_\mu$  mit sinkendem  $n$  zu Gunsten von  $\mathcal{E}_\kappa$  und  $\mathcal{E}_\rho$  ab.  $\mathcal{E}_\rho$  erreicht bei  $n \simeq 3$  seinen Maximalwert von  $\simeq 0.2$  und sinkt dann wieder. Alle drei Potentiale summieren sich zum Anregungspotential.

Näherung C2 (Abb. 4.2c) verhält sich für große Wellenzahlen wie Näherung C1. Der Einfluss von  $\mathcal{E}_\rho$  bleibt jedoch auch für kleine Wellenzahlen zunächst gering, da sich der positive Beitrag der hydrostatischen Vorspannung und der negative Beitrag des internen Auftriebes teilweise aufheben. Für  $n < 4$  dominiert der interne Auftrieb, so dass  $\mathcal{E}_\rho$  negativ wird. Die Summe der Potentiale weicht für Näherung C2 von der Anregungsenergie ab, was dem Prinzip der Energieerhaltung widerspricht. Dabei ist die innere Energie des Halbraumes,  $\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\rho$  für  $n > 4$  geringfügig größer als die für die Deformation aufgewendete Arbeit  $\mathcal{E}_C$ . Dieses Ergebnis stimmt damit überein, dass der Ausgangszustand kein Gleichgewichtszustand ist; für  $n < 2$  ist die innere Energie dagegen kleiner als Null. Für Auflasten in diesem Wellenzahlbereich ist das Kontinuum instabil, und wird vom internen Auftrieb dominiert. Dabei ist die durch die Vertikalverschiebung aufgebrachte Energie (A.55) größer als die zur Deformation benötigte Energie.

Für Näherung IC (Abb. 4.2d auf der vorherigen Seite) sind Scher- und Auftriebspotential gleich dem Anregungspotential, und es gilt  $\mathcal{E}_\rho/\mathcal{E}_\mu = \rho^{(0)} g^{(0)}/(2k\mu)$ .

#### 4.1.4 Deformationsverhalten

Um die Tiefenabhängigkeit des Deformationsfeldes zu diskutieren, verwenden wir statt des Deformationsfeldes die Potentialdichten für eine spektrale Anregung (Abb. 4.9 auf S. 65). Die entsprechend Abschn. A.3.4, S. 102 berechneten Potentialdichten für den elastischen Halbraum sind jeweils in der Spalte unter E dargestellt, die über jeder Kurve angegebene Maximalamplitude ist auf  $\mathcal{E}_C$  normiert. Man erkennt, dass die Potentialdichte der Kompression  $E_\kappa$  ihren Maximalwert an der Oberfläche hat und mit der Tiefe exponentiell abnimmt. Die Potentialdichte der Scherung  $E_\mu$  ist dagegen an der Oberfläche klein, für Näherung IC sogar Null. Für  $n = 20$  hat sie ihren Maximalwert bei  $z \simeq 300$  km und für  $n = 200$  bei  $z \simeq 30$  km. Die Potentialdichte der Schwere  $E_\rho$  weist entsprechend Abb. 4.9 auf S. 65 für die gezeigten Wellenzahlen nur geringe Werte auf, wobei das Maximum etwa in der Tiefe des Maximums von  $E_\mu$  liegt. Für Näherung C2 ist  $E_\rho$  nahe der Oberfläche negativ, da hier der Beitrag des internen Auftriebes überwiegt.

## 4.2 Störungen eines viskoelastischen Halbraumes

Der Einfluss der Kompressibilität bei einem homogenen viskoelastischen Halbraum wird nun anhand der Näherungen C1 und C2 untersucht. Näherung C0 kann von vorne herein ausgeklammert werden, da kein Auftriebsterm vorhanden ist, der bei einer Auflast zu einem Gleichgewichtszustand führen kann. Die inkompressible Näherung IC ist bereits ausgiebig in der Literatur

<sup>1</sup>Es gilt  $0 < \nu \leq 1/2$ .

diskutiert worden (z. B. [Wolf, 1985b](#)). In [Abschn. C.2, S. 129](#) wird anhand von Näherung IC die Bedeutung der Relaxationsmoden erläutert. Das Relaxationszeitenspektrum, die Beiträge der Moden sowie der elastische und inviskose Beitrag werden für die Horizontalverschiebung, die Vertikalverschiebung und das lokale Schwereinkrement an der Oberfläche berechnet ([Anhänge B.1.4](#) und [B.2.4](#)).

### 4.2.1 Spektrale Darstellung der Lösung

Eng verbunden mit der Rücktransformation in den Zeitbereich ist die Darstellung der Lösung im Laplace-Bereich in Form eines Spektrums ([Abschn. 3.5.1, S. 44](#)). Dabei repräsentieren isolierte Pole, die sich aus den Nullstellen von [\(B.29\)](#) ergeben, Eigenlösungen des Problems [\(C.3\)](#). Ihre Gesamtzahl definiert das diskrete Spektrum des Problems. Daneben ist in [Abschn. 3.4, S. 39](#) gezeigt, dass für Näherungen C1 und C2 weitere nichtreguläre Bereiche in Form von Schnittlinien in der  $s$ -Ebene auftreten. Diese müssen ebenfalls berücksichtigt werden und tragen als kontinuierliches Spektrum zur Vollständigkeit der Lösung bei. Sie stellen aber keine Eigenmoden des Problems dar, da die Funktionaldeterminante in diesen Bereichen keine Nullstelle aufweist. Stattdessen sind einige Eigenwerte der Koeffizientenmatrix, die die Propagation der Lösung in die Tiefe beschreiben, in diesen Bereichen imaginär, und verletzen so die Regularitätsbedingung für  $z \rightarrow \infty$ . In Anlehnung an eine ähnliche Problematik bei den Oberflächenwellen (z. B. [Mau-pin, 1996](#)) werden diese Bereiche auch als unechte Eigenmoden<sup>1</sup> bezeichnet. Wir bevorzugen die Bezeichnung *kontinuierliche* Moden, da sie sich im Unterschied zu den *diskreten* Moden aus kontinuierlichen Bereichen in der  $s$ -Ebene ergeben, in denen die Funktion nicht regulär ist. Ihre Beiträge werden numerisch durch ein entsprechendes Wegintegral bestimmt ([Abschn. 3.5.1, S. 44](#)).

#### Relaxationszeiten für Näherung C1

Das Relaxationszeitenspektrum für Näherung C1 berechnet sich aus den Nullstellen von [\(B.84\)](#) und besteht aus den diskreten Moden M und CP. Sie sind zusammen mit der kontinuierlichen Mode D in [Abb. 4.3a auf der folgenden Seite](#) dargestellt. Die Mode CP wird von [Wolf \(1985c\)](#) als Mode T bezeichnet. Die Mode D wird in [Abschn. 4.2.2, S. 58](#) mit den Dilatationsmoden einer kompressiblen viskoelastischen Kugel in Beziehung gesetzt. In [Abb. 4.3a auf der folgenden Seite](#) ist sie eng begrenzt und liegt zwischen den Moden CP und M. Die Bedeutung der Moden lässt sich am Besten aus den Potentialdichten ablesen ([Wu & Peltier, 1982](#); [Tromp & Mitrovica, 1999b](#); [Klemann & Wolf, 1999](#)), die in [Abb. 4.9 auf S. 65](#) als Funktion der Tiefe dargestellt sind ([Abschn. A.3.4, S. 102](#)). Entsprechend ihrem Charakter als Eigenmoden muss das Integral über die Potentialdichten einer Mode verschwinden ([Tromp & Mitrovica, 1999b](#)). Mode M weist Beiträge im Scherpotential  $\mathcal{E}_\mu$  und im Auftriebspotential  $\mathcal{E}_\rho$  auf und beschreibt demnach die Scherrelaxation bezüglich der Auftriebskräfte. Mode CP weist Beiträge im Scherpotential  $\mathcal{E}_\mu$  und im Kompressionspotential  $\mathcal{E}_\kappa$  auf und beschreibt demnach die Scherrelaxation bezüglich der Kompressionskräfte. Damit ist es gerechtfertigt, Mode M als Auftriebsmode und Mode CP als Kompressionsmode zu bezeichnen. Mode D verhält sich ähnlich wie Mode CP, jedoch mit einer größeren Eindringtiefe.

#### Verschiebung und Schwere für Näherung C1

Die Beiträge der Relaxationsmoden von Näherung C1 zur Verschiebung und Schwere sind in [Abb. 4.3b, c und d auf der folgenden Seite](#) dargestellt. Sie sind durch [\(3.103\)](#) definiert, und

---

<sup>1</sup> *engl.* improper eigenmodes

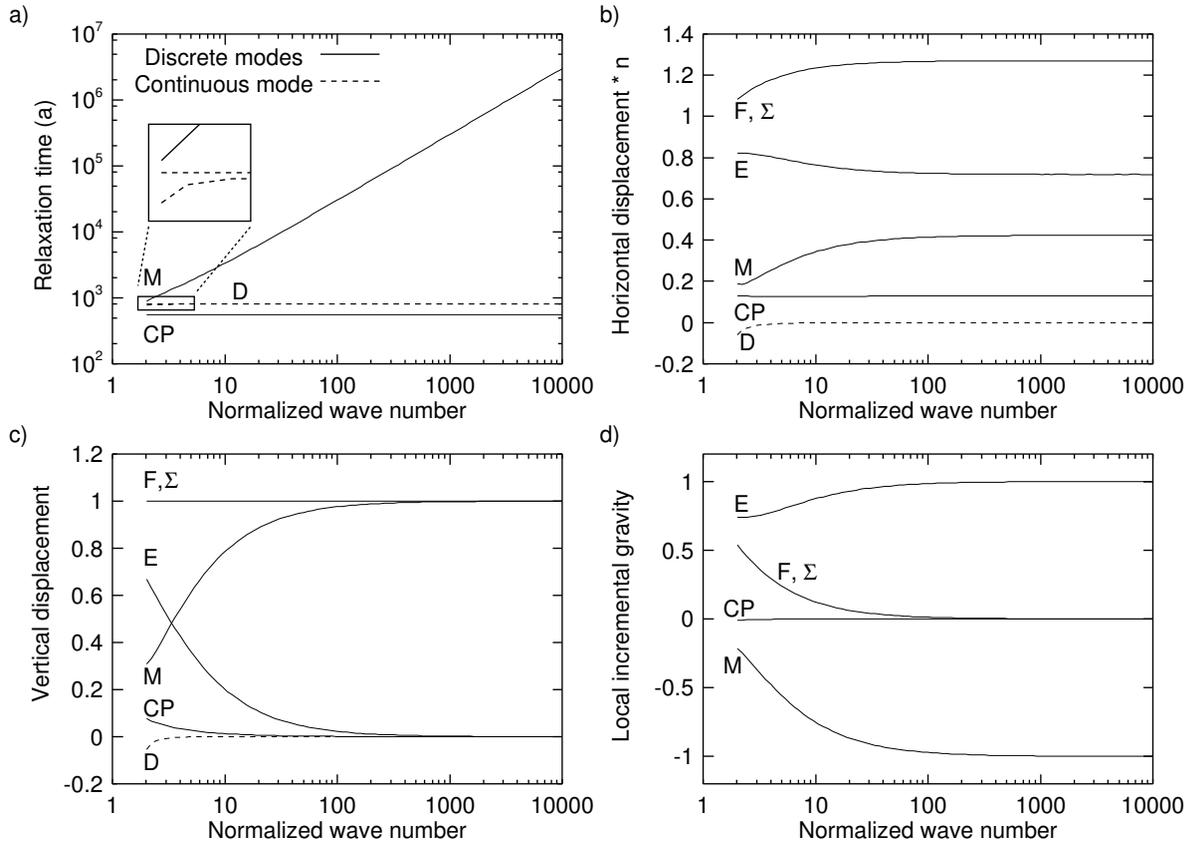


Abbildung 4.3: a) Relaxationszeitspektrum, b) Horizontalverschiebung, c) Vertikalverschiebung und d) lokales Schwereinkrement an der Oberfläche für Erdmodell  $U_{C1}$  als Funktion der Wellenzahl  $n$ . Die Horizontalverschiebungen sind mit  $n$  multipliziert. Durchgezogene Kurven bezeichnen jeweils die Relaxationszeiten der Moden M und CP, deren Beiträge, den elastischen Beitrag E, die Summe der Beiträge  $\Sigma$  und den inviskosen Beitrag F. Gestrichelte Kurven bezeichnen die Verzweigungspunkte der kontinuierlichen Mode D und deren Beiträge. Die Normierungen entsprechen denen in Abb. 4.1 auf S. 51. Der Ausschnitt in a) unterscheidet die beiden Verzweigungspunkte der Mode D. Im Unterschied zu Abb. 4.1c ist in d) die Schwerewirkung der Last berücksichtigt.

ergeben sich entsprechend (B.85)–(B.87). Für alle gezeigten Komponenten dominiert der Beitrag von Mode M sowie der elastische Beitrag E. Der Beitrag von Mode CP ist dagegen klein und verschwindet für große Wellenzahlen. Der Beitrag der kontinuierlichen Mode D ist nur für Wellenzahlen  $n < 10$  signifikant und zeigt für die Horizontal- und Vertikalverschiebung negative Werte. Ein ähnliches Verhalten zeigt auch das lokale Schwereinkrement, für das der Beitrag von Mode M und der elastische Beitrag E mit unterschiedlichem Vorzeichen etwa gleich sind. Von Interesse ist hier auch der inviskose Beitrag F. Er kann entweder gemäß (3.98) direkt aus den Feldgleichungen für  $s \rightarrow 0$  oder gemäß (3.100) und (3.106) aus der Summe  $\Sigma$  aller Beiträge bestimmt werden und dient in der Regel als Kontrolle, ob alle Anteile im Spektrum berücksichtigt sind (Vermeersen *et al.*, 1996b). Für die Horizontal- und Vertikalverschiebung ist dies der Fall, da F und  $\Sigma$  übereinstimmen. Für die Vertikalverschiebung (B.91) stimmt F mit dem zu erwartenden hydrostatischen Gleichgewicht einer inkompressiblen Flüssigkeit überein, das in der Normierung der Verschiebungen in Abb. 4.3c eins ist. Dagegen nimmt der inviskose Beitrag der Horizontalverschiebung (B.90) einen endlichen Wert an. Der inviskose Beitrag der Schwerestörung (B.92)

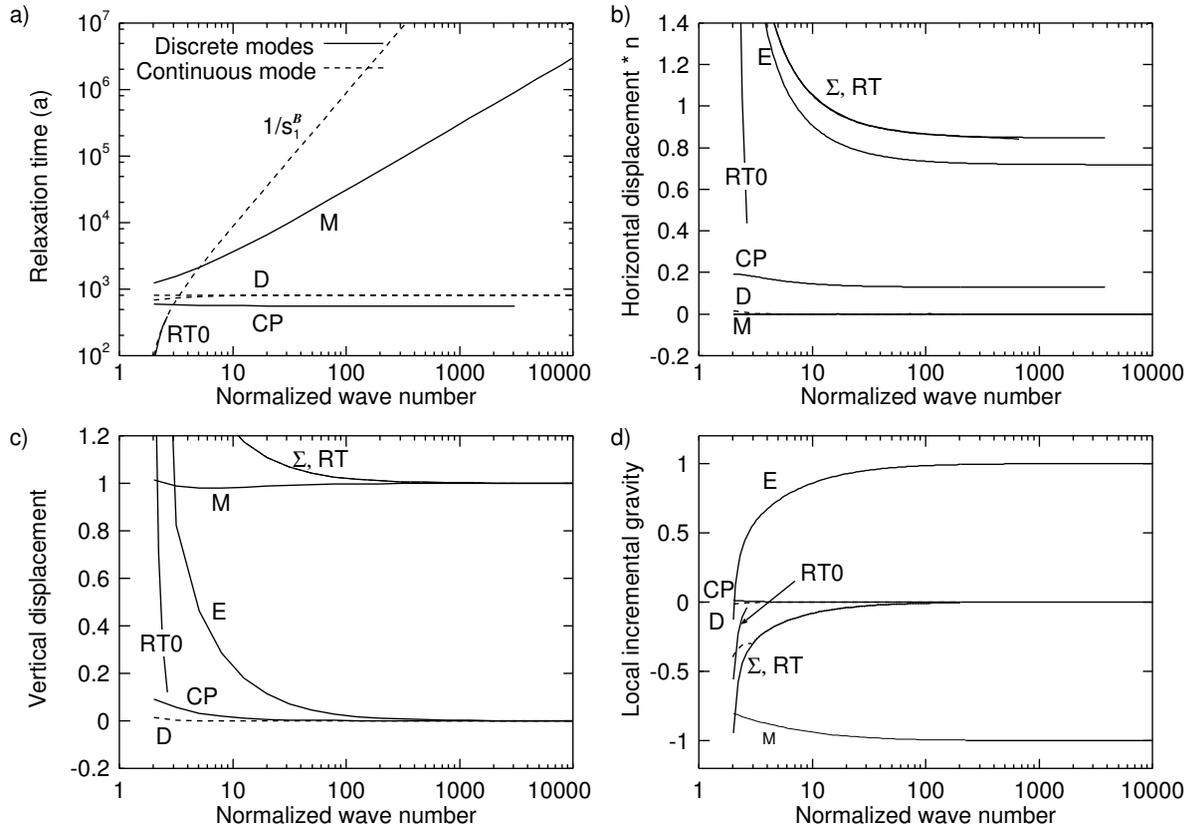


Abbildung 4.4: a) Relaxationszeitspektrum, b) Horizontalverschiebung, c) Vertikalverschiebung und d) lokales Schwereinkrement von Erdmodell  $U_{C2}$  als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ . Die Horizontalverschiebungen sind mit  $n$  multipliziert. Durchgezogene Kurven bezeichnen jeweils die Relaxationszeiten der Moden M und CP, die Wachstumszeit der Mode RT0, deren Beiträge, den elastischen Beitrag E und die Summe der Beiträge  $\Sigma$ . Gestrichelte Kurven bezeichnen die Verzweigungspunkte der kontinuierlichen Moden D und RT und deren Beiträge. Die Normierungen entsprechen denen in [Abb. 4.1 auf S. 51](#). Im Unterschied zu [Abb. 4.1c](#) ist in d) die Schwerewirkung der Last berücksichtigt.

weicht signifikant von Null ab, was bedeutet, dass das Material auch im hydrostatischen Gleichgewicht komprimiert bleibt. Die Feldgleichungen geben somit in dieser Näherung das Verhalten eines viskosen und kompressiblen Fluides nur ungenügend wider, da das Dichteinkrement in [\(3.53\)](#) für  $t \rightarrow \infty$  verschwinden sollte.

### Relaxationszeiten für Näherung C2

Näherung C2 weist auf der negativen Halbachse von  $s$  ebenfalls die Relaxationsmoden M und CP auf ([Abb. 4.4a](#)). Mode M weicht in ihrer Position nur für kleine Wellenzahlen von der für Näherung C1 ab, Mode CP stimmt mit der für Näherung C1 überein. Für  $n < 3$  erscheint darüber hinaus die Wachstumsmode RT0 als einfach isolierte Polstelle für  $s > 0$ . Für wachsendes  $n$  wandert diese Mode in die Schnittlinie  $\mathcal{C}^{>0}$ . In [Abb. 4.5b auf S. 59](#) sind nach Vorzeichen der Laplace-Variablen getrennt die Moden nochmals dargestellt. Dabei sind die Bereiche der kontinuierlichen Moden schattiert dargestellt. Näherung C2 weist somit eine kontinuierliche Relaxationsmode D sowie eine kontinuierliche Wachstumsmode RT auf. Bei  $s_4^B = 0$  ist die Funktion

rechtsseitig nichtregulär. [Abb. 4.5a auf der gegenüberliegenden Seite](#) zeigt den jeweiligen Phasensprung an den Schnittlinien für  $n = 2$ .

### Verschiebung und Schwere für Näherung C2

Aus dem kontinuierlichen Spektrum von Näherung C2 geht hervor, dass gemäß (3.98) ein inviskoser Beitrag nicht existiert, da die spektrale Lösung für  $s = 0$  nicht regulär ist, und gemäß der Existenz von Anteilen auf der positiven reellen Halbachse von  $s$ , dass die Verschiebungen für  $t \rightarrow \infty$  divergieren. Der Beitrag von Mode M zur Horizontalverschiebung verschwindet an der Oberfläche. Für kleine  $n$  sinkt der Beitrag zur Vertikalamplitude zunächst geringfügig, steigt dann jedoch wieder an und divergiert im Bereich der elastischen Instabilität. Der Beitrag von Mode CP verhält sich ähnlich wie der für Näherung C1. Die kontinuierliche Mode D weist im Unterschied zu der für Näherung C1 einen geringeren Beitrag und ein positives Vorzeichen auf. Die kontinuierliche Mode RT beinhaltet den Nullpunkt ( $s_4^B = 0$ ), so dass gemäß (3.97) und (3.107) die Summe der Beiträge von E, M, CP und D gleich dem Beitrag der Wachstumsmode RT sein muss. Der Beitrag der für  $n < 3$  auftretenden diskreten Mode RT0 zu den Verschiebungen ist signifikant. Aus dem Verlauf der Wachstumsmoden in [Abb. 4.5b auf der gegenüberliegenden Seite](#) ist ersichtlich, dass sich der durch die positive Schnittlinie bedingte Beginn der Instabilität mit sinkender Wellenzahl zu kürzeren Zeiten verschiebt. Zusätzlich zeigt sich, dass für  $n < 10$  der Halbraum instabil wird, bevor die Relaxation durch die Mode M abgeschlossen ist. Erklären kann man dies damit, dass für kleine Wellenzahlen schon eine geringfügige Relaxation der Scherspannungen ausreicht, den Halbraum zu destabilisieren.

### 4.2.2 Kontinuierliches Spektrum

Die kontinuierlichen Spektren von Näherung C1 und Näherung C2 sind eng mit den zusätzlichen Moden verknüpft, die für eine homogene kompressible Kugel auftreten. [Han & Wahr \(1995\)](#) zeigten, dass für eine selbstgravitierende, kompressible, viskoelastische und homogene Kugel eine unendliche Anzahl von Relaxationsmoden existiert, die sich aus dem funktionalen Verhalten der in den Eigenwerten erscheinenden sphärischen Bessel-Funktionen ergibt. [Vermeersen \*et al.\* \(1996b\)](#) gaben eine analytische Darstellung dieser Moden an, die von [Hanyk \*et al.\* \(1999\)](#) korrigiert wurde. Die so beschriebenen ‘D-Moden’ liegen in einem engen Bereich auf der negativen Halbachse von  $s$  mit dem Häufungspunkt  $s = -\kappa/(\kappa + 4/3 \mu_0)/\tau$  und können mit  $\mathcal{C}_{1,2}$  von Näherung C1 bzw.  $\mathcal{C}^{<0}$  von Näherung C2 in Beziehung gesetzt werden. Auf der positiven Halbachse treten die RT-Moden auf, die bereits von [Plag & Jüttner \(1995\)](#) beschrieben wurden und mit der Schnittlinie  $\mathcal{C}^{>0}$  von Näherung C2 in Beziehung stehen. Eine Zusammenfassung über die D- und RT-Moden der Kugel findet sich in [Vermeersen & Mitrovica \(2000\)](#). Um in der nachfolgenden Diskussion die Moden der Halbraumnäherung mit denen von [Vermeersen \*et al.\* \(1996b\)](#) und [Hanyk \*et al.\* \(1999\)](#) für die viskoelastische Kugel zu vergleichen, verwenden wir Erdmodell U’. Die Parametrisierung entspricht der für eine homogene Erdkugel in [Hanyk \*et al.\* \(1999\)](#).

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\kappa$ (GPa)	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Mantel	5517	449.8	145.2	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 4.2: Parameterwerte für Erdmodell U’.

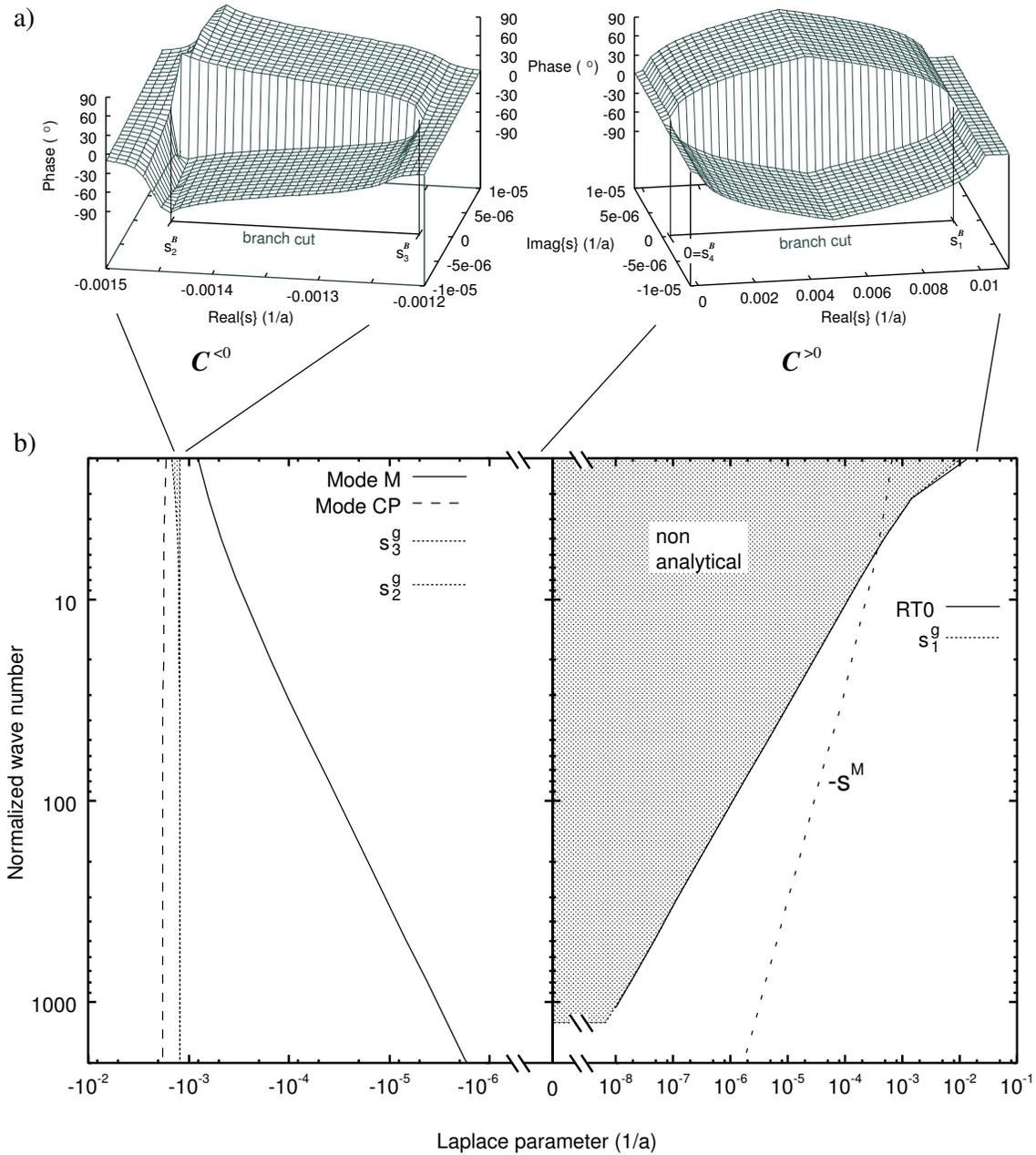


Abbildung 4.5: Regularität der Lösungen für Erdmodell  $U_{C2}$ . a) Phase der Schnittlinien  $C^{<0}$  und  $C^{>0}$  von  $\bar{W}(s)$  in der Umgebung der reellen  $s$ -Achse für  $n = 2$ . b) Verlauf der einfachen Pole (Relaxationsmoden, bzw. Wachstumsmode), Moden M und RT0 (durchgezogen) sowie Mode CP (gestrichelt) als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ . Der Bereich der Schnittlinien ist schattiert dargestellt. Zur Verdeutlichung ist der Verlauf von Mode M für  $s > 0$  gestrichelt eingetragen.

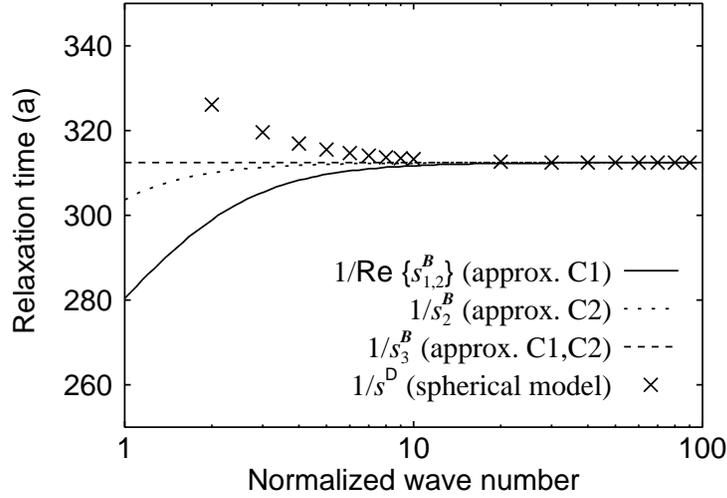


Abbildung 4.6: Relaxationszeiten von Mode D für eine homogene, kompressible, viskoelastische und selbstgravitierende Kugel nach Hanyk *et al.* (1999) und jeweils für Erdmodell U' die Verzweigungspunkte für Näherungen C1 und C2, sofern  $s < 0$  gilt.

### D-Moden

Die von Hanyk *et al.* (1999) angegebene analytische Darstellung der inversen Relaxationszeiten für die D-Moden lautet

$$s_n^D = -\frac{1}{\tau} \frac{\Gamma_n^m \kappa - 1}{\Gamma_n^m (\kappa + \frac{4}{3} \mu_0) - 1}, \quad \Gamma_n^m := \frac{[(2m + n - 1) \frac{\pi}{2}]^2}{4 \rho^{(0)} g^{(0)} R_\oplus} \quad (4.5)$$

und gilt, sofern Legendre-Grad  $n$  und Ordnung  $m$  nicht zu klein sind. Hierbei bezeichnet  $m = 1, \dots, \infty$  Oberwellen und  $R_\oplus$  den Erdradius. Für Näherung C1 kann der Realteil von  $s_{1,2}^B$  gemäß (3.73) in der Form

$$\text{Re } s_{1,2}^B = -\frac{1}{\tau} \frac{\Gamma_n^{C1} \kappa + 1}{\Gamma_n^{C1} (\kappa + \frac{4}{3} \mu_0) + 1}, \quad \Gamma_n^{C1} := \left( \frac{2n}{\rho^{(0)} g^{(0)} R_\oplus} \right)^2 (\kappa + \frac{4}{3} \mu_0) \quad (4.6)$$

geschrieben werden und bezeichnet die untere Schranke der Schnittlinie für Näherung C1. Für Näherung C2 ergibt sich aus (3.80), sofern wir die Wurzel nach  $\epsilon$  entwickeln, ebenfalls als untere Schranke der Schnittlinie,

$$s_2^B = -\frac{1}{\tau} \frac{\Gamma_n^{C2} \kappa}{\Gamma_n^{C2} (\kappa + \frac{4}{3} \mu_0) - 1}, \quad \Gamma_n^{C2} = \left( \frac{3 \kappa n}{4 \rho^{(0)} g^{(0)} R_\oplus} \right)^2 \frac{1}{\mu_0}. \quad (4.7)$$

Für beide Näherungen lautet gemäß (3.73) und (3.81) die obere Schranke  $s_3^B = -\kappa / (\kappa + \frac{4}{3} \mu) / \tau$ . Demgegenüber lautet gemäß (4.5) für  $m \rightarrow \infty$  bei sphärischer Geometrie die obere Schranke  $s_3^B$ . Der Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  stimmt für die Darstellungen (4.5)–(4.7) mit  $s_3^B$  überein (Abb. 4.6). Die qualitative Übereinstimmung motiviert, die kontinuierlichen Spektren als kontinuierliche Mode D zu bezeichnen. Hanyk *et al.* (1999) geben für  $n = 2$  auch eine Dilatationsmode D0 an. Das Verhalten dieser Mode für andere  $n$  wird von ihnen nicht diskutiert, eine Übereinstimmung mit Mode CP ist aber naheliegend (Abb. 4.3a auf S. 56). Abb. 4.9 auf S. 65 zeigt die qualitative Übereinstimmung der Potentialdichten für Mode D in den beiden Näherungen.

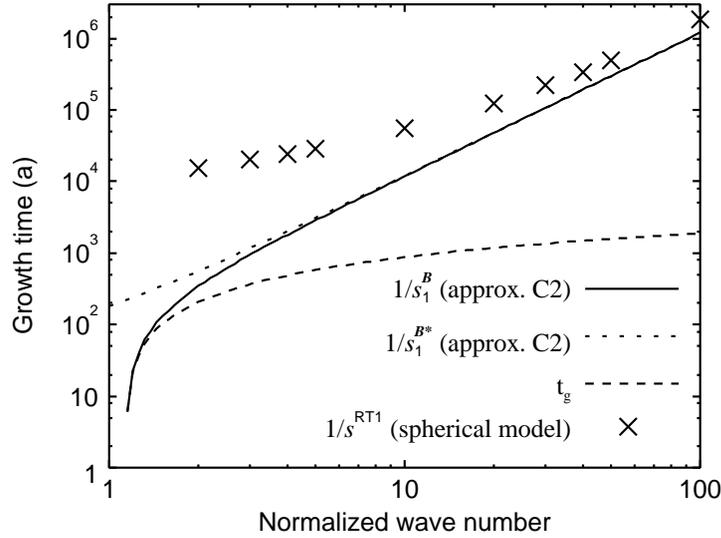


Abbildung 4.7: Wachstumszeiten von Mode RT1 für eine homogene, kompressible, viskoelastische, selbstgravitierende Kugel nach Hanyk *et al.* (1999) und jeweils für Erdmodell U' die Verzweigungspunkte  $1/s_1^B$  für Näherung C2,  $1/s_1^{B*}$ , für die der Einfluss des Schermodul gemäß (4.8) vernachlässigt ist, und die Zeit  $t_{\text{crit}}$ , die vergeht, bis der Relaxationsmodul die Stabilitätsgrenze erreicht.

### RT-Moden

Plag & Jüttner (1995) zeigten als erste, dass bei der Störung einer viskoelastischen gravitierenden Kugel Rayleigh–Taylor-Instabilitäten auftreten können. Für ein kompressibles Kontinuum ist dies der Fall, wenn die Dichtezunahme mit der Tiefe geringer ist als die für eine hydrostatisch vorgespannte kompressible Kugel. Da die Rayleigh–Taylor-Instabilität durch den internen Auftriebsterm verursacht wird, tritt sie nur für Näherung C2 auf und wird hier durch die Schnittlinie auf der positiven Halbachse von  $s$  repräsentiert (Abb. 4.5b auf S. 59). Ein Vergleich der kontinuierlichen Mode mit den RT-Moden für eine sphärische Geometrie ergibt jedoch eine systematische Diskrepanz zwischen der oberen Schranke von  $C^{>0}$ ,  $s_1^B$ , und der Mode RT1 (Abb. 4.7). Im Unterschied zur klassischen Rayleigh–Taylor-Instabilität, die für eine viskose Flüssigkeit definiert ist (Sharp, 1984), hängt  $s_1^B$  vom Schermodul ab. Schreibt man (3.80) abweichend

$$s_1^B = \frac{2\kappa}{\eta} \left\{ \left( \frac{\kappa n}{\rho^{(0)} g^{(0)} R_{\oplus}} \right)^2 \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\rho^{(0)} g^{(0)} R_{\oplus}}{\kappa n} \right)^2} \right] - \frac{2\kappa}{\mu_0} \right\}^{-1}, \quad (4.8)$$

zeigt sich aber, dass  $\mu_0$  nur für  $n < 5$  den Wert von  $s_1^B$  beeinflusst. Hanyk *et al.* (1999) zeigten, dass sich oberhalb der Wachstumszeiten von Mode RT1 eine unendliche Anzahl von Oberwellen anschließt, deren Kehrwerte  $s_n^{\text{RT}m}$  für  $m \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren. Diesem Verhalten für eine homogene Kugel entspricht wiederum das kontinuierliche Spektrum  $C^{>0}$ , das durch  $s_4^B = 0$  beschränkt ist.

### Stabilitätsgrenze

Eine weitere Besonderheit eines homogenen gravitierenden Kontinuums ist, dass in Abhängigkeit von der Wellenzahl für bestimmte elastische Moduln auch der elastische Zustand instabil sein kann. Diese gravitative Instabilität findet sich für Näherung C2 in der Bedingung  $n < n^g$ , so

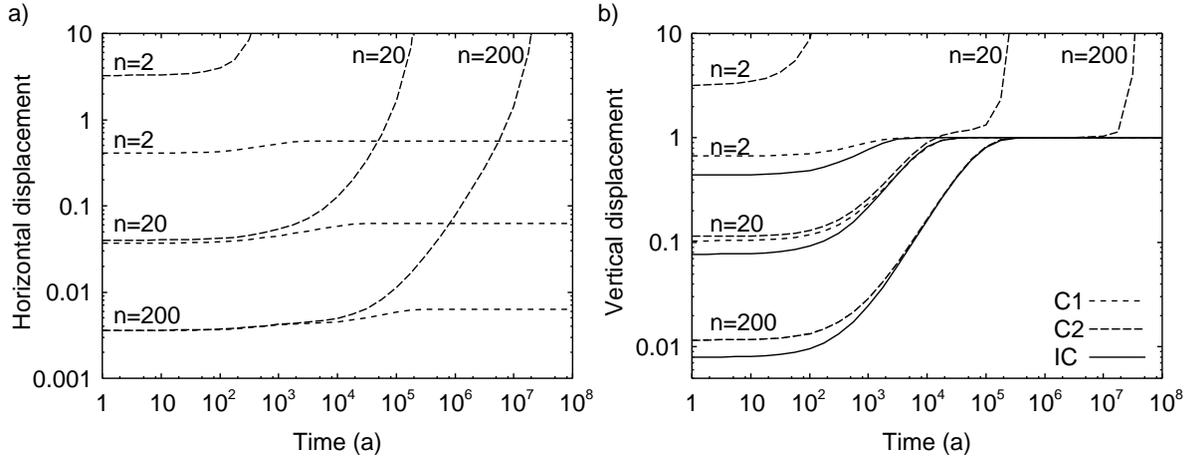


Abbildung 4.8: Zeitliche Entwicklung der Horizontalverschiebung a) und der Vertikalverschiebung b) an der Oberfläche nach Heaviside'scher Belastung zum Zeitpunkt  $t = 0$  für Erdmodell U in den Näherungen C1, C2 und IC und für die Wellenzahlen  $n = 2, 20$  und  $200$ .

dass  $m_i \in \mathbb{I}$  imaginär ist (Abschn. 3.4.3, S. 41). Aus (3.77) ergibt sich

$$\mu^g(n) = \frac{3}{8} \left[ \sqrt{\kappa^2 + \frac{16}{3} \left( \frac{\rho^{(0)} g^{(0)} R_{\oplus}}{n} \right)^2} - \kappa \right] \quad (4.9)$$

als der Schermodul, unterhalb dem der elastische Halbraum instabil wird. Wir vergleichen nun  $s_1^B$  mit  $\mu^g$ , indem wir gemäß (3.57) die Zeit  $t^g$  berechnen, nach der die Scherrelaxationsfunktion  $m_2(t)$  auf  $\mu^g$  relaxiert ist. In Abb. 4.7 auf der vorherigen Seite ist  $t^g$  zusammen mit  $1/s_1^B$  und  $1/s_1^{B'}$  dargestellt. Für  $1/s_1^{B'}$  ist der Term  $2\kappa/\mu_0$  in (4.8) vernachlässigt. Es zeigt sich, dass die Scherrelaxation im Bereich der Stabilitätsgrenze den Verlauf von  $s_1^B$  bestimmt, für große Wellenzahlen jedoch die Rayleigh–Taylor-Instabilität den Verlauf dominiert.

### 4.2.3 Zeitliche Entwicklung nach Heaviside'scher Belastung

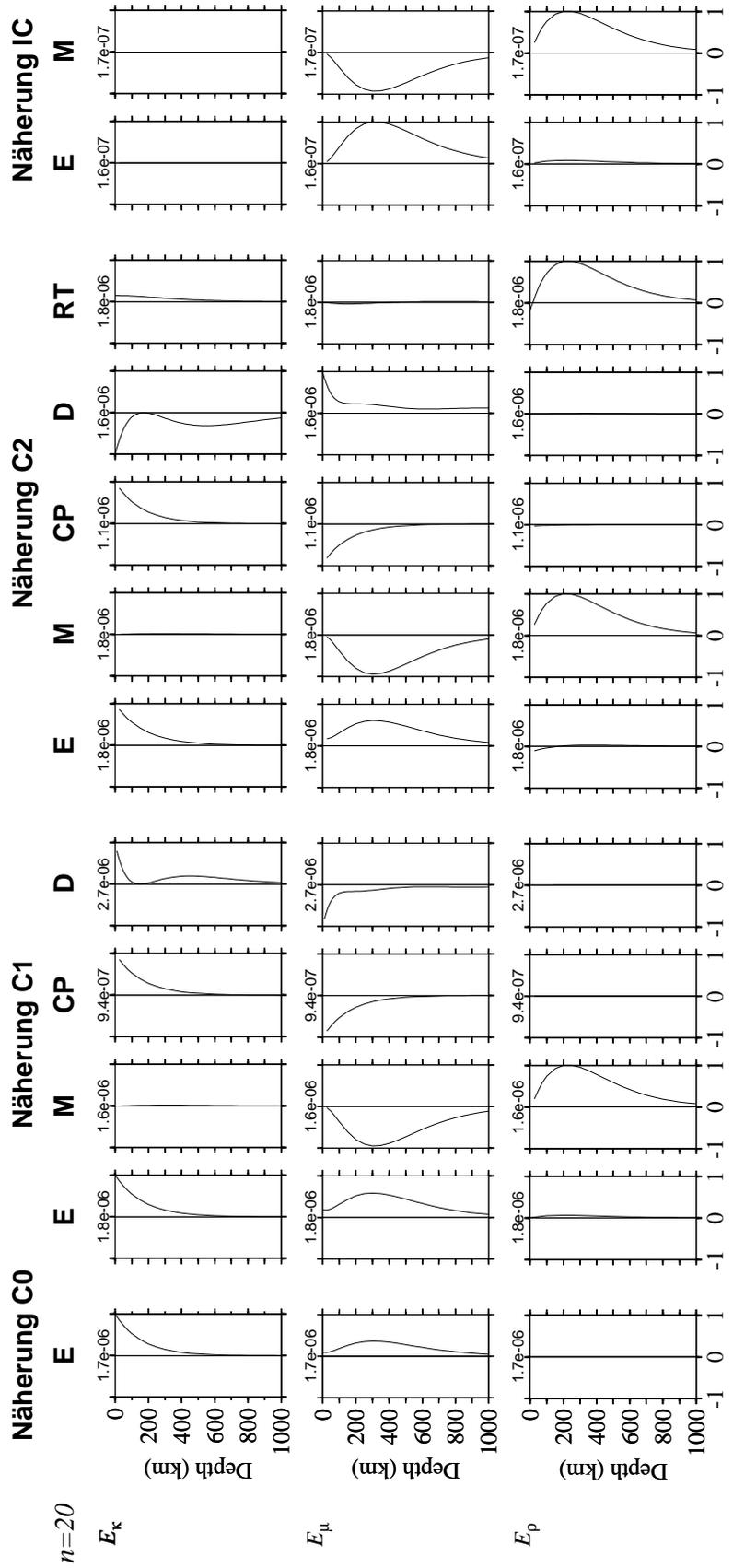
Abbildung 4.8 zeigt die zeitliche Entwicklung der Oberflächenverschiebungen für Näherungen C1, C2 und IC nach einer zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnenden Heaviside'schen Belastung. Die Vertikalverschiebungen (rechts) relaxieren auf Grund der dominierenden Mode M auf ähnlichen Zeitskalen. Dabei stimmen die relaxierten Verschiebungen von Näherungen C1 und IC mit dem hydrostatischen Gleichgewicht überein, wohingegen die Verschiebung von Näherung C2 etwas größer als 1 ist. Weiterhin zeigen die Kurven für Näherung C2, dass für  $n \lesssim 2$  bereits der elastische Beitrag singular wird, für  $2 \lesssim n \lesssim 20$  die Spannungsrelaxation die Instabilität hervorruft und für  $n \gtrsim 20$  ein quasistatischer Zustand auftritt. Die Dauer des Zustandes hängt in der Weise von der Wellenzahl ab, dass für kleine Lasten und kurze Belastungsperioden die latente Instabilität nicht in Erscheinung tritt. Dieses Ergebnis weicht von Purcell (1997, 1998) ab, der für Näherung C2 keine Instabilitäten fand.

Die Unterschiede für die Horizontalverschiebung (Abb. 4.8a) sind signifikanter. Die Verschiebungen von Näherung IC sind Null. Die Verschiebungen von Näherung C1 (Abb. 4.3b auf S. 56) zeigen nur eine geringe Relaxation durch die Moden CP und M. Da der Beitrag von Mode RT für Näherung C2 dominiert (Abb. 4.4b auf S. 57), weicht die Verschiebung bereits bei kleineren Wellenzahlen von der von Näherung C1 ab als für die Vertikalverschiebung. Desweiteren zeigt Näherung C2 keine Relaxation durch die Mode M, da ihr Beitrag Null ist.

### 4.3 Resumé

Die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Für die elastischen Verschiebungen ist der Einfluss der Kompressibilität entscheidend (O’Keefe & Wu, 1998). Die Berücksichtigung der Schwere in den Feldgleichungen hat nur einen untergeordneten Einfluss. Die Poisson’sche Zahl  $\nu$  der kompressiblen Näherungen beeinflusst dabei über den Faktor  $1 - 2\nu$  die Horizontalverschiebungen und über  $2(1 - \nu)$  die Vertikalverschiebungen (z. B. Farrell, 1972).
- Bei der Betrachtung der Schwere tritt in den kompressiblen Näherungen C0, C1 und C2 das durch die Dichteänderung verursachte Potential hinzu. Dieses kompensiert im lokalen Inkrement das durch die zusätzliche Vertikalverschiebung verursachte Massendefizit unterhalb des Beobachtungspunktes. Das materielle Schwereinkrement wird dagegen durch die für einen kompressiblen Halbraum vergrößerte Vertikalverschiebung dominiert, die über das advektive Inkrement beiträgt.
- Der Einfluss der hydrostatischen Vorspannung hängt von der Wellenzahl ab und zeigt sich als zusätzlicher Summand  $\rho^{(0)} g^{(0)}$  im Faktor  $1/(2k\mu_0 + \rho^{(0)} g^{(0)})$ .
- Die Inkonsistenz des homogenen Ausgangszustandes bei Berücksichtigung des internen Auftriebes zeigt sich in der verletzten Energiebilanz sowie in einer Stabilitätsgrenze für kleine Wellenzahlen.
- Für einen homogenen, viskoelastischen Halbraum zeigen die Ergebnisse für Näherung C1, dass sich der Beitrag des kontinuierlichen Spektrums auf kleine Wellenzahlen beschränkt. Die Inkremente relaxieren zu Grenzwerten, die den inviskosen Beitrag beschreiben. Hierbei entspricht die Vertikalverschiebung dem Grenzwert für eine inkompressible Flüssigkeit, die Horizontalverschiebung nimmt einen endlichen Wert an und das lokale Schwereinkrement verschwindet nicht, da das Material komprimiert bleibt.
- Für einen homogenen, viskoelastischen Halbraum zeigen die Ergebnisse für Näherung C2, dass die hydrostatische Vorspannung nicht ausreicht, den viskoelastischen Halbraum nach einer Heaviside’schen Belastung zu stabilisieren. Dabei hängt der Beginn der Instabilität von der Wellenzahl ab. Für große Wellenzahlen bildet sich zunächst durch Relaxation auf der Zeitskala von Mode M ein Zustand aus, der nur geringfügig vom hydrostatischen Gleichgewicht abweicht. Dieser wird dann auf der Zeitskala von  $1/s_1^B$  instabil.
- Die kontinuierlichen Moden der Näherungen C1 und C2 stimmen qualitativ mit den D-Moden und den RT-Moden für eine selbstgravitierende, kompressible, viskoelastische und homogene Kugel überein. Im Unterschied zu Vermeersen *et al.* (1996b) bevorzugen wir für die D0-Mode die Bezeichnung CP.
- Die Ergebnisse zeigen, dass die kompressiblen Näherungen C0, C1 und C2 bei der Modellierung hydrostatischer Ausgleichsbewegungen Schwachpunkte aufweisen, die auf einem inkonsistenten Ausgangszustand basieren. Es wird deshalb empfohlen für kompressible viskoelastische Störungen ein selbstkonsistentes Modell zu verwenden, bei dem der Anfangszustand stabil ist. Damit werden die in diesem Kapitel dargestellten Probleme wie kontinuierliche Spektren, Instabilitäten und unrealistische Verschiebungen vermieden.



Normalized potential density

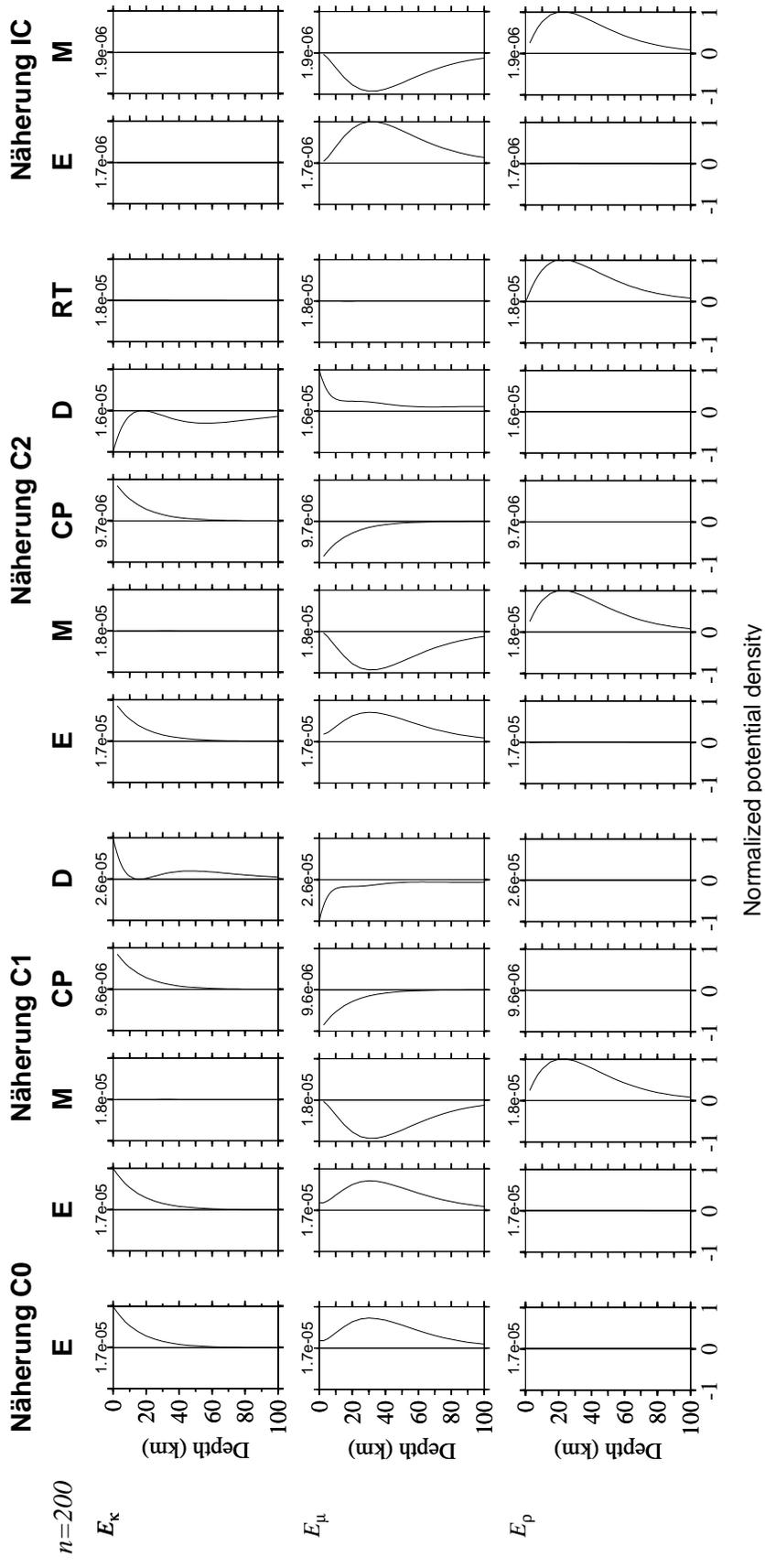


Abbildung 4.9: Potentialdichten von Erdmodell U für  $n = 20$  und 200 in den verschiedenen Näherungen. Von oben nach unten sind die normierten Potentialdichten  $E_\kappa$ ,  $E_\mu$  und  $E_\rho$  als Funktion der Tiefe aufgetragen, von links nach rechts jeweils für die elastische Amplitude und für die in der entsprechenden Näherung auftretenden Moden. Oberhalb jeden Plots ist das Maximum angegeben.



## Kompressible elastische Lithosphäre über Halbraum

Das Modell einer elastischen Lithosphärenplatte über einem viskoelastischen Mantel ist in der Literatur ausgiebig diskutiert worden: Für die Berücksichtigung von Gebirgslasten wird weitgehend die Dünne-Platten-Näherung (TPA)<sup>1</sup> verwendet, bei der eine im physikalischen Sinn dünne Platte auf einem inviskosen Fluid als Mantel schwimmt (Vening Meinesz, 1941; Walcott, 1970). Erweiterungen der TPA untersuchten Comer (1983) sowie Ward (1984), der den Einfluss der Schwere auf das Deformationsverhalten der Platte in den Näherungen C0 und C2 betrachtete. Die TPA ist vor Allem deshalb sinnvoll, da die wichtigsten Observablen Vertikalverschiebung und Schwere weniger von der Struktur der Lithosphäre beeinflusst sind als Horizontalverschiebung und Verzerrung. Während ein viskoses Fluid als Mantelmodell mit der TPA vereinbar ist (Turcotte *et al.*, 1984), bleibt die Näherung für ein viskoelastisches Fluid nur bedingt gültig, da während der Relaxation der Scherspannungen im Mantel, Lithosphäre und Mantel bezüglich dieser gekoppelt sind, was in der TPA nicht berücksichtigt werden kann. In Abschn. 5.1, S. 68 wird die Lösung der TPA skizziert, und die Biegesteifigkeit einer geschichteten Platte abgeschätzt.

Aus den Ergebnissen des vorigen Kapitels geht hervor, dass die Betrachtung eines homogenen, materiell kompressiblen Mantels zu unphysikalischem Verhalten führt. Deshalb wird der Mantel als inkompressibles Kontinuum vorausgesetzt, dem eine kompressible Lithosphäre aufliegt. Erdmodell EL<sup>2</sup> besteht aus einer elastischen Lithosphäre, die entsprechend den in Kap. 3 diskutierten Näherungen modelliert wird, und einem homogenen, inkompressiblen Mantel (Tab. 5.1).

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\kappa$ (GPa)	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Lithosphäre	2900	122.6	64.0	$\infty$	100
Mantel	3380	$\infty$	145.0	$1.0 \times 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 5.1: Parameterwerte für Erdmodell EL.

Die beiden folgenden Abschnitte beschäftigen sich ausgehend von der in Kap. 3 dargestellten Theorie mit dem Einfluss der Kompressibilität auf das Deformationsverhalten der Lithosphäre. Zunächst wird eine homogene Lithosphäre in den Näherungen C0, C1, C2 und IC bei einem inviskosen Mantel betrachtet (Abschn. 5.2, S. 69). Anhand dieses Modelles wird der Einfluss der Schwere und Kompressibilität diskutiert. Danach wird ihr Einfluss auf das Relaxationsverhalten eines viskoelastischen Mantels untersucht (Abschn. 5.3, S. 71). In Abschn. 5.4, S. 74 werden die Ergebnisse dieses Kapitels zusammengefasst. Zunächst beschreiben wir in Abschn. 5.1, S. 68 die

<sup>1</sup> engl. Thin-Plate Approximation

<sup>2</sup> engl. Elastic Lithosphere

Dünne-Platten-Näherung mit deren Hilfe wir die Biegeeigenschaften der Lithosphäre parametrisieren können.

## 5.1 Dünne-Platten-Näherung

In der Dünne-Platten-Näherung (TPA) für die Lithosphäre werden folgende Annahmen gemacht (z. B. Landau & Lifschitz, 1989, S. 48f):

- Die Vertikalverschiebung ist klein gegenüber der Dicke der Platte.
- Die Horizontalspannung der deformierten Platte steigt von der Mittelebene zu den Plattenoberflächen linear von 0 an.
- Die Schwere hat keinen Einfluss auf die Deformation im Innern der Platte.
- Die Deformation erfolgt statisch.
- Das Substrat, also der Mantel wird als inviskos angesehen.

Belasten wir die Platte unter diesen Annahmen, ergeben sich direkt unterhalb der Last eine Kompression der Platte und im unteren Teil eine Dilatation. Eine Abschätzung der Kräfte und Momente führt auf die biharmonische Momentengleichung (z. B. Turcotte & Schubert, 1982, 112 ff.),

$$D_e \Delta \Delta u_z + \rho_m g^{(0)} w = p, \quad (5.1)$$

in der

$$D_e = \frac{\mu_0 h^3}{6(1-\nu)} \quad (5.2)$$

die Biegesteifigkeit der homogenen elastischen Platte ist. Hierbei sind  $\mu_0$  der Schermodul,  $\nu$  die Poisson'sche Zahl,  $h$  die Dicke der Platte,  $\rho_m$  die Dichte des Mantels,  $g^{(0)}$  die Schwere,  $w$  die Vertikalverschiebung und  $p$  der Auflastdruck ist. Somit wirkt neben dem Biegemoment der Platte der Auftrieb  $\rho_m g^{(0)} w$  des Mantels dem Druck  $p$  der Last entgegen. Allgemein lautet die Lösung von (5.1) nach Hankel-Transformation

$$W(k) = \frac{1}{1 + \frac{D_e}{\rho_m g^{(0)}} k^4}, \quad (5.3)$$

wobei  $k$  die Wellenzahl und  $W$  die transformierte und normierte Vertikalverschiebung ist. Zweifaches Ableiten nach  $k$  liefert als Wendepunkt von  $W(k)$

$$k_{1/2} = \sqrt[4]{\frac{\rho_m g^{(0)}}{D_e}} \quad (5.4)$$

und eingesetzt in (5.3) am Wendepunkt  $W(k_{1/2}) = 1/2$ .

Die Biegesteifigkeit einer Platte mit tiefenabhängigen elastischen Modulen lässt sich mittels

$$D_e = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\mu_0(z)}{1-\nu(z)} z^2 dz \quad (5.5)$$

berechnen (z. B. [Lambeck & Nakiboglu, 1980](#)). Für eine inkompressible Lithosphäre, die aus zwei homogenen elastischen Schichten mit unterschiedlichen Schermoduln besteht, ergibt sich für die Biegesteifigkeit

$$\begin{aligned} D_e &= 2 \int_{-h/2}^{-h/2+h_1} \frac{\mu_0^{(1)}}{1-\nu^{(1)}} z^2 dz + 2 \int_{-h/2+h_1}^{h/2} \frac{\mu_0^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} \mu_0^{(1)} h^3 - \left( \mu_0^{(2)} - \mu_0^{(1)} \right) h_1 h^2 + 2 \left( \mu_0^{(2)} - \mu_0^{(1)} \right) h_1^2 h - \frac{4}{3} \left( \mu_0^{(2)} - \mu_0^{(1)} \right) h_1^3. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Der Index (1) bezeichnet dabei Eigenschaften der oberen Schicht, der Index (2) die der unteren Schicht und  $h$  die Gesamtdicke. Besteht die Lithosphäre wie eine Blattfeder aus aufeinanderliegenden entkoppelten Schichten derart, dass nur der Druck übertragen wird, addieren sich die Biegesteifigkeiten  $D_e^{(i)}$  der einzelnen Schichten zur Gesamtbiegesteifigkeit  $D_e$  auf (z. B. [Burov & Diament, 1995](#)):

$$D_e = \sum_i D_e^{(i)}. \quad (5.7)$$

Aus  $D_e$  kann man wiederum über [\(5.2\)](#) eine effektive elastische Dicke

$$h_e := \sqrt[3]{\frac{D_e 6(1-\nu)}{\mu_0}} \quad (5.8)$$

$h_e$  berechnen, die bei der Diskussion von Erdmodellen die Biegesteifigkeit ersetzt.

Die wichtigsten Einschränkungen, die gegenüber den in dieser Arbeit betrachteten Lösungen für eine elastische Schicht über einem viskoelastischen Halbraum gemacht werden müssen, sind folgende:

1. Die Ausdehnung der Last muss groß im Vergleich zur Plattendicke sein.
2. Die Spannungsrelaxation des Halbraumes kann nicht modelliert werden, da während der Relaxation die Spannungsfelder der elastischen Platte und des Halbraumes gekoppelt sind.

## 5.2 Störungen bei inviskosem Halbraum

Zunächst betrachten wir eine elastische, kompressible Lithosphäre bei einem inviskosen, inkompressiblen Mantel. Zu erwarten ist, dass sich die Verschiebungen wie die für die TPA verhalten, und nur geringe Unterschiede für große Wellenzahlen auftreten, für die die TPA nicht gilt ([Abschn. 5.1, S. 68](#)). [Abbildung 5.1 auf der folgenden Seite](#) zeigt die Verschiebungen und Schwerkremente für die verschiedenen Näherungen der elastischen Lithosphäre. Die wichtigsten Unterschiede sind:

### Horizontalverschiebung

Die Horizontalverschiebungen von Näherungen C1 und C2 unterscheiden sich nur geringfügig. Für Näherung C0 ist für  $n < 10$  der Wert negativ und der Maximalwert ist geringer als für Näherungen C1 und C2. Die Werte von Näherung IC sind für  $n \rightarrow 0$  und  $n \rightarrow \infty$  Null, was der inviskosen bzw. der elastischen Verschiebung von Erdmodell U entspricht (siehe [S. 50](#)). Das Maximum ist geringfügig zu kleineren Wellenzahlen hin verschoben und weist einen erheblich kleineren Wert auf.

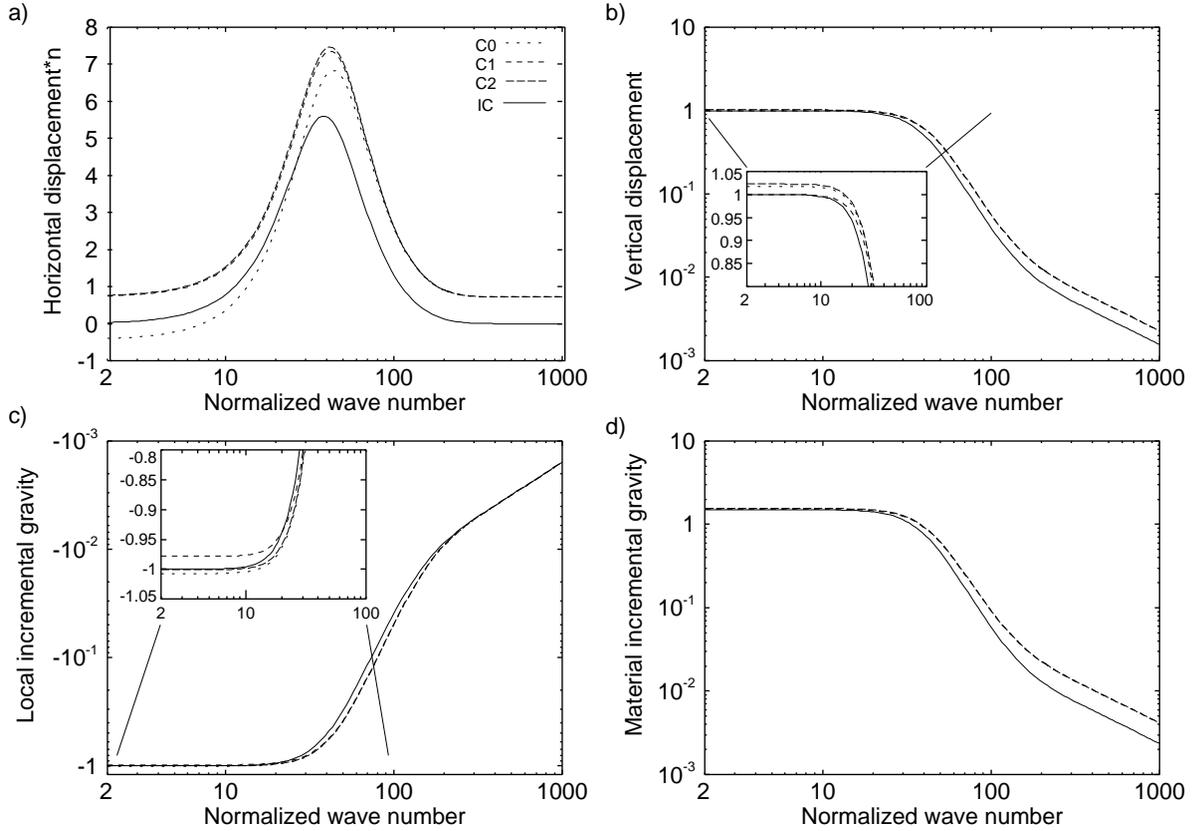


Abbildung 5.1: Verschiebungen und Schwereinkremente an der Oberfläche für eine elastische Lithosphäre über einem inviskosen, inkompressiblen Halbraum in den betrachteten Näherungen als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$  (nach der Strichlänge geordnet: C0 – C1 – C2 – IC). a) zeigt die Horizontalverschiebung  $nU^F$ , b) die Vertikalverschiebung  $W^F$  in logarithmischer Darstellung, c) das lokale Schwereinkrement  $G^{(\Delta)F}$  und d) das materielle Schwereinkrement  $G^{(\delta)F}$ , beide in logarithmischer Darstellung (beachte das negative Vorzeichen in c). In c) und d) ist die Schwerewirkung der Last abgezogen. Die Verschiebungen sind auf  $\Sigma^R/\rho^{(0)}$  normiert, die Schwerestörungen auf  $2\pi\gamma \Sigma^R$  normiert.

## Vertikalverschiebung

Für kleine Wellenzahlen sind die Vertikalverschiebungen für Näherungen C1 und IC gleich eins, was dem hydrostatischen Gleichgewicht entspricht, welches in beiden Modellen über die hydrostatische Vorspannung erreicht wird. Die Verschiebungen für die Näherungen C0 und C2 sind dagegen für kleine Wellenzahlen geringfügig größer als eins, da für Näherung C0 in der Lithosphäre keine hydrostatische Vorspannung berücksichtigt ist und für Näherung C2 zusätzlich die interne Auftriebskraft wirkt.

Für steigendes  $n$  sinkt die Verschiebung zunächst  $\propto n^{-4}$ , was gemäß (5.3) der TPA entspricht. Für  $n > 200$  ändert sich die Steigung der Kurve hin zu  $\propto n^{-1}$  was gemäß (B.73) einem elastischen Halbraum entspricht. Damit verliert die TPA für Anregungen in diesem Wellenzahlbereich ihre Gültigkeit. Der Wendepunkt der Vertikalverschiebung im Bereich der Verbiegung der Lithosphäre stimmt mit  $n_{1/2}$  der TPA überein und liegt für Näherung IC weiter links, da die Biegesteifigkeit entsprechend (5.2) für diese Näherung größer ist.

### Lokales Schwereinkrement

Für kleine Wellenzahlen nähert sich das lokale Schwereinkrement an der Oberfläche für Näherung IC dem Wert  $-1$  für hydrostatisches Gleichgewicht, so dass das durch die Last verursachte Inkrement mit dem Wert  $+1$  kompensiert wird. Für Näherung C0 sind die Werte dagegen kleiner als  $-1$ , was durch die größere Vertikalverschiebung an der Oberfläche verursacht ist, die durch die Dichteumverteilung in der Lithosphäre nicht kompensiert wird. Für Näherung C1 kompensiert das Massendefizit an der Oberfläche (die Vertikalverschiebung ist gleich 1) die durch die Last hervorgerufene Schwere. Das positive Dichteinkrement in der Lithosphäre vergrößert somit die Schwere an der Oberfläche. Für Näherung C2 kompensiert die vergrößerte Vertikalverschiebung den Einfluss des Dichteinkrements, so dass das Schweresignal nahe 1 ist.

### Materielles Schwereinkrement

Wie für Erdmodell U dominiert die Vertikalverschiebung das materielle Schwereinkrement, so dass sich die Werte im Wesentlichen wie die der Vertikalverschiebung verhalten.

## 5.3 Störungen bei viskoelastischem Halbraum

Da die Biegesteifigkeit das Verhalten der Lithosphäre ausschlaggebend parametrisiert, wählen wir in diesem Abschnitt für das inkompressible Erdmodell EL' die Dicke der Lithosphäre so, dass sie gemäß (5.2) die gleiche Biegesteifigkeit wie die der kompressiblen Näherungen aufweist.

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\kappa$ (GPa)	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Lithosphäre	2900	$\infty$	68.0	$\infty$	88.5
Mantel	3380	$\infty$	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 5.2: Parameterwerte für Erdmodell EL'.

Die Abbildungen 5.2–5.5, S. 72 und 73 zeigen die Relaxationsspektren von Erdmodell EL in den verschiedenen Näherungen. Alle Näherungen weisen ausschließlich die Lithosphärenmode L0 (rot) und die Mantelmode M0 (blau) auf, von denen Mode M0 die Oberflächenverschiebung dominiert, siehe Abschn. C.2, S. 129. Da für Näherung IC die Biegesteifigkeit an die der kompressiblen Näherungen angepasst ist (Erdmodell EL'), sind die Unterschiede in den Spektren erwartungsgemäß klein.

Die Relaxationszeiten der kompressiblen Näherungen in Abb. 5.6a auf S. 74 sind für Mode L0 für kleine Wellenzahlen systematisch kleiner als für Näherung IC. Mode L0 weist jedoch nur in der Horizontalverschiebung und für  $n < 10$  signifikant von 0 verschiedene Werte auf, blau in Abbildungen 5.2b bis 5.5b. Damit sind diese Unterschiede nur für Lasten mit sehr großer Wellenlänge von Interesse, für die jedoch andererseits die Halbraumnäherung für die Erdkugel nicht mehr gilt. Im Gegensatz zu Näherung IC konvergiert Mode M0 der kompressiblen Näherungen für  $n \rightarrow \infty$  nicht gegen Mode L0. Da der elastische Beitrag in diesem Bereich der Spektren dominiert, ist auch dieser Unterschied von nur geringer Relevanz für Relaxationsprozesse.

Die in Abb. 5.6b auf S. 74 dargestellten elastischen und inviskosen Beiträge zur Horizontalverschiebung zeigen, dass auch nach Anpassung der Biegesteifigkeiten die Beiträge der inkompressiblen Näherung IC deutlich kleiner sind als die der kompressiblen Näherungen. Die nicht gezeigten Unterschiede in den Vertikalverschiebungen und der Schwere sind dagegen gering. Sie beschränken sich auf kleine Wellenzahlen (Abschn. 5.2, S. 69) und große Wellenzahlen (Abschn. 4.1, S. 50). Das Verhalten im mittleren, durch die Verbiegung der Platte bestimmten Bereich stimmt dagegen durch die Anpassung der Biegesteifigkeiten überein.

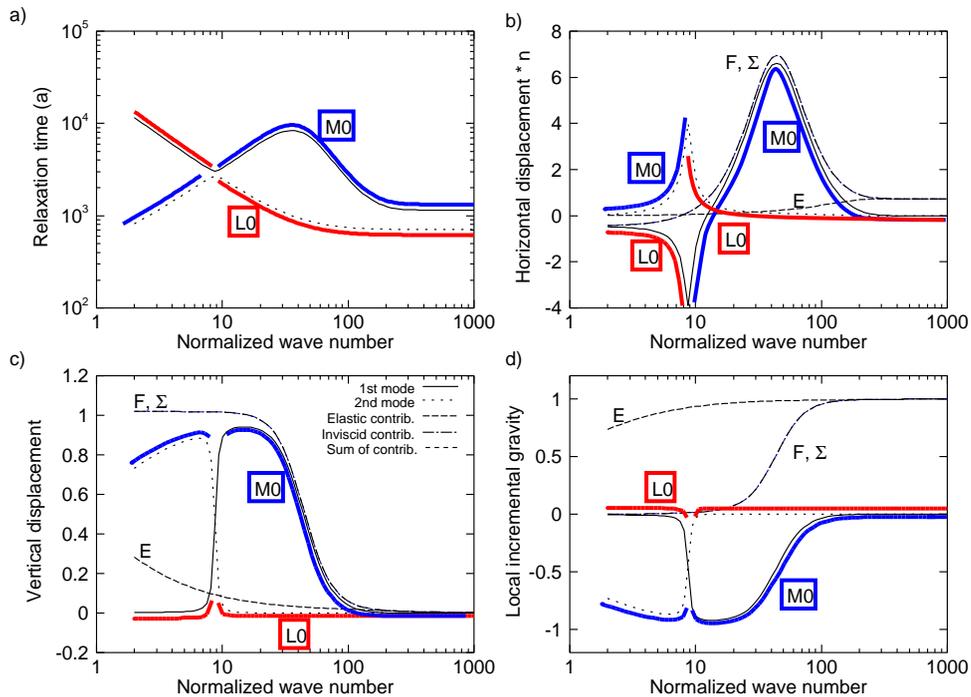


Abbildung 5.2: a) Relaxationszeitspektrum, b) Horizontal-, c) Vertikalverschiebung und d) lokales Schwereinkrement an der Oberfläche für Erdmodell EL<sub>C0</sub> als Funktion der Wellenzahl  $n$ . Die Horizontalverschiebungen sind mit  $n$  multipliziert. Verschiedene Stricharten unterscheiden die Relaxationszeiten und deren Beiträge nach ihrem Auftreten im Spektrum, den elastischen Beitrag E, die Summe der Beiträge  $\Sigma$  und den inviskosen Beitrag F. Farblich unterlegt sind die Relaxationszeiten der Moden M0 und L0, sowie deren Beiträge. Die Normierungen entsprechen denen in Abb. 5.1 auf S. 70. Im Unterschied zu Abb. 5.1c ist in d) die Schwerewirkung der Last berücksichtigt.

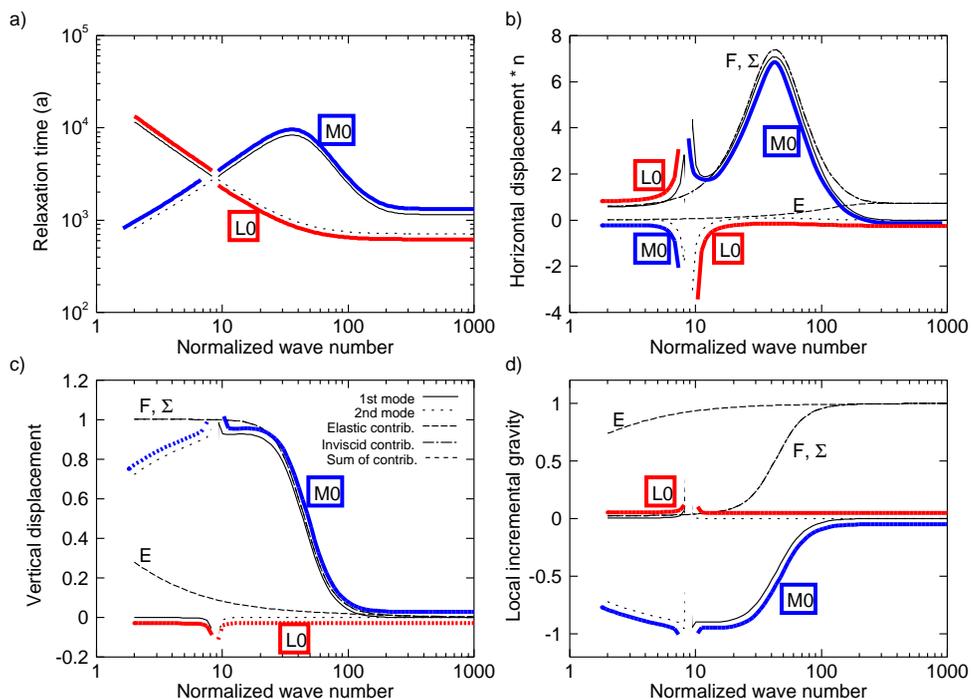


Abbildung 5.3: a) Relaxationszeitspektrum, b) Horizontal-, c) Vertikalverschiebung und d) lokales Schwereinkrement an der Oberfläche für Erdmodell EL<sub>C1</sub> als Funktion der Wellenzahl  $n$ . Darstellung entspricht der in Abb. 5.2.

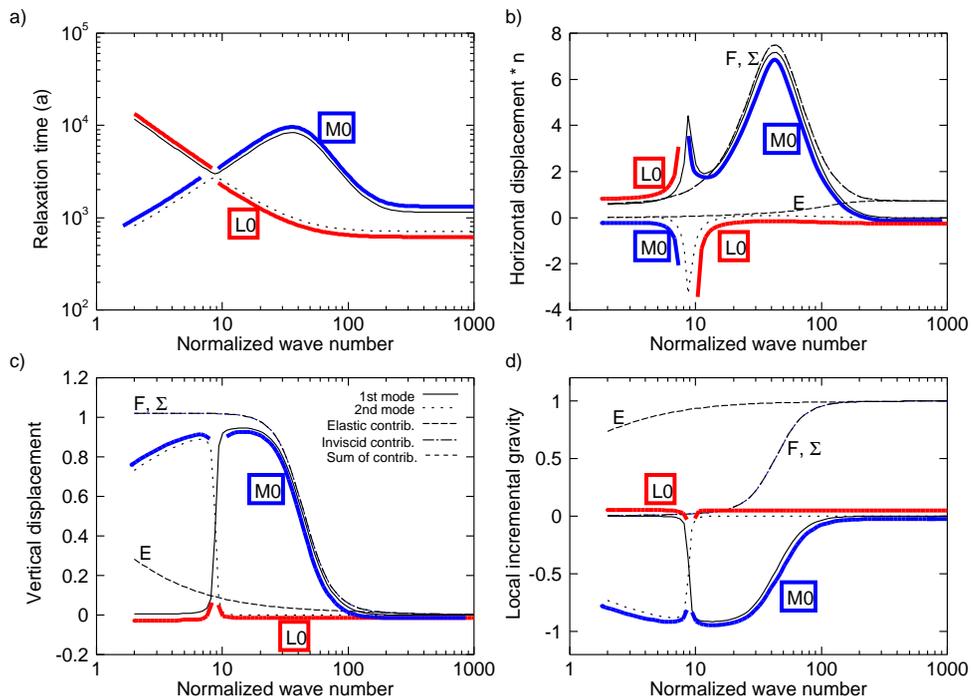


Abbildung 5.4: a) Relaxationszeitenspektrum, b) Horizontal-, c) Vertikalverschiebung und d) lokales Schwereinkrement an der Oberfläche für Erdmodell  $EL_{C2}$  als Funktion der Wellenzahl  $n$ . Darstellung entspricht der in [Abb. 5.2](#) auf der gegenüberliegenden Seite.

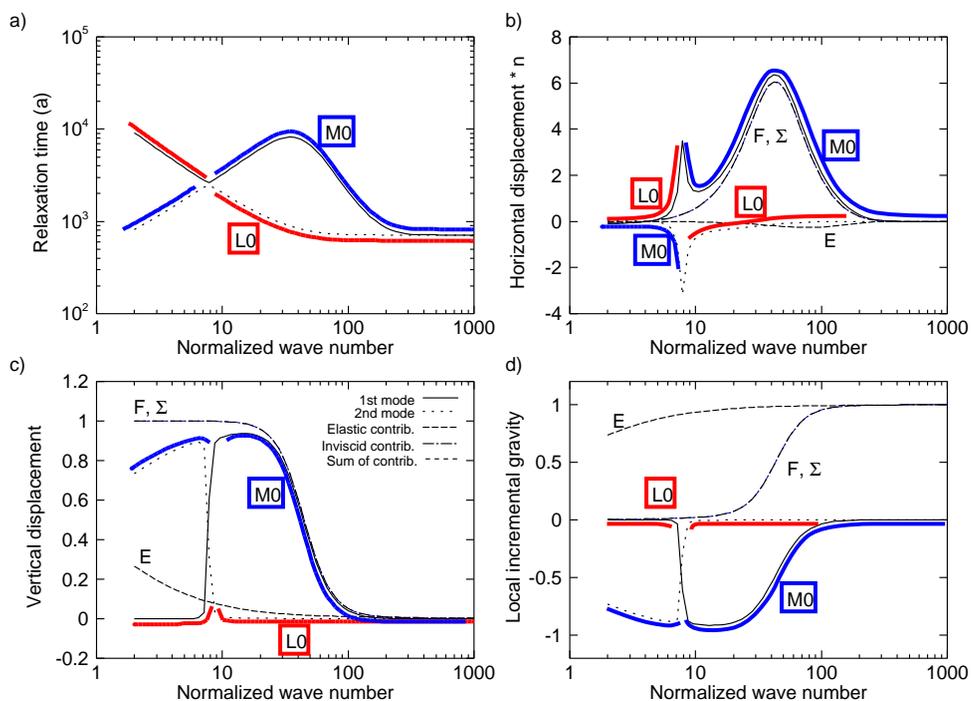


Abbildung 5.5: a) Relaxationszeitenspektrum, b) Horizontal-, c) Vertikalverschiebung und d) lokales Schwereinkrement an der Oberfläche für Erdmodell  $EL_{IC}$  als Funktion der Wellenzahl  $n$ . Darstellung entspricht der in [Abb. 5.2](#) auf der gegenüberliegenden Seite.

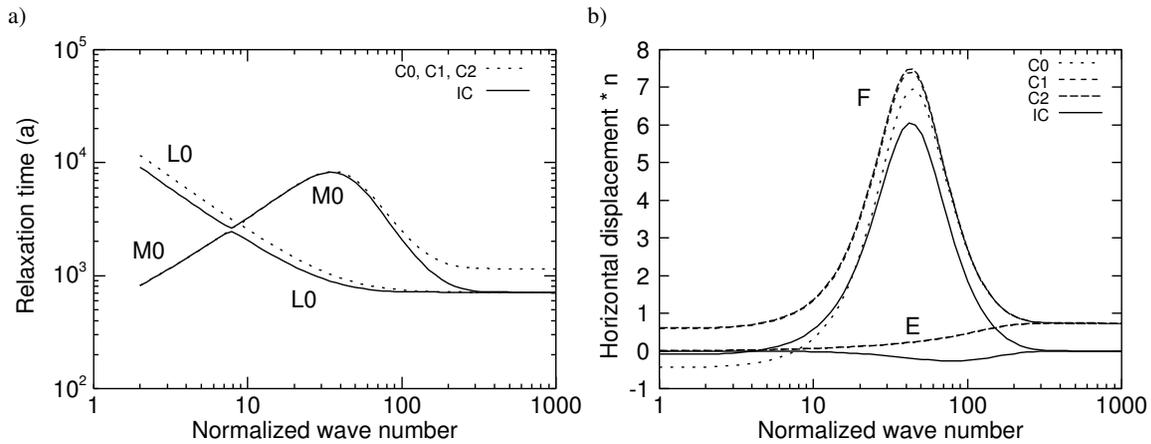


Abbildung 5.6: a) Relaxationszeitspektrum und b) elastische und inviskose Beiträge zur Horizontalverschiebung für Erdmodell  $EL_{C0}$ ,  $EL_{C1}$  und  $EL_{C2}$  (gestrichelt), und Erdmodell  $EL'$  (durchgezogen) als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ .

## 5.4 Resumé

Die Modellierung der Lithosphäre in verschiedenen Näherungen hat Folgendes ergeben:

- Die Reduzierung der Biegesteifigkeit beim Übergang von einer inkompressiblen zur einer kompressiblen Lithosphäre stellt den markantesten Unterschied zwischen den Näherungen dar.
- Die Horizontalverschiebung für eine inkompressible Lithosphäre ist auch nach Anpassung der Biegesteifigkeit deutlich kleiner als die für eine kompressible Lithosphäre. Im Gegensatz zur Modellierung der Vertikalbewegung und Schwere sollte demnach bei der Modellierung der Horizontalbewegung die Kompressibilität nicht vernachlässigt werden.
- Berücksichtigt man die Schwere, ergeben sich für langwellige Anregungen, bei denen die Biegesteifigkeit vernachlässigbar ist, Unterschiede von einigen Prozent zwischen den Näherungen. Diese werden durch die unterschiedlichen Kompensationsmechanismen hervorgerufen.
- Die Relaxationsmoden des oberen Mantels werden im Wesentlichen über die Biegesteifigkeit der Lithosphäre modifiziert.

## Inkompressible viskoelastische Lithosphäre über Halbraum

Die wichtigste Observable von GIA ist die nacheiszeitliche Hebung. Sie zeigt sich in der Vertikalverschiebung und der Schwereänderung an der Oberfläche (Cathles, 1975). Sofern man ausgedehnte Lasten wie die pleistozänen, fennoskandischen oder nordamerikanischen Eisschilde untersucht, reicht es für diese Observablen aus, die Lithosphäre als dünne Platte zu modellieren und über ihre Biegesteifigkeit zu parametrisieren. Damit ist der innere Aufbau der Lithosphäre, insbesondere ihre wahre Ausdehnung in den Erdmantel nur von geringer Bedeutung. Die Erschließung astronomischer und Satelliten gestützter Beobachtungsmethoden ermöglichte im letzten Jahrzehnt auch die Horizontalkomponente von GIA über VLBI<sup>1</sup>, bei der die kohärente Strahlung eines Quasars ausgenutzt wird (James & Lambert, 1993), und über GPS<sup>2</sup>, einem Satellitensystem zur absoluten Positionsbestimmung (Scherneck *et al.*, 1996) zu messen. Untersuchungen der rezenten Seismizität (Slunga, 1989; Gregersen, 1992; Arvidsson, 1996) und von nacheiszeitlichen Verwerfungen (Hasegawa *et al.*, 1985; Muir Wood, 1989) in den vormals vereisten Gebieten weisen auf Bruchprozesse hin, die durch das glazial induzierte Spannungsfeld getriggert worden sind (Wahlström, 1993; James & Bent, 1994). Die Annahmen, die für die TPA gemacht werden müssen, reichen jedoch nicht aus, um diese Feldgrößen realistisch abschätzen zu können (Ward, 1984). Somit müssen die Feldgleichungen vollständig für einen geschichteten Halbraum gelöst werden (Kap. 3). Gleichzeitig bedeutet dies aber auch, dass die mechanische Struktur der Lithosphäre an Bedeutung gewinnt. Ausgehend von einem lateral homogenen Halbraum in Näherung IC diskutieren wir in diesem Kapitel den Einfluss einer rheologischen Schichtung auf das Deformationsverhalten der Lithosphäre.

Die rheologische Schichtung der Lithosphäre ergibt sich aus der Annahme, dass die verantwortlichen Kriechmechanismen temperaturaktivierte Diffusionsprozesse sind (z. B. Ranalli, 1987, S. 243ff), und somit die Festigkeit innerhalb einer homogenen Schicht bei Temperaturzunahme mit der Tiefe mit zunehmender Tiefe abnimmt. Vereinfacht kann man die kontinentale Lithosphäre mineralogisch in drei Schichten unterteilen: in die von Quarz dominierte obere Kruste, die von Feldspat dominierte untere Kruste und die von Olivin dominierte Mantellithosphäre. Nimmt man für jede Schicht einen eigenen Diffusionsprozess an, so ergibt sich eine Weihnachtsbaumartige Struktur<sup>3</sup> (Abb. 6.1a auf der folgenden Seite). Der Grund dafür ist, dass die Scherfestigkeit zunächst mit steigendem lithostatischem Druck linear mit der Tiefe zunimmt, ab einer kritischen Tiefe aber die exponentielle Abnahme durch den temperaturaktivierten Kriechprozess überwiegt. Während die Kruste-Mantel-Grenze klar durch die Mohorovičić Diskontinuität definiert ist (z. B. Meissner, 1986, S. 2), kann die Lithosphärenbasis nicht ohne Weiteres angegeben

<sup>1</sup> engl. Very Long Baseline Interferometry

<sup>2</sup> engl. Global Positioning System

<sup>3</sup> engl. Christmas-tree structure

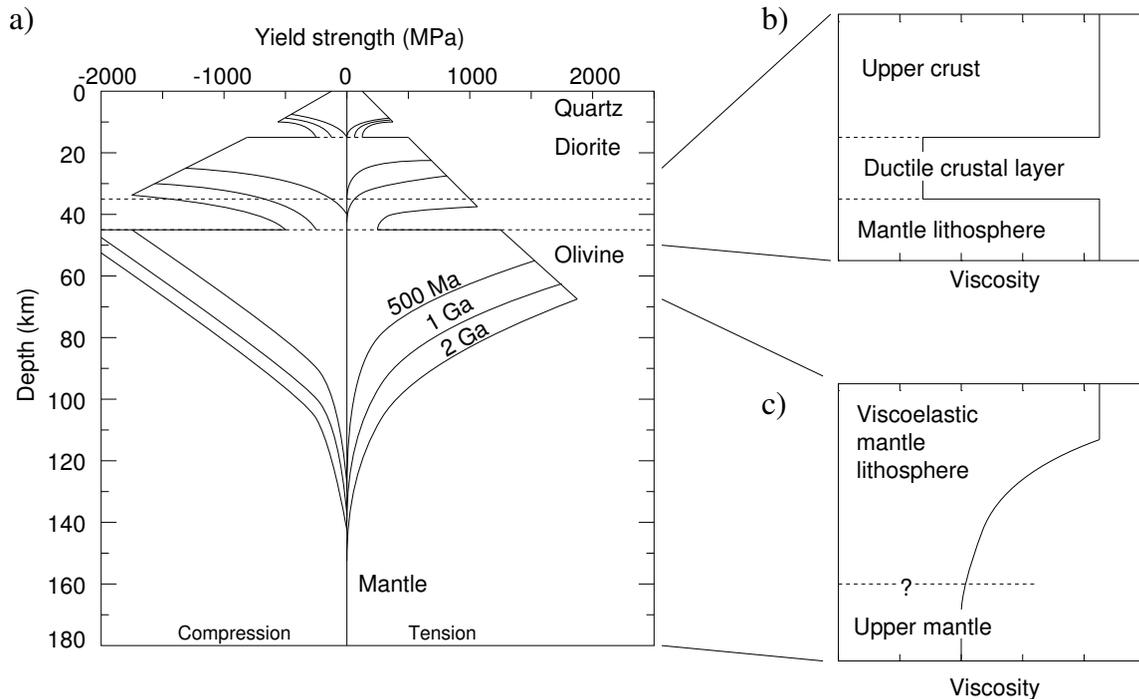


Abbildung 6.1: a) Scherfestigkeit der Lithosphäre als Funktion der Tiefe (nach [Burov & Diament, 1995](#)). Die Isolinien illustrieren die Zunahme der Festigkeit mit dem Alter der Schicht. b) Übertragung der verringerten Scherfestigkeit in der unteren Kruste in eine Schicht geringer Viskosität. c) Übertragung der Festigkeitsabnahme in der Mantellithosphäre in eine Viskositätsabnahme.

werden ([Anderson, 1995](#)). Dies liegt zum einen an der uneinheitlichen Definition der Lithosphäre, d. h. thermische, seismische und rheologische Definitionen ergeben unterschiedliche Tiefen. Die uns interessierende rheologische Definition der Lithosphäre bezeichnet den Bereich des Erdmantels, der auf Beanspruchungen auf Zeitskalen von 1 Ga elastisch reagiert ([Ranalli, 1987](#), S. 230). Genauer betrachtet hängt die Dicke der Lithosphäre von ihrem Alter ab ([Burov & Diament, 1995](#)), sowie für Prozesse auf geringeren Zeitskalen auch von der Belastungsdauer (z. B. [Wolf, 1985b](#); [Watts & Zhong, 2000](#)). In [Abschn. 6.1, S. 76](#) befassen wir uns mit den Folgen der rheologischen Schichtung innerhalb der unteren Kruste, wobei wir im Modell eine Schicht verminderter Viskosität betrachten ([Abb. 6.1b](#)). In [Abschn. 6.2, S. 90](#) modellieren wir den Übergang von der Lithosphäre zum oberen Mantel mittels einer stetigen Abnahme der Viskosität ([Abb. 6.1c](#)).

## 6.1 Störungen bei duktiler Schicht in der unteren Kruste

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit einer duktilen Schicht in der unteren Kruste, die wir in Übereinstimmung mit [Klemann & Wolf \(1999\)](#) als DCL<sup>1</sup> bezeichnen. Andere in der Literatur erscheinende Bezeichnungen sind ‘intracrustal asthenosphere’ ([Turcotte \*et al.\*, 1984](#)), ‘ductile lower crust’ ([Nakada, 1994](#)), ‘ductile layer in the lithosphere’ ([Wu, 1997](#)), ‘ductile crustal zone’ ([Di Donato \*et al.\*, 2000](#)) und ‘weak lower crust’ ([Grollimund & Zoback, 2001](#)). Wir bevorzugen jedoch ‘duktiler Schicht in der unteren Kruste’, da diese Schicht zum Einen mineralogisch in der

<sup>1</sup> engl. Ductile Crustal Layer

Kruste liegt, und zwar genauer in der rheologisch duktilen (plastischen) unteren Kruste (Kusznir, 1991) und zum Anderen nicht mit der mineralogisch definierten Unterkruste gleichgesetzt werden darf. Unabhängig von rheologischen Betrachtungen gibt es geophysikalische Hinweise auf die Existenz einer DCL. So weisen viele tektonische Provinzen eine Zone geringerer oder fehlender Seismizität in der Unterkruste auf (z. B. Vetter & Meissner, 1979; Meissner & Strehlau, 1982; Chen & Molnar, 1983). Diese sind häufig mit seismischen Reflektoren innerhalb der Unterkruste assoziiert, die man als laminare durch Fließprozesse gebildete Strukturen deutet (z. B. Meissner & Wever, 1986). Da das rheologische Fließen ein temperaturaktivierter Prozess ist, trifft man dieses Verhalten heute vor allem in tektonisch jungen Gebieten an (z. B. Ito, 1999). Dementsprechend wird untersucht, ob die DCL die Tektonik im Archaikum wesentlich beeinflusst hat (Bailey, 1999). Ähnlich argumentierten Banerdt *et al.* (1992) für die Biegeeigenschaften in der Frühgeschichte des Mars. Für tektonisch alte Gebiete, wie das fennoskandische Schild, wird eine duktile Schicht dagegen kontrovers diskutiert (Slunga, 1989; Arvidsson, 1996; Moisiso *et al.*, 2000).

Seit etwa 1990 ist das Interesse gestiegen, eine DCL in die Modellierung rezenter dynamischer Prozesse zu integrieren. Nach den Zeitskalen geordnet, auf denen diese Prozesse ablaufen, wurde für  $10^6$  bis  $10^8$  a der Einfluss einer duktilen Schicht auf tektonische Prozesse wie Riftbildung oder Plattenkollisionen (z. B. Kruse *et al.*, 1991; Lobkovsky & Kerchman, 1991), auf die Entwicklung von Sedimentbecken (Kaufman & Royden, 1994), und auf Konvektionsprozesse (Nakada, 1994) diskutiert. Auf einer Zeitskala von  $< 10^2$  a ist nach einem seismischen Ereignis der Einfluss auf Spannungsrelaxation (Rydelek & Sacks, 1990; Rydelek & Pollitz, 1994) und Spannungsakkumulation (Grollmund & Zoback, 2001) von Interesse. Gleiches gilt für die durch Bergbau bedingte isostatische Ausgleichsbewegung (Klein *et al.*, 1997). Zwischen diesen Zeitskalen erfolgt GIA mit charakteristischen Zeiten von  $10^4$  bis  $10^6$  a. Wu (1997) untersuchte den Einfluss einer DCL auf die nacheiszeitliche Horizontalbewegung und das glazial induzierte Spannungsfeld in Nordamerika mit Hilfe eines Finite-Elemente-Kodes und kam zu dem Schluss, dass der Einfluss nur gering ist. Klemann & Wolf (1999) analysierten mit der auch hier verwendeten Näherung IC die Relaxationsmoden und zeigten, dass der Einfluss der DCL für geringe Viskositäten signifikant ist. Daneben untersuchten die Autoren den prinzipiellen Einfluss auf die Spannungsrelaxation nach dem Abschmelzen des fennoskandischen Eisschildes und die damit verbundenen Auswirkungen auf die Verschiebungsraten sowie die Aktivierung von Bruchzonen (Johnston *et al.*, 1998). Di Donato *et al.* (2000) betrachteten eine DCL für ein sphärisches Erdmodell und untersuchten den Einfluss für kleinräumige Ozeanlasten.

In den folgenden Abschnitten beschreiben wir qualitativ die physikalischen Prozesse, die mit der DCL verbunden sind (Abschn. 6.1.1, S. 77), stellen das verwendete Erdmodell vor (Abschn. 6.1.2, S. 78), diskutieren die Relaxationsmoden für ein inkompressibles Erdmodell (Abschn. 6.1.3, S. 78), untersuchen die Wahl von Viskositäts- und Dichtekontrast zwischen Kruste und Mantel (Abschn. 6.1.4, S. 79 und 6.1.5) und fassen die physikalischen Prozesse nochmals zusammen (Abschn. 6.1.6, S. 82). In wieweit wir die gefundenen Ergebnisse auch auf Erdmodelle mit einer verfeinerten Mantelschichtung übertragen können, betrachten wir in Abschn. 6.1.8, S. 87.

### 6.1.1 Physikalische Prozesse in der duktilen Schicht

Zwei Prozesse bestimmen das Verhalten der duktilen Schicht, wenn wir für das Stoffgesetz die lineare Maxwell-Viskoelastizität annehmen (siehe S. 38). Zum einen relaxieren die Scherspannungen innerhalb der Schicht auf der Zeitskala der Maxwell-Zeit  $\eta_{LC}/\mu_{LC}$ . Zum anderen wird der vom horizontalen Druckgradienten getriebene laterale Materialtransport durch Newton'sches

Fließen bestimmt und läuft auf der Zeitskala  $3\eta_{\text{LC}}L^2/(\rho_{\text{LC}}g^{(0)}h_{\text{LC}}^3)$  ab, mit  $L$  als Längenskala (Kruse *et al.*, 1991).

### 6.1.2 Parametrisierung des Erdmodelles

Wir verwenden ein Vier-Schichten-Modell, Erdmodell VC<sup>1</sup> (Tab. 6.1) um den Einfluss einer DCL auf das Deformationsverhalten des Erdkörpers zu untersuchen. Von der Oberfläche nach unten

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Obere Kruste	3380	64.0	$\infty$	35
Untere Kruste	3380	64.0	$1.0 \cdot 10^{17}$	10
Mantellithosphäre	3380	64.0	$\infty$	65
Mantel	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 6.1: Parameterwerte für Erdmodell VC.

sind dies folgende Schichten:

1. Elastische Oberkruste: Vernachlässigt Anelastizität, die sich in den obersten Kilometern durch sprödes und im unteren Bereich durch duktilen Verhalten äußern kann.
2. Dünne viskoelastische Schicht in der Unterkruste: Simuliert duktilen Verhalten und wird durch konstante Viskosität parametrisiert.
3. Elastische Mantellithosphäre: Ihre untere Begrenzung wird über den Beginn einer Zone herabgesetzter seismischer Geschwindigkeit definiert (z. B. Anderson, 1995).
4. Viskoelastischer Mantel: Realisiert die untere Randbedingung für die geschichtete Lithosphäre (z. B. Mitrovica, 1996; Wolf, 1985b).

### 6.1.3 Relaxationsmoden des Erdmodelles

Aus Abschn. C.2, S. 129 ist ersichtlich, dass Erdmodell VC für Inkompressibilität sechs Relaxationsmoden liefert. Abb. 6.2a auf der gegenüberliegenden Seite zeigt das Relaxationszeitspektrum, in dem bereits die Moden identifiziert sind. Neben dem klassischen Modenpaar M0 und L0, das mit der Schichtgrenze zwischen Lithosphäre und Mantel assoziiert ist, erscheinen zwei weitere Paare (MC, LC und L1<sub>1</sub>, L1<sub>2</sub>), die mit der oberen und unteren Grenze der DCL verknüpft sind (Nakada, 1994; Klemann & Wolf, 1999).

Abb. 6.2c auf der gegenüberliegenden Seite zeigt die Beiträge der viskosen Moden zur Vertikalverschiebung an der Oberfläche sowie den elastischen und inviskosen Beitrag. Der inviskose Beitrag ergibt sich als Summe aus dem elastischen und den modalen Beiträgen (Abschn. 3.5.2, S. 45). In Abb. 6.3a auf S. 80 sind die Scherpotentialdichten der Moden (Abschn. A.3.4, S. 102) für die normierten Wellenzahlen  $n = 20$  und  $200$  abgebildet. Aus diesen erkennen wir, dass sich die Potentialdichten der neu hinzugekommenen Moden MC, LC, L1<sub>1,2</sub> weitgehend auf die Lithosphäre konzentrieren. Dagegen haben die Moden M0 und L0 neben signifikanten Dichten in der Lithosphäre auch erhebliche Dichten im Mantel und stimmen in ihrem wesentlichen Verlauf mit den entsprechenden Moden von Erdmodell EL überein (Abb. C.1 auf S. 131).

<sup>1</sup> engl. Viscous Crust

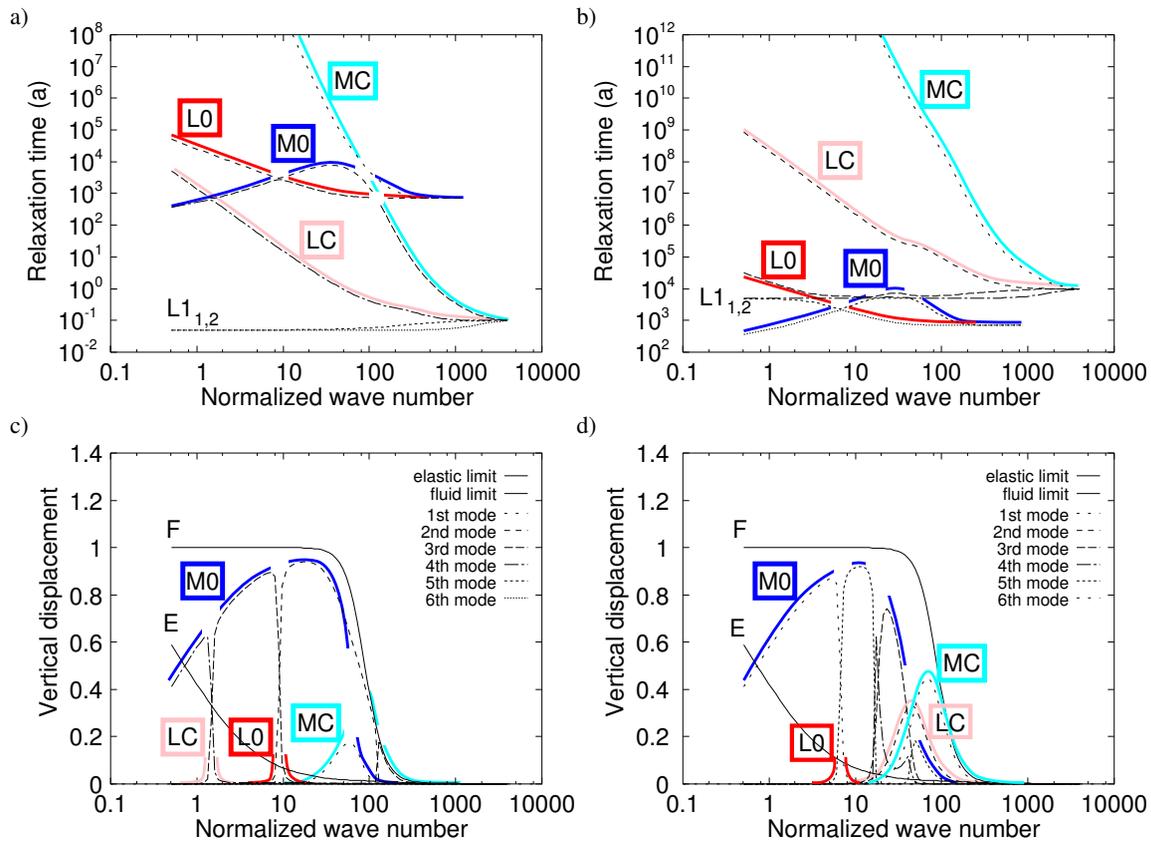


Abbildung 6.2: a) Relaxationszeitspektrum und c) Vertikalverschiebung an der Oberfläche für Erdmodell VC und entsprechend b) und d) für Erdmodell  $VC^+$  als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ . Verschiedene Stricharten unterscheiden die Relaxationszeiten der Moden und deren Beiträge nach ihrem Auftreten im Spektrum. Durchgezogene Kurven bezeichnen den elastischen Beitrag E und den inviskosen Beitrag F. Farblich unterlegt sind die Relaxationszeiten der Moden L0–M0, LC–MC,  $L_{1,2}$  sowie ihre Beiträge. Die Verschiebungen sind auf  $\Sigma^R/\rho^{(0)}$  normiert.

#### 6.1.4 Viskositätskontrast zwischen Kruste und Mantel

Um zu untersuchen, bis zu welcher Viskosität in der DCL sich eine Relaxation in der beschriebenen Weise einstellt, vergrößern wir die Viskosität in der Unterkruste auf den Wert  $\eta_{LC} = 10^{22}$  Pa s (Tab. 6.2 auf S. 81). Für diese Parameterkombination mit einer höheren Viskosität in der Kruste als im Mantel erhalten wir folgendes Bild (Abb. 6.2b, d): Wir identifizieren weiterhin die drei Modenpaare M0–L0, MC–LC und  $L_{1,2}$  des Erdmodelles VC, die im Relaxationszeitspektrum einen ähnlichen Verlauf aufweisen (Abb. 6.2b). Die Position des Paares M0–L0 bleibt weitgehend unverändert. Dagegen sind die Relaxationszeiten der beiden übrigen Paare im Spektrum systematisch um 5 Größenordnungen verlängert, was der Vergrößerung der Viskosität von  $10^{17}$  auf  $10^{22}$  Pa s entspricht. Damit schneidet nun das Modenpaar  $L_{1,2}$  die Moden L0 und M0, und das Modenpaar MC–LC verläuft unabhängig.

In der Vertikalverschiebung (Abb. 6.2d) zeigen die Amplituden der Moden M0 und L0 einen ähnlichen Verlauf wie für Erdmodell VC, nur dass Mode M0 bereits bei  $n = 10$  ihr Maximum erreicht und für  $n = 200$  fast auf 0 abgeklungen ist. Betrachtet man den Wendepunkt von Mode M0, so fällt auf, dass dieser für Erdmodell  $VC^+$  zu kleineren Wellenzahlen verschoben ist, was

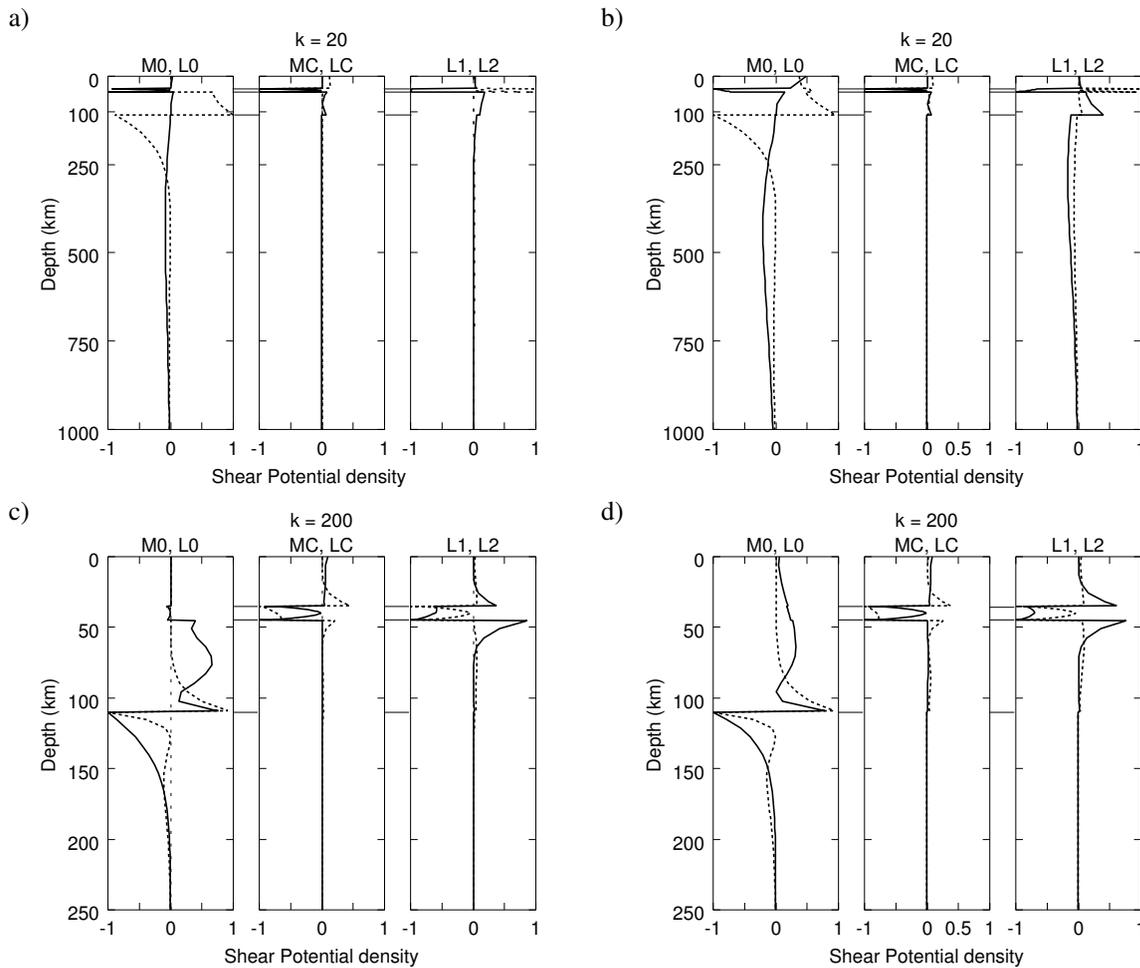


Abbildung 6.3: Scherpotentialdichten a) für normierte Wellenzahl  $n = 20$  und c) für normierte Wellenzahl  $n = 200$  für Erdmodell VC und entsprechend b) und d) und für Erdmodell  $VC^{\eta^+}$  als Funktion der Tiefe. In jedem Diagramm sind die oberhalb bezeichneten Moden dargestellt, die erste Mode durchgezogen, die zweite gestrichelt. Die Linien zwischen den Plots zeigen die Positionen der Schichtgrenzen.

auf eine geringere Biegesteifigkeit der Lithosphäre hindeutet. Die Moden MC und LC tragen für dieses Modell wesentlich zur Verschiebung bei. Die inviskosen und elastischen Beiträge sind identisch zu dem von Modell VC.

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Erdmodellen zeigt sich in den Scherpotentialdichten. Für Erdmodell  $VC^{\eta^+}$  (Abb. 6.3b, d) werden die Scherpotentialdichten der Moden M0 und L0 durch das Vorhandensein der DCL nur wenig beeinflusst. Sie verlaufen prinzipiell wie die Potentiale von Erdmodell EL (Abb. C.1b auf S. 131). Nur im Tiefenabschnitt der DCL kommt es zu einer Störung, die für  $n = 20$  erheblich, für  $n = 200$  dagegen nur gering ist. Die Potentialdichten der Moden M0 und L0 von Erdmodell VC (Abb. 6.3a, c) weisen verschwindende Werte in der Kruste auf. Der Verlauf der Scherpotentiale der Moden MC und LC gleicht weitgehend dem von Modell VC. Entsprechendes gilt für das Modenpaar  $L1,2$  bei  $n = 200$ . Mode  $L1$  weist bei  $n = 20$  Eigenschaften von Mode M0 auf, was auch an der Vertikalverschiebung erkennbar ist. Im Spektrum findet in diesem Bereich eine Vertauschung der Eigenwerte statt, was

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pas)	$h$ (km)
Obere Kruste	3380	64.0	$\infty$	35
Untere Kruste	3380	64.0	$1.0 \cdot 10^{22}$	10
Mantellithosphäre	3380	64.0	$\infty$	65
Mantel	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 6.2: Parameterwerte für Erdmodell VC $\eta^+$ .

ein Effekt der Kopplung der betreffenden Moden ist (Abschn. C.2, S. 129). Diskutieren wir die Modelle hinsichtlich der sich ergebenden Biegesteifigkeit der Lithosphäre ergibt sich ein weiterer Unterschied (Abschn. 6.1.6, S. 82).

### 6.1.5 Dichtekontrast zwischen Kruste und Mantel

In Abschn. 6.1.3, S. 78 (Tab. 6.1 auf S. 78) haben wir ein Erdmodell untersucht, in dem Kruste und Mantel die gleiche Dichte besaßen. Realistischer ist es jedoch, den Dichtesprung von mafischer Zusammensetzung im Mantel zu dioritischer Zusammensetzung in der Kruste zu berücksichtigen. Das entsprechende Erdmodell VC $\delta\rho$  (Tab. 6.3) weist keine weiteren Unterschiede als eine reduzierte Dichte in der Kruste auf.

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pas)	$h$ (km)
Obere Kruste	2900	64.0	$\infty$	35
Untere Kruste	2900	64.0	$1.0 \cdot 10^{17}$	10
Mantellithosphäre	3380	64.0	$\infty$	65
Mantel	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 6.3: Parameterwerte für Erdmodell VC $\delta\rho$ .

Das Relaxationszeitenspektrum in Abb. 6.4a auf der folgenden Seite und das in Abb. 6.2a auf S. 79 gezeigte Spektrum von Erdmodell VC unterschieden sich nur geringfügig. Der wesentliche Unterschied ist, dass Mode MC für kleine Wellenzahlen nicht  $\propto n^{-5}$  sondern  $\propto n^{-2}$  abnimmt.

Auffälliger ist die Vertikalverschiebung an der Oberfläche (Abb. 6.4c auf der folgenden Seite). Mode MC weist hier auch für kleine Wellenzahlen eine endliche Amplitude auf, die für die gewählte Normierung den Wert  $\rho_{UM}/\rho_{LC} - 1$  hat. Desweiteren erkennt man, dass sich die inviskosen Amplituden der Vertikalverschiebung vom Wert 1, der dem Auftrieb durch das verdrängte Mantelmaterial entspricht, auf einen Wert erhöht, der dem Auftrieb durch die weniger dichte Kruste entspricht. Damit kann man Mode MC als Auftriebsmode interpretieren, die in ihrer Vertikalverschiebung das Eintauchen der belasteten elastischen Kruste in die DCL beschreibt.

Mode MC beschreibt auch die Relaxation der elastischen Mantellithosphäre (Abb. 6.4b, d auf der folgenden Seite). Die Abbildung zeigt die Entwicklung der Vertikalverschiebung an der Oberfläche (durchgezogen) und an der Basis der Kruste (gestrichelt) in logarithmischer Skala nach Anbringen einer periodischen Last der Wellenzahl  $n$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Für die Wellenzahl  $n = 20$  erkennt man zunächst eine parallele Verschiebung der beiden Grenzflächen auf der Skala der Relaxationszeit von  $M_0$ ,  $\tau_{M_0}$ . Auf der Skala der Relaxationszeit  $\tau_{MC}$  von MC setzt dann eine Rückbewegung der Verschiebung der Krustenbasis in ihre Ausgangsposition ein, während die Oberfläche der inviskosen Amplitude zustrebt. Entsprechend ist das Verhalten für die Wellenzahl  $n = 200$ , nur dass die Relaxationszeiten  $\tau_{M_0}$  und  $\tau_{MC}$  vertauscht sind, d. h. die Mantellithosphäre relaxiert, bevor sich eine Deformation der gesamten Lithosphäre einstellt. Eine weitere Verschiebung auf der Skala von  $\tau_{M_0}$  ist an der Oberfläche nicht erkennbar.

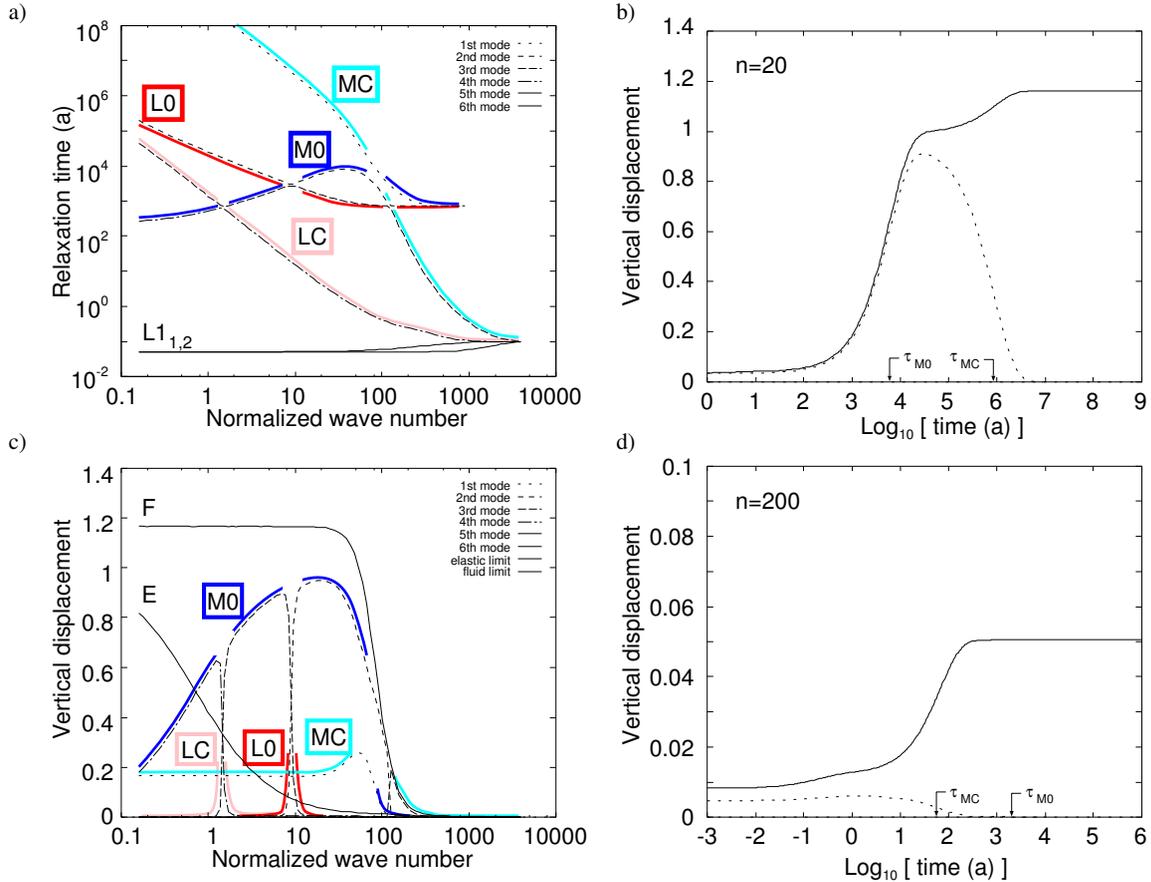


Abbildung 6.4: a) Relaxationszeitspektrum und c) Vertikalverschiebung an der Oberfläche für Erdmodell  $VC^{\delta\rho}$  als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ . Verschiedene Stricharten unterscheiden die Relaxationszeiten der Moden und deren Beiträge nach ihrem Auftreten im Spektrum. Durchgezogene Kurven bezeichnen den elastischen Beitrag E und den inelastischen Beitrag F. Farblich unterlegt sind die Relaxationszeiten der Moden L0–M0, LC–MC, L<sub>1,2</sub> sowie ihre Beiträge. Die Verschiebungen sind auf  $\Sigma^R/\rho^{(0)}$  normiert.

b) Zeitliche Entwicklung der Vertikalverschiebung an nach Heaviside'scher Belastung für die normierten Wellenzahlen  $n = 20$  und d) für  $n = 200$ . Gezeigt sind jeweils die Verschiebung an der Oberfläche (durchgezogen) und an der Basis der Kruste (gestrichelt).  $\tau_{M0}$  und  $\tau_{MC}$  bezeichnen die Relaxationszeiten der entsprechenden Moden M0 und MC.

### 6.1.6 Zeitskalen der Prozesse

Bringt man zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine zeitlich konstante Flächenlast  $\sigma^R = \rho_{UM}^{(0)} g^{(0)}$  mit Dichte  $\rho_{UM}$  des oberen Mantels und Erdbeschleunigung  $g^{(0)}$  auf, so kann man die zeitliche Entwicklung der Deformation anhand der beteiligten Relaxationsprozesse beschreiben. Die verschiedenen Deformationsprozesse werden durch die Relaxationsmoden kontrolliert, laufen demnach auf der Zeitskala  $\mathcal{O}(\tau_X)$  der entsprechenden Relaxationszeit ab:

1.  $\mathcal{O}(t) < \mathcal{O}(\min \tau)$ : Auf Zeitskalen, die kleiner als alle im Spektrum erscheinenden Relaxationszeiten sind, reagiert das geschichtete Modell entsprechend den unrelaxierten Moduln  $\mu_0$  elastisch, was zu einer instantanen Deformation des Materials führt.
2.  $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(\tau)$ : Auf Zeitskalen der für die viskoelastischen Schichten geltenden Maxwell-

Zeiten  $\tau = \eta/\mu_0$  relaxieren die Scherspannungen. Sofern weitere Deformationsprozesse eine größere Relaxationszeit aufweisen, sind die Scherspannungen innerhalb dieser Schicht relaxiert, und die Schicht verhält sich wie eine Newton'sche Flüssigkeit. Dies ist vor allem für die Scherrelaxation innerhalb der Unterkruste wichtig.

3.  $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(\tau_{M0})$ : Das Material des Erdmantels wird durch die Auflast verdrängt. Auf der Zeitskala von  $\tau_{M0}$  stellt sich ein Gleichgewichtszustand zwischen dem Auflastdruck und der Gegenkraft ein, die aus der Auftriebskraft durch das verdrängte Mantelmaterial und der elastischen Kraft durch die Biegesteifigkeit der Lithosphäre besteht. Die Gewichtung dieser Kräfte hängt dabei von der Wellenlänge der Auflast ab. So bewirkt eine großräumige Auflast eine geringe Verbiegung der Lithosphäre, so dass der Auftrieb dominiert. Eine kleinräumige Auflast dagegen verbiegt die Lithosphäre stärker, so dass die Biegesteifigkeit der Lithosphäre die Auflast daran hindert, bis zum Schwimmgleichgewicht in den Mantel einzutauchen ([Abb. 6.2 auf S. 79](#)).
4.  $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(\tau_{MC})$ : Die genannten Kräfte (Auflast, Auftrieb, Biegesteifigkeit) erzeugen ein Druckfeld, das das Material in der DCL verdrängt. Das Druckfeld dünnt die DCL so lange aus, bis der Mantel und die Mantellithosphäre ihren undeformierten Ausgangszustand erreicht haben und sich ein Gleichgewicht der Kräfte hervorgerufen durch die Auflast, den Auftrieb des Materials in der DCL und der Verbiegung der oberen Kruste sowie der Mantellithosphäre eingestellt hat ([Abb. 6.4b auf der gegenüberliegenden Seite](#)).
5.  $\mathcal{O}(t) > \mathcal{O}(\max \tau)$ : Auf Zeitskalen, die größer als alle im Spektrum erscheinenden Relaxationszeiten sind, hat das Modell einen stationären Zustand erreicht, in dem alle Scherspannungen und lateralen Druckgradienten in den viskoelastischen Schichten abgebaut sind. Für das konkrete Modell heißt das: Die Gegenkraft zur wirkenden Oberflächenlast ist bedingt durch den Auftrieb des duktilen Krustenmaterials und der Biegesteifigkeit der oberen Kruste. Die Mantellithosphäre und der obere Mantel befinden sich im Ausgangszustand.

Die gewählte Reihenfolge von 2–4 sagt nichts über die Zeitskalen aus. Für Auflasten kleiner Wellenlänge kann z. B. die Relaxationszeit der Mode M0 größer als die der Mode MC sein. Dies ist dann der Fall, wenn die Mantellithosphäre nicht mehr in den Mantel eintaucht. Dann wirken nur noch die durch die Biegesteifigkeit der elastischen Kruste und den Auftrieb des Materials in der DCL hervorgerufenen Gegenkräfte. Desweiteren definiert das Verhältnis

$$\alpha := \frac{\tau_{LC}}{\tau_{UM}} \tag{6.1}$$

der Maxwell-Zeiten  $\tau_{LC}$  der DCL und  $\tau_{UM}$  des oberen Mantels die Reihenfolge der Relaxationsprozesse 2–4. Ist die Maxwell-Zeit der DCL größer als die des Mantels, relaxieren die Scherspannungen innerhalb der DCL erst, wenn sich im Mantel ein hydrostatisches Gleichgewicht eingestellt hat. Fassen wir die Lithosphäre als dünne Platte auf und parametrisieren ihre Biegesteifigkeit mittels der elastischen Dicke  $h_e$ , können wir die Entwicklung dieser Größe für verschiedene  $\alpha$  zeigen. Dabei berechnen wir  $h_e$  wie folgt:

1. Zu jedem Zeitpunkt berechnen wir für eine beliebige Lithosphärenstruktur, genannt Erdmodell A, die Vertikalverschiebung  $W(n, t)$  aus der wir  $n_{1/2}(t)$  bestimmen.
2. Über den Wert  $rnk_{1/2}$  passen wir ein Erdmodell  $EL_{IC}$  an, indem wir die Lithosphärendicke

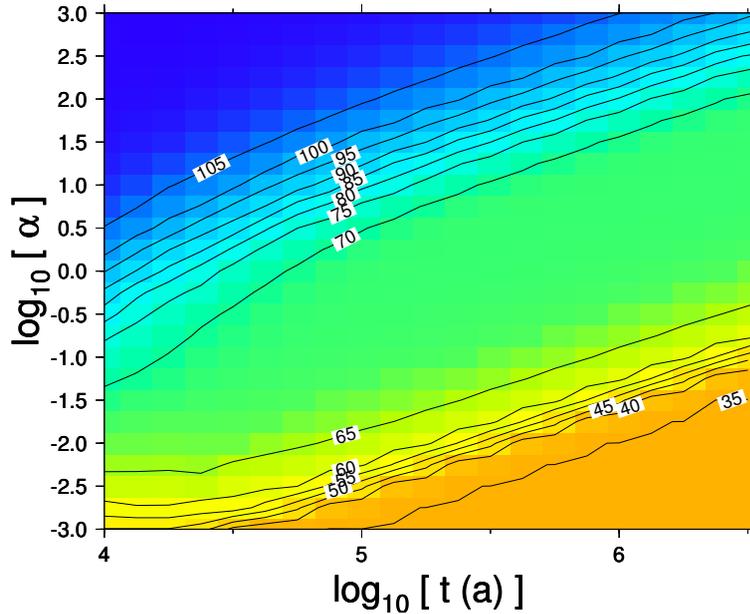


Abbildung 6.5: Effektive elastische Dicke  $h_e$  (Konturwerte in km) als Funktion der Zeit nach Heaviside'scher Belastung zum Zeitpunkt  $t = 0$  und des Verhältnisses  $\alpha = \tau_{LC}/\tau_{UM}$  für Erdmodell VC. Blau, grün und orange bezeichnen die Bereiche mit Dicken von 110 km, 68 km und 35 km.

variieren, bis  $n_{1/2}$  von Erdmodell  $EL_{LC}$  mit dem von Erdmodell A übereinstimmt<sup>1</sup> und diesen Wert mit  $h_e$  gleichsetzen.

3. Sofern die Lithosphäre von Modell A eine elastische Schichtung aufweist, kann diese in  $h_e(t)$  über (5.5) berücksichtigt werden.

Diese Analyse ist nur für Zeiten anwendbar, für die die Belastungsdauer größer ist als die maximal zu erwartende Relaxationszeit der Mode M0.

In Abb. 6.5 ist  $h_e$  ab  $10^4$  a als Konturwert dargestellt. Somit repräsentiert  $h_e = 110$  km den Fall gekoppelter Lithosphärenplatten,  $h_e = 68$  km gemäß (5.7) den Fall bezüglich der Scherkräfte entkoppelter Lithosphärenplatten und  $h_e = 35$  km vollständig entkoppelter Platten, somit also das Eintauchen der oberen Kruste in die duktile untere Kruste. Betrachten wir für ein bestimmtes  $\alpha$  die Entwicklung von  $h_e$ , so erkennen wir, dass für  $\alpha > 10$  die Prozesse in der Reihenfolge 3-2-4 ablaufen, für  $\alpha < 0.1$  in der Reihenfolge 2-3-4. Für  $\alpha < 10^{-3}$  können die Prozesse 2 und 3 sogar übersprungen werden.

Für Auflasten im Wellenzahlbereich  $n \simeq 100$  kann man die Prozesse 3 und 4 nicht trennen. Die Prozesse verlaufen etwa zeitgleich [ $\mathcal{O}(\tau_{MC}) \simeq \mathcal{O}(\tau_{MC})$ ]. Abbildung 6.2c auf S. 79 zeigt, dass in diesem Bereich der Beitrag von Mode MC zur Vertikalverschiebung ansteigt, während der von Mode M0 absinkt. Betrachten wir die Scherkerne der beiden Moden (Abschn. C.1, S. 127), können wir die Kopplung der beiden Prozesse besser erkennen. Gemäß (C.13) beschreibt die Größe  $\bar{K}_{LC}(s_i)$  den prozentualen Beitrag der DCL zur Variation der Relaxationszeit  $s_i^{-1}$  der entsprechenden Mode. Aus Abb. 6.6 auf der gegenüberliegenden Seite ist erkennbar, dass der

<sup>1</sup> Um die numerische Bestimmung der Relaxationsmoden zu umgehen, nutzen wir aus, dass die Determinante in diesem Fall ein Polynom zweiter Ordnung ist, so dass die beiden Relaxationszeiten von Modell  $EL_{LC}$  analytisch bestimmt werden können.

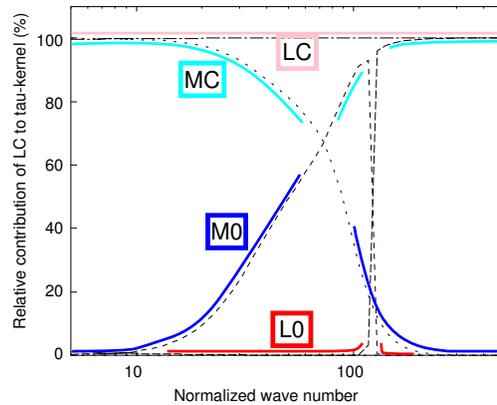


Abbildung 6.6: Beitrag der DCL zum Scherkern  $\bar{K}_{LC}$  als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$  für die farbig unterlegten Relaxationsmoden L0, M0, LC und MC (C.13).

Beitrag von  $\bar{K}_{LC}$  zur Mode MC bereits für  $n = 30$  erheblich abnimmt. Der Übergangsbereich ist damit weiter als erwartet und reicht von  $n = 30$  bis 100.

### 6.1.7 Verbiegung der Lithosphäre

Übersetzen wir den Parameter  $\alpha$  in Viskositäten, so finden wir zwei Viskositätsbereiche, in denen sich das Modell unterschiedlich verhält. Für Viskositäten der DCL, die größer als die des oberen Mantels sind (Modell  $VC^{\eta^+}$ ), verhält sich die Lithosphäre während der Relaxation der Spannungen im Mantel wie eine zusammenhängende elastische Platte mit der Gesamtdicke der geschichteten Lithosphäre:

$$h_e \simeq h_{UC} + h_{LC} + h_{ML} . \quad (6.2)$$

Erst wenn die Spannungen im Mantel relaxiert sind, werden auch die Spannungen in der DCL abgebaut, so dass die Spannungsfelder der elastischen Kruste und der Mantellithosphäre entkoppeln. In diesem Fall reagiert die Lithosphäre wie ein Modell, bei dem sich die Biegesteifigkeiten der einzelnen elastischen Schichten addieren. Entsprechend (5.7) wird die effektive elastische Dicke der Lithosphäre  $h_e$  erheblich herabgesetzt:

$$\frac{1}{3} \mu_e h_e^3 = \frac{1}{3} \mu_{UC} h_{UC}^3 + \frac{1}{3} \mu_{ML} h_{ML}^3 . \quad (6.3)$$

Ist die Viskosität in der DCL geringer als im Mantel (Modell VC), hängt der Relaxationsprozess darüberhinaus von der Wellenlänge der Anregung ab: Für große Wellenlängen werden die gesamte Lithosphäre und der obere Mantel deformiert. In diesem Fall verhält sich die Lithosphäre wie oben angesprochen. Für kleine Wellenlängen, die nicht den Mantel deformieren, sind Kruste und Mantel entkoppelt. Das an der Oberfläche beobachtete Deformationsverhalten wird allein durch die Biegesteifigkeit der elastischen Kruste bestimmt. Das unterschiedliche Verhalten zeigt sich vor allem für belastete Zustände, bei denen der kurzwellige Anteil, der durch den Lastrand erzeugt ist, sich für Modell VC im Wesentlichen auf die elastische Kruste beschränkt, während für Modell  $VC^{\eta^+}$  auch die Mantellithosphäre deformiert wird (Abb. 6.7 auf der folgenden Seite).

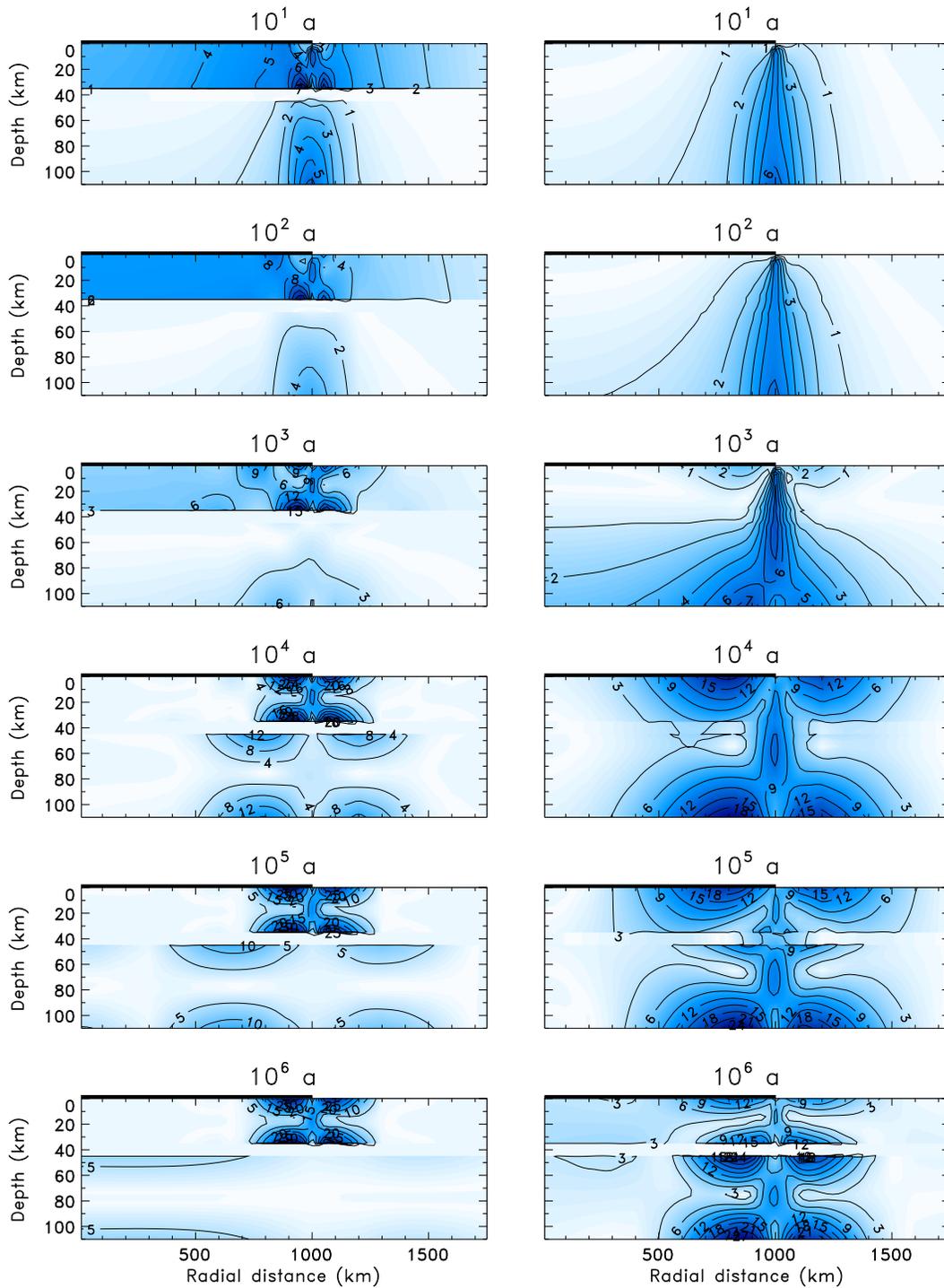


Abbildung 6.7: Maximale Scherspannung (Kontourwerte in MPa) als Funktion des radialen Abstandes und der Tiefe für die bezeichneten Zeitpunkte nach Anbringen einer Last mit rechteckigem Querschnitt, einem Lastradius von 1000 km und einem Lastdruck von 20 MPa. Die Berechnungen beziehen sich auf die Erdmodelle VC (links) und  $VC^{\eta^+}$  (rechts). Der schwarze Balken kennzeichnet die Ausdehnung der Last.

Dies beantwortet die Frage von [Wu \(1997\)](#), ob eine DCL für GIA in der Lage sei, die seismogene Oberkruste von den darunterliegenden Schichten abzukoppeln: Eine Entkopplung in den Scherspannungen findet statt, sofern  $10\eta_{LC} < \eta_{UM}$  gilt. Das Druckfeld wird im Wesentlichen übertragen, so dass zwei dünne Platten die Biegesteifigkeit und damit die effektive elastische Dicke der Lithosphäre  $h_e$  festlegen. Das lastinduzierte Druckfeld in der Oberkruste ist erst dann von der Mantellithosphäre abgekoppelt, wenn sich innerhalb der Kruste Isostasie eingestellt hat, also nach einigen Millionen Jahren ([Abb. 6.4a und b auf S. 82](#)). Durch den lateralen Materialtransport wird jedoch die Verbiegung der Mantellithosphäre reduziert. Damit verringern sich die Scherspannungen in der Mantellithosphäre mit der Wirkungsdauer der Last ([Abb. 6.7 auf der gegenüberliegenden Seite](#)). Um eine vollständige Entkopplung bereits innerhalb geologischer Zeiten zu erreichen, muss man jedoch unrealistische Parametrisierungen für die DCL annehmen.

### 6.1.8 Berücksichtigung der Asthenosphäre

Bisher wurde angenommen, dass die Lithosphäre einem homogenen Mantel aufliegt. In wieweit das diskutierte Verhalten auch auf eine komplexere Mantelstruktur übertragbar ist, soll nun genauer am Beispiel eines Erdmodelles mit Asthenosphäre unterhalb der kompetenten Mantellithosphäre betrachtet werden. Eine Asthenosphäre mit gegenüber dem oberen Mantel verminderter Viskosität wird von verschiedenen Autoren für Fennoskandien verwendet, um die Strandliniendaten des Baltikums mit einem lateral homogenen, geschichteten Erdmodell zu erklären (z. B. [Wolf, 1987](#); [Thoma & Wolf, 1999](#)). Grundlegend hat [Cathles \(1975\)](#) den Einfluss einer Asthenosphäre auf das Relaxationsverhalten des Erdmantels untersucht. Dabei hat er den Einfluss der Lithosphäre über deren Biegesteifigkeit parametrisiert. Da die Ergebnisse für eine dünne Platte im Wesentlichen auch auf die vollständige Lösung der Feldgleichungen übertragbar sind, erwarten wir, dass die DCL wiederum durch ihre Änderung der Biegesteifigkeit das Relaxationsverhalten beeinflusst.

Schicht	$\rho^{(0)}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Erdmodell AEL:				
Lithosphäre	3380	64.0	$\infty$	68.22
Asthenosphäre	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{19}$	100
Mantel	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$
Erdmodell AVC:				
Obere Kruste	2900	64.0	$\infty$	35
Untere Kruste	2900	64.0	$4.414 \cdot 10^{17}$	10
Mantellithosphäre	3380	64.0	$\infty$	65
Asthenosphäre	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{19}$	100
Mantel	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 6.4: Parameterwerte für Erdmodelle AEL und AVC.

Um das Verhalten eines Erdmodelles mit Asthenosphäre qualitativ zu beschreiben, verwenden wir Erdmodell AEL ([Tab. 6.4](#)). Im Unterschied zu Erdmodell EL weist es unterhalb der kompetenten Lithosphäre eine 100 km dicke Schicht herabgesetzter Viskosität auf. Betrachten wir das Relaxationspektrum dieses Erdmodelles ([Abb. 6.8a auf der folgenden Seite](#)), identifizieren wir wiederum die die Vertikalverschiebung dominierende Mode M0. Vergleichen wir den Verlauf der Moden mit dem entsprechenden Verlauf für ein Erdmodell EL ohne Asthenosphäre aber sonst identischen Parametern, erkennen wir folgende Charakteristika:

- $n = \mathcal{O}(10^0)$ : Wie zu erwarten verhalten sich die Moden für kleine Wellenzahlen gleich.

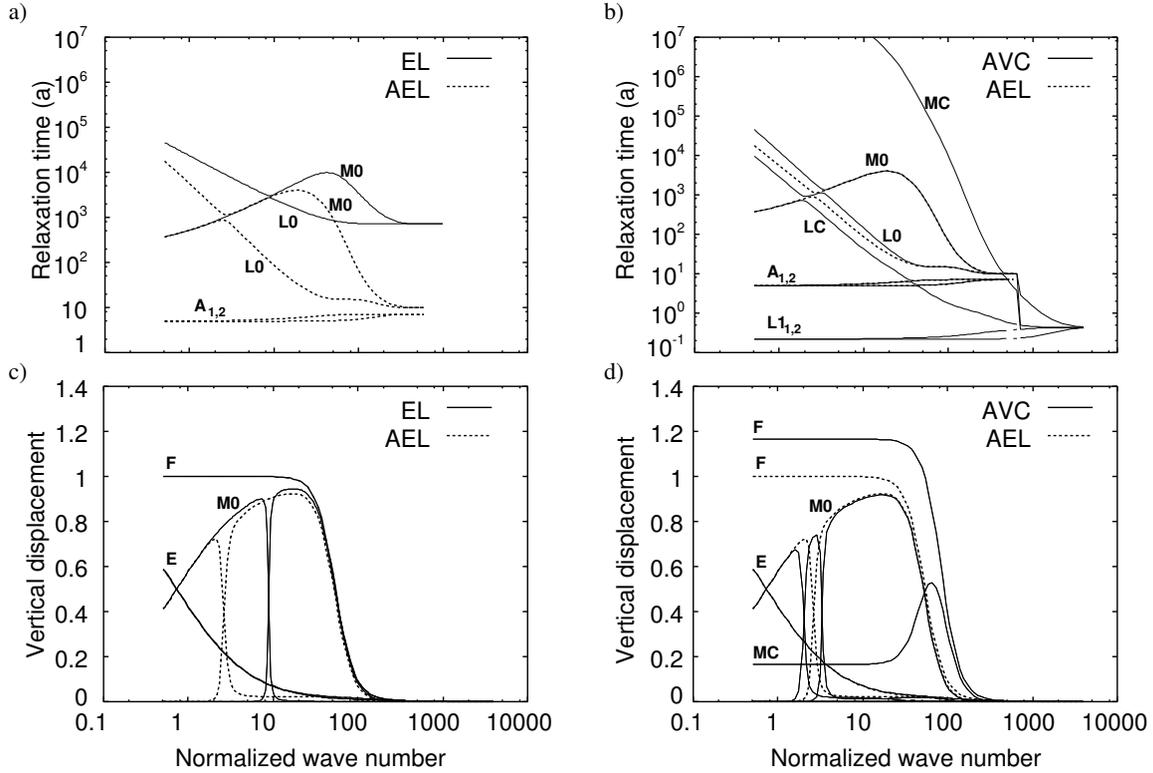


Abbildung 6.8: a) Relaxationszeitspektrum und c) vertikale Oberflächenverschiebung an der Oberfläche für Erdmodell EL (durchgezogen) und für Erdmodell AEL (gestrichelt) und entsprechend b) und d) für Erdmodell AVC (durchgezogen) und für Erdmodell AEL (gestrichelt). Die Relaxationsmoden L0–M0, A<sub>1,2</sub>, LC–MC und L<sub>1,2</sub> ihre Beiträge sowie der elastische Beitrag E und der inviskose Beitrag F sind bezeichnet.

Die Relaxationszeiten der Moden M0 verlaufen entsprechend denen der Mode M für einen homogenen viskoelastischen Halbraumes (z. B. [Wolf, 1997](#), S. 48) ([Abschn. C.2, S. 129](#)):

$$\tau_M \simeq \frac{\eta_{UM}}{\mu_{UM}} \left( 1 + \frac{2\mu_{UM} n}{\rho_{UM}^{(0)} g^{(0)} R_{\oplus}} \right). \quad (6.4)$$

- $n = \mathcal{O}(10^1)$ : Der Bereich, in dem die Lithosphäre das Verhalten der Mantelmode beeinflusst, zeichnet sich durch ein Maximum in der Relaxationszeit aus. Diese maximale Relaxationszeit von Mode M0 ist für Erdmodell AEL kleiner als für Erdmodell EL und tritt bei einer geringeren Wellenzahl auf, ein Charakteristikum, das auch auf ein Erdmodell EL bei dickerer Lithosphäre zutrifft. Vergrößern wir die Lithosphären Dicke  $h_L$ , oder reduzieren wir die Asthenosphärenviskosität  $\eta_A$ , so verschiebt sich die Lage des Maximums zu kleineren Wellenzahlen und sein Wert verringert sich. Dieses Verhalten zeigt, dass man in bestimmten Grenzen die Lithosphären Dicke und die Asthenosphärenviskosität anheben kann, ohne dass sich das Verhalten des Erdmodelles wesentlich ändert ([Calthles, 1975](#), S. 184ff; [Wolf, 1986](#)).
- $n = \mathcal{O}(10^2)$ : Obwohl die Verschiebung des Maximums auf eine dickere Lithosphäre hindeutet, sind die inviskosen Vertikalamplituden der beiden Modelle identisch. Schätzt man

die Biegesteifigkeit mittels (5.3) ab, erhält man im Gegensatz zur Abschätzung über das Relaxationszeitenspektrum  $h_L$ .

- $n = \mathcal{O}(10^3)$ : Der Grenzwert für große Wellenzahlen, den die Relaxationszeiten der Moden M0 und L0 erreichen, liegt für Erdmodell AEL in der Größenordnung der Maxwell-Zeit der Asthenosphäre von  $\sim 10$  a und ist damit sehr viel geringer als für Erdmodell EL ( $\sim 714$  a):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau = \frac{\eta_A}{\mu_A} \left( 1 + \frac{\mu_A}{\mu_L} \right). \quad (6.5)$$

Die Lithosphäre von Erdmodell AVC stimmt mit der von Erdmodell VC überein, und die Dicke von Erdmodell AEL ist so gewählt, dass sie der Biegesteifigkeit von Erdmodell VC gemäß (6.3) entspricht (Tab. 6.4 auf S. 87). In Abb. 6.8b auf der gegenüberliegenden Seite erkennen wir dass die Moden M0 der beiden Erdmodelle nicht unterscheidbar sind. Wir folgern daraus, dass die Hypothese zutrifft, die DCL wirke weitgehend über die Biegesteifigkeit der Lithosphäre ein. Mode MC von Erdmodell AVC ist für die getroffene Parameterwahl deutlich von den übrigen Moden abgesetzt. Das Gleiche gilt für die zusätzlichen Lithosphärenmoden L1,2 und LC.

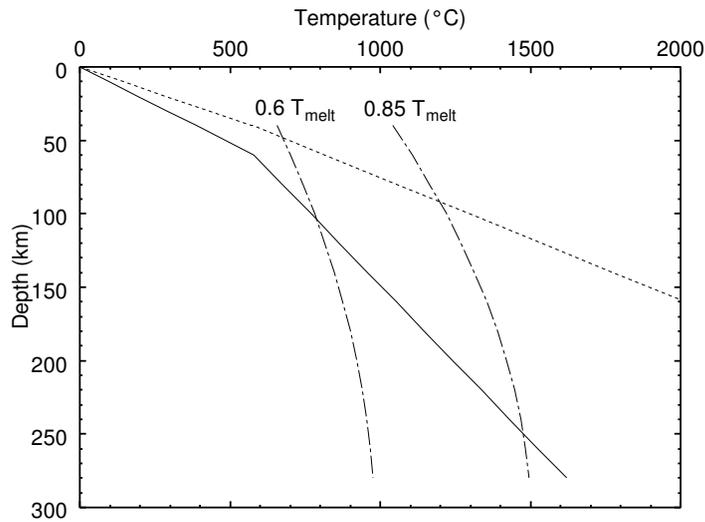


Abbildung 6.9: Typische Geothermen für Fennoskandien: durchgezogen für das zentralbaltische Schild nach Kukkonen & Peltonen (1999) und gestrichelt für Südschweden nach Pasquale *et al.* (1991). Mit Strichpunkten sind die Unterseiten der rheologischen Lithosphäre bzw. der thermischen Lithosphäre dargestellt, die über die Solidustemperatur mittels  $0.6 T_{\text{melt}}$  bzw.  $0.85 T_{\text{melt}}$  abgeschätzt sind.

## 6.2 Störungen bei viskoelastischer Mantellithosphäre

### 6.2.1 Definition der Lithosphärenbasis

Die Definition der Lithosphärenbasis ist nicht eindeutig. Die *rheologische* Lithosphäre reicht bis in eine Tiefe, ab der auch für geologische Zeiten ( $> 10^7$  a) Scherspannungen durch viskoses Kriechen nicht mehr abgebaut werden (Ranalli, 1987, S. 230). Üblich ist auch, ihre Basis über die dort herrschende Temperatur  $T_{\text{rheol}} := 0.6 T_{\text{melt}}$  abzuschätzen (Meissner & Vetter, 1979). Die wesentlich dickere *thermische* Lithosphäre stellt die äußere Schicht des Planeten dar, in der der Wärmetransport rein konduktiv erfolgt.

### 6.2.2 Parametrisierung des Erdmodelles

Wir verwenden als Abschätzung für die Basis der thermischen Lithosphäre  $T_{\text{lid}} := 0.85 T_{\text{melt}}$  (Ranalli, 1987, S. 163). Die Solidustemperatur  $T_{\text{melt}}$  des Materials hängt vom Umgebungsdruck ab. Die Parametrisierung lautet für Mantelperidotit nach Vlaar *et al.* (1994):

$$T_{\text{melt}}(p) = 1136 + 134.2p - 6.581p^2 + 0.1054p^3, \quad (6.6)$$

wobei  $p$  in GPa und  $T_{\text{melt}}$  in °C angegeben werden. Abb. 6.9 zeigt die Variation der Geothermen, die wir in Fennoskandien antreffen, für das zentralbaltische Schild (Kukkonen & Peltonen, 1999) und für Südschweden (Pasquale *et al.*, 1991). Die Schnittpunkte mit den beiden aus der Solidustemperatur berechneten Kurven definieren die Basis der rheologischen bzw. thermischen Lithosphäre.

Da die glazial-isostatische Ausgleichsbewegung auf Zeitskalen von  $10^4$ – $10^7$  a abläuft, erwarten wir, dass die effektive Lithosphärendicke  $h_e$  zwischen der rheologischen und der thermischen Lithosphäre liegt und dass ihr Wert von der Zeitskala des Belastungsprozesses abhängt. Um  $h_e$

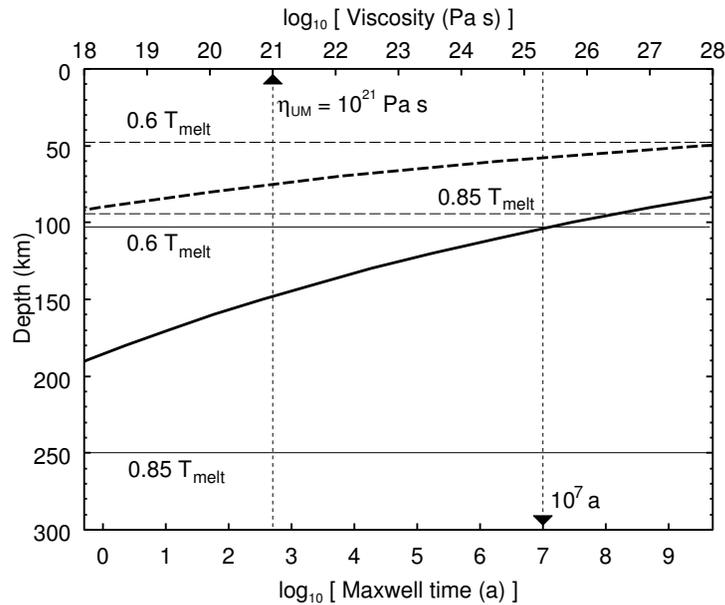


Abbildung 6.10: Effektive Viskositäten als Funktion der Tiefe gemäß (6.8): durchgezogen für das zentralbaltische Schild nach Kukkonen & Peltonen (1999) und gestrichelt für Südschweden nach Pasquale *et al.* (1991). Horizontal und dünn sind in gleicher Strichart die Tiefen markiert, in denen sich  $0.6 T_{\text{melt}}$  bzw.  $0.85 T_{\text{melt}}$  mit den entsprechenden Geothermen schneiden (Abb. 6.9 auf der gegenüberliegenden Seite). Vertikal, dünn und gepunktet sind die stationäre Viskosität des Erdmantels,  $10^{21}$  Pa s, und  $10^7$  a als untere Grenze für die Dauer geologischer Prozesse eingezeichnet. Die untere Skala zeigt die den Viskositäten entsprechenden Maxwell-Zeiten.

abzuschätzen, machen wir folgenden Ansatz: Die maximalen Scherspannungen an der Basis der elastischen Lithosphäre liegen für die betrachteten Eislasten bei 10 MPa (Abb. 6.14 auf S. 94). Gehen wir davon aus, dass die Scherspannungen duktil abgebaut werden, hat die inelastische Verzerrungsrate die empirische Form (z. B. Regenauer-Lieb & Yuen, 1998)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} = A I_2^{n-1} t_{ij}^{\text{d}} e^{-E/(RT)}. \quad (6.7)$$

Hierbei sind  $I_2$  die zweite Invariante des Spannungstensors,  $t_{ij}^{\text{d}}$  der Deviator des Spannungstensors  $t_{ij}^{(\delta)}$ ,  $T$  die lokale Temperatur in K und  $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  die allgemeine Gaskonstante. Weiterhin sind  $A = 2.5 \cdot 10^{-25} \text{ Pa}^{-n} \text{ s}^{-1}$ ,  $E = 530 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}$  sowie  $n = 3.5$  Standardwerte für Olivin mit Dislokationskriechen (z. B. Ranalli, 1987, S. 203). Mit (6.7) kann man in Abhängigkeit vom Spannungszustand  $I_2$  eine effektive Viskosität als Funktion der Temperatur ableiten:<sup>1</sup>

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{1}{A} I_2^{1-n} e^{E/(RT)}. \quad (6.8)$$

Modellieren wir an Hand von  $\eta_{\text{eff}}$  die Spannungsrelaxation mit Hilfe der Maxwell-Viskoelastizität, ist  $\epsilon_{ij}^{\text{pl}}$  gleich dem Deviator der Verzerrung.

Abb. 6.10 zeigt die sich ergebenden Viskositäten als Funktionen der Tiefe. Horizontal sind zusätzlich die Basen der rheologischen und thermischen Lithosphäre eingezeichnet. Für die flache

<sup>1</sup> Allgemein ist die effektive Viskosität über die herrschende Kriechrate definiert.

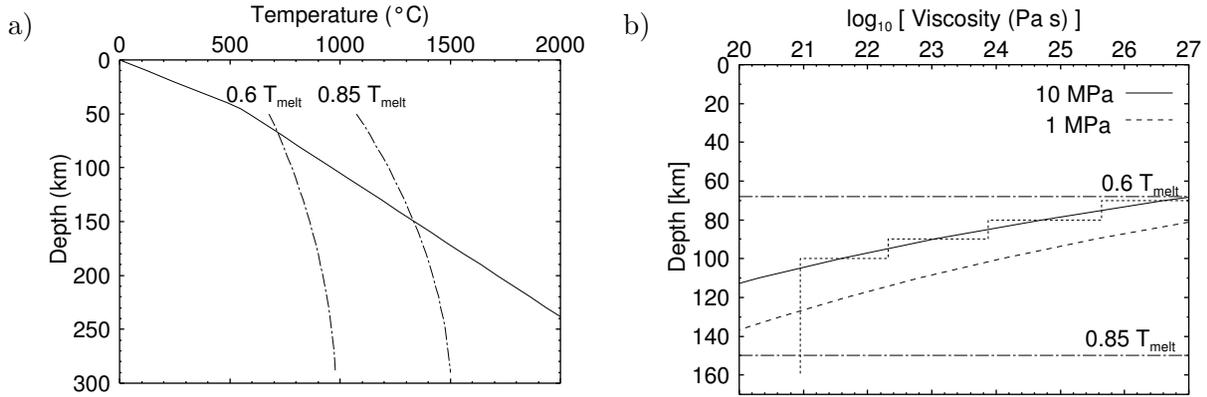


Abbildung 6.11: a) Mittlere Geotherme für Fennoskandien nach Pasquale *et al.* (1991) (durchgezogen), Basis der rheologischen ( $0.6 T_{\text{melt}}$ ) bzw. der thermischen Lithosphäre ( $0.85 T_{\text{melt}}$ ) (gestrichpunktet). b) Effektive Viskosität als Funktion der Tiefe für die in Abb. 6.9 auf S.90 dargestellte Geotherme mit einer angenommenen Scherspannung von 10 MPa (durchgezogen) und von 1 MPa (gestrichelt). Die gestrichelte Treppenfunktion stellt die gewählte Diskretisierung dar, Tab. 6.5. Horizontal sind die Isothermen  $0.6 T_{\text{melt}}$  und  $0.85 T_{\text{melt}}$  eingezeichnet.

Geotherme stimmt die Tiefe, bei der eine Maxwell-Zeit von  $10^7$  a erreicht wird, in etwa mit der Tiefe der rheologischen Isotherme,  $0.6 T_{\text{melt}}$ , überein. Für die steile Geotherme ergibt sich in der Tiefe der rheologischen Isotherme eine Maxwell-Zeit von  $> 10^9$  a. Die Abschätzung mit  $0.6 T_{\text{melt}}$  unterschätzt somit die Dicke der rheologischen Lithosphäre um  $\simeq 10$  km. Der Wert der Mantelviskosität ( $10^{21}$  Pa s) stellt die Untergrenze für diese Abschätzung dar. Kleinere Werte müssen nicht betrachtet werden, da die Scherrelaxation auf Zeitskalen geringer als  $10^2$  a quasi instantan erfolgt.

Für die weitere Modellierung verwenden wir eine Geotherme, die zwischen diesen Grenzfällen liegt. Nach Pasquale *et al.* (1991) liegt der mittlere Temperaturgradient im oberen Bereich des Mantels bei  $7.5 \text{ W km}^{-1}$ , die Temperatur an der Krustenbasis bei etwa  $550^\circ\text{C}$  und ihre mittlere Tiefe bei 45 km. Mit diesem Temperaturverlauf (Abb. 6.11a) ergibt sich für die erwarteten Scherspannungen von 10 MPa der in Abb. 6.11b gezeigte Viskositätsverlauf, der für die Modellierung mit 10 km-Tiefenintervallen diskretisiert wurde. Der Viskositätswert für die jeweiligen Schicht wurde logarithmisch gemäß  $(\lg \eta_1 + \lg \eta_2)/2$  gemittelt. Diese Diskretisierung berücksichtigt das

Schicht	$\rho^{(0)}$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )	$\mu_0$ (GPa)	$\eta$ (Pa s)	$h$ (km)
Kruste	2900	44.0	$\infty$	45
Mantellithosphäre	3380	64.0	$\infty$	25
	3380	64.0	$4.4 \cdot 10^{25}$	10
	3380	64.0	$7.5 \cdot 10^{23}$	10
	3380	64.0	$2.1 \cdot 10^{22}$	10
Oberer Mantel	3380	145.0	$1.0 \cdot 10^{21}$	$\infty$

Tabelle 6.5: Parameterwerte für Erdmodell VL.

rheologische Verhalten der fennoskandischen Lithosphäre realistischer als die in Klemann & Wolf (1998) gewählte Form, in der von reinem Diffusionskriechen ausgegangen wurde.

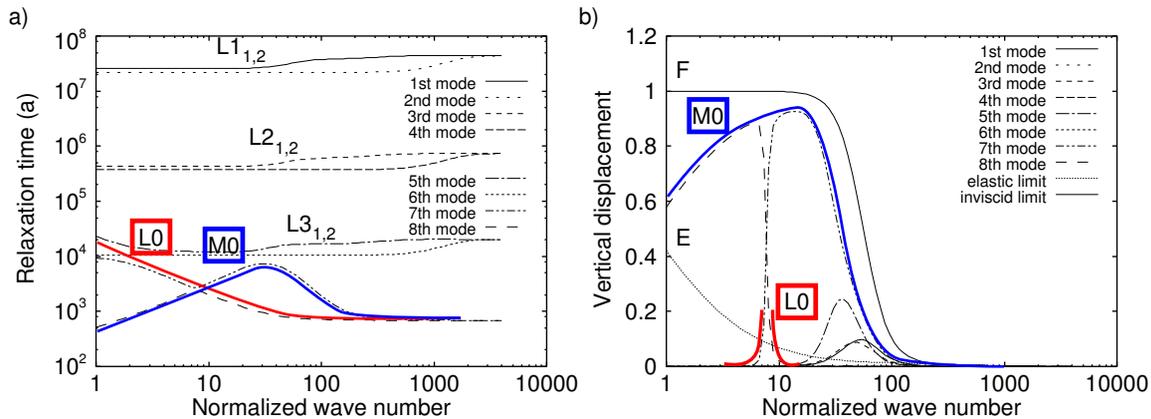


Abbildung 6.12: a) Relaxationszeitenspektrum und b) Vertikalverschiebung an der Oberfläche für Erdmodell VL als Funktion der normierten Wellenzahl  $n$ . Verschiedene Stricharten unterscheiden die Relaxationszeiten der Moden  $L_{1,2}$ ,  $L_{2,2}$  und  $L_{3,2}$  und deren Beiträge nach ihrem Auftreten im Spektrum, den elastischen Beitrag E, die Summe der Beiträge  $\Sigma$  und den inviskosen Beitrag F. Farblich unterlegt sind die Relaxationszeiten der Moden L0–M0 sowie ihre Beiträge. Die Verschiebungen sind auf  $\Sigma^R/\rho^{(0)}$  normiert.

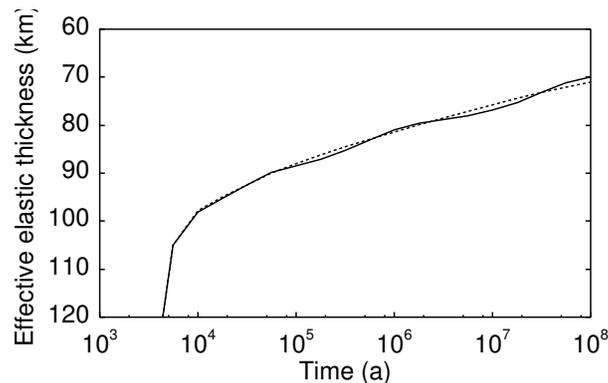


Abbildung 6.13: Zeitliche Entwicklung der effektiven elastischen Dicke  $h_e$  nach Heaviside'scher Belastung für Erdmodell VL (durchgezogen) und für eine mit 5 km-Tiefenintervallen feiner diskretisierte Lithosphäre (gestrichelt).

### 6.2.3 Relaxationsmoden des Erdmodelles

Das Spektrum des Erdmodelles (Abb. 6.12) zeigt neben den Mantelmoden M0 und L0 entsprechend den drei viskoelastischen Schichten in der Lithosphäre drei als Lithosphärenmoden bezeichnete Paare  $L_{1,2}$ ,  $L_{2,2}$  und  $L_{3,2}$  (Wolf, 1985b). Die Lithosphärenmoden weisen nur geringe Beiträge zur Vertikalverschiebung auf, verschieben aber sukzessiv den für die Verbiegung einer elastischen Platte charakteristischen Wendepunkt  $k_{1/2}$  des inviskosen Beitrages zu größeren Wellenzahlen. Abb. 6.13 zeigt dieses Verhalten anhand der effektiven elastischen Dicke  $h_e$  (Abschn. 5.1, S. 68) für eine Heaviside'sche Belastung als Funktion der Belastungsdauer, die, wie auf S. 83 skizziert, berechnet wurde. Die gestrichelte Kurve gibt dabei  $h_e$  wieder, sofern man die Viskositäten über 5 km-Tiefenintervalle feiner diskretisiert. Es fällt auf, dass  $h_e$  zum Ende der glazial-isostatischen Ausgleichsbewegung ( $10^4$  a) geringer als 100 km ist und nach  $10^7$  a auf 75 km abgesunken ist.

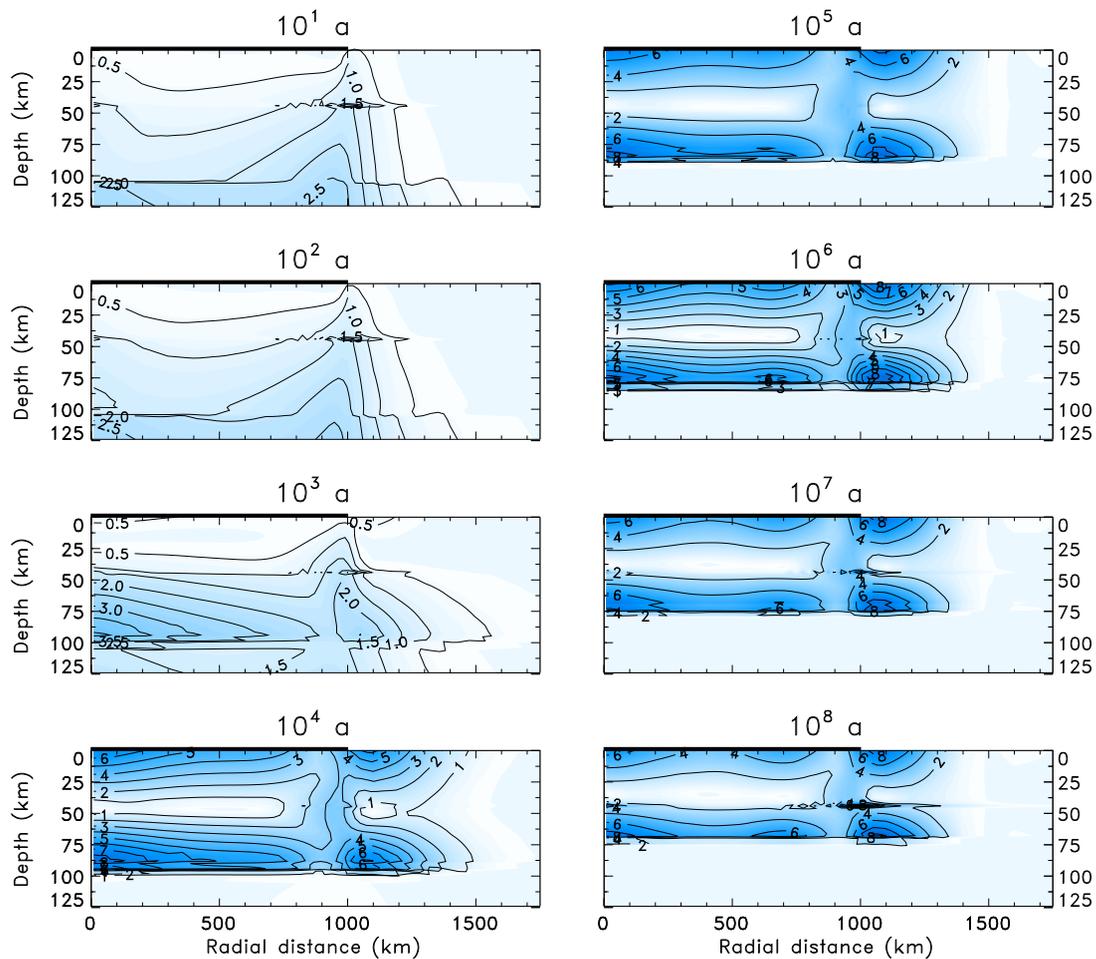


Abbildung 6.14: Maximale Scherspannung (Kontourwerte in MPa) als Funktion des radialen Abstandes und der Tiefe für die bezeichneten Zeitpunkte nach Anbringen einer Last mit parabolischem Querschnitt, einem Lastradius von 1000 km und einem Lastdruck im Zentrum von 20 MPa. Die Berechnungen beziehen sich auf das Ermodell VL. Der schwarze Balken kennzeichnet die Ausdehnung der Last.

#### 6.2.4 Verbiegung der Lithosphäre

Die Entwicklung der Spannungsverteilung innerhalb der Lithosphäre (Abb. 6.14) bestätigt dieses Verhalten. Im Zeitraum bis  $10^4$  a nach Beginn der Belastung relaxieren die Scherspannungen im oberen Mantel. Die Diskontinuität bei 45 km kennzeichnet dabei den Materialkontrast zwischen Kruste und Mantel. Danach hat sich in der Lithosphäre die Spannungsverteilung für eine gebogene Platte ausgebildet. Der Zeitraum danach ist durch die Relaxation der unteren Bereiche der Mantellithosphäre bestimmt, die den elastischen Bereich der Lithosphäre sukzessiv reduziert. Die untere Grenze des elastischen Bereiches stimmt dabei mit dem jeweiligen Wert für die effektive elastische Dicke in Abb. 6.13 auf der vorherigen Seite überein.

## 6.3 Resumé

Die Annahme einer duktilen Schicht in der Kruste (DCL) hat zu folgenden Ergebnissen geführt:

- Die Berücksichtigung einer DCL erzeugt vier weitere Relaxationsmoden, deren physikalische Bedeutung diskutiert worden ist. Der Auftriebsmode MC kommt die größte Bedeutung zu. Sie beschreibt den Auftrieb durch die Dichtedifferenz zwischen Mantel und Kruste sowie den lateralen Materialtransport innerhalb der DCL.
- Der Viskositätskontrast zwischen DCL und oberem Mantel, dargestellt als Quotient der Maxwell-Zeiten,  $\alpha := \tau_{LC}/\tau_{UM}$ , parametrisiert die Scherkopplung der elastischen Platten während der Relaxation des oberen Mantels. Für  $\alpha > 10$  sind obere Kruste und Mantellithosphäre gekoppelt, für  $\alpha < 0.1$  sind sie entkoppelt.

Voraussetzung für die Modellierungen war ein lineares Materialgesetz. Die Annahme eines realistischen nichtlinearen Kriechgesetzes modifiziert den lateralen Materialtransport derart, dass die Kriechraten mehr auf den Lastrand fokussiert sind (Bott, 1999). Da die induzierten Scherspannungen klein sind, so lange oberer Mantel und Lithosphäre gekoppelt sind (Abb. 6.7 rechts für  $< 10^3$  a auf S. 86), und da für das Spannungsmuster einer elastischen Platte die Scherspannungen in der Mitte der Platte gering sind (Abb. 6.7 rechts für  $10^4$  a auf S. 86), ist zu erwarten, dass sich die Spannungsrelaxation zu höheren effektiven Viskositäten verschiebt. Um eine realistischere Spannungsverteilung zu modellieren, sollte man daher eine nichtlineare Rheologie, die für die Kruste gefordert wird, verwenden.

Ausgehend von einer nichtlinearen Rheologie haben wir die Viskositätsabnahme mit der Tiefe in der Mantellithosphäre als Maxwell-viskoelastische Schichtung parametrisiert. Dies hat zu folgenden Ergebnissen geführt:

- Die Parametrisierung der Mantellithosphäre zeigt, dass auch im Zentralbereich des Fennoskandischen Schildes  $h_e$  einen Wert von 160 km nicht übersteigt.
- Für einen mittleren Temperaturgradienten bleibt  $h_e$  auch auf der Zeitskala der glazialisostatischen Ausgleichsbewegung unter 100 km.

Um mit diesem Ansatz eine realistische Spannungsverteilung an der Basis der Lithosphäre zu modellieren, reicht die Annahme eines linearen Materialgesetzes nicht aus. Stattdessen sollte die gesamte Spannungsentwicklung nichtlinear entsprechend Dislokationskriechen berechnet werden.



## Ausblick

Ausgehend von lateral homogener, ebener Geometrie wurde das Deformationsverhalten der Lithosphäre gegenüber einer Oberflächenlast untersucht. Dabei zeigte sich, dass die viskoelastische Schichtung der Lithosphäre einen erheblichen Einfluss auf das Deformationsverhalten hat, der sich in einer Änderung ihrer Biegesteifigkeit zeigt.

Neuere Arbeiten zeigen, dass laterale Heterogenitäten in der Lithosphärendicke und der Asthenosphärenviskosität das Deformationsverhalten der Erde in Beziehung auf glaziale Lasten beeinflussen. Dabei ist zu beachten, dass die pleistozänen Vereisungen häufig mit tektonischen Einheiten assoziiert sind. Kaufmann *et al.* (2000) zeigten, dass der Einfluss lateraler Heterogenitäten auf Strandliniendaten im Bereich von Nordsee und Atlantik signifikant ist, im Zentralbereich der GIA (Ostsee) dagegen gering. Martinec *et al.* (2001b) zeigten mit einem analytischen Ansatz, dass die Lithosphäre im Bereich des Lastrandes die Biegesteifigkeit dominiert. Diese Arbeiten legen somit nahe, laterale Heterogenitäten bei der Modellierung der GIA zu berücksichtigen. Da die Biegesteifigkeit aber der dominante Parameter bleibt, der die elastischen Eigenschaften der Lithosphäre beschreibt, können die Ergebnisse aus dieser Arbeit auf eine lateral heterogene Lithosphäre übertragen werden.



# A

---

## Komponenten verschiedener Feldgrößen in Zylinderkoordinaten

Zunächst folgt eine Zusammenstellung der benötigten Beziehungen zwischen Bessel-Funktionen und deren Integralen (Abschn. A.1, S. 99) sowie die Definition der Zylinderkoordinaten (Abschn. A.2, S. 100). Danach werden die Komponenten verschiedener Feldgrößen für eine spektrale Last bestimmt (Abschn. A.3, S. 100). Zum Schluss werden die Hankel-Transformierten einiger Lastquerschnitte berechnet (Abschn. A.4, S. 104).

### A.1 Bessel-Funktionen

Definitionen:

$$J_m := J_m(k r), \quad (\text{A.1})$$

$$J'_m := \partial_x J_m(x), \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{F} := \partial_z F(k, z). \quad (\text{A.3})$$

Die ganzzahligen Bessel-Funktion erster Art,  $J_m(x)$ , ergeben ein vollständiges Lösungssystem der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + (x^2 - m^2) w = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} w \text{ beschränkt für } x \rightarrow 0, \\ m \text{ ganzzahlig.} \end{array} \quad (\text{A.4})$$

Darstellung als Potenzreihe:

$$J_n(x) = (x/2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+n)!} [-(x/2)^2]^k. \quad (\text{A.5})$$

Differentialbeziehungen:

$$J'_0 = -J_1, \quad (\text{A.6})$$

$$J'_1 = J_0 - \frac{1}{k r} J_1. \quad (\text{A.7})$$

Dirac'sche Deltafunktion:

$$\delta(k - k') = k \int_0^{\infty} J_m(k r) J_m(k' r) r dr. \quad (\text{A.8})$$

Integralbeziehungen:

$$\int_0^{\infty} J_0(k' r) J_0(k r) r dr = \frac{1}{k} \delta(k' - k), \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^{\infty} J_1(k r) J_0(k r) dr = \frac{1}{2k}, \quad (\text{A.10})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_1(k r) J_1(k r) dr = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.11})$$

Alle Beziehungen sind [Abramowitz & Stegun \(1964\)](#) entnommen.

## A.2 Definition der Zylinderkoordinaten

Die für den inneren Halbraum gewählte Orientierung von  $X_3$  nach unten erlaubt die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} X_1 &= r \cos \varphi, \\ X_2 &= r \sin \varphi, \\ X_3 &= z \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

zwischen kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

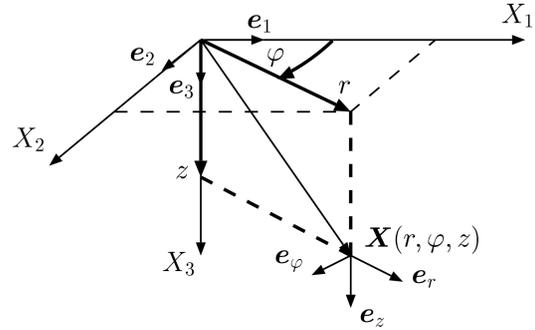


Abbildung A.1: Definition des Zylinderkoordinatensystems.

## A.3 Feldgrößen für eine spektrale Last

Im Folgenden werden die Komponenten von Feldgrößen für die axialsymmetrische Lastverteilung

$$\sigma_1(r) = J_0(k r) \quad (\text{A.14})$$

berechnet. Die Hankel-Transformierte dieser Lastverteilung ergibt sich mit der Dirac'schen Deltafunktion in der Form [\(A.8\)](#) zu

$$\Sigma_1(k) = \frac{1}{k} \delta(k' - k). \quad (\text{A.15})$$

Damit folgt für den Verschiebungsvektor [\(3.32\)](#) für eine spektrale Last wie erwartet zu

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, z, s) = \mathbf{e}_z \tilde{W}(k, z, s) J_0(k r) - \mathbf{e}_r \tilde{U}(k, z, s) J_1(k r). \quad (\text{A.16})$$

### A.3.1 Verzerrung

Für Symmetrie bezüglich  $\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, & \varepsilon_{\varphi z} &= 0, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} u_r, & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} (\partial_z u_r + \partial_r u_z), \\ \varepsilon_{zz} &= \partial_z u_z, & \varepsilon_{r\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Für das Lastspektrum (A.15) gilt mit (A.7) und (A.16)

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr} &= -k \tilde{U} \left( \mathbf{J}_0 - \frac{1}{kr} \mathbf{J}_1 \right), & \tilde{\varepsilon}_{\varphi z} &= 0, \\ \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{r} \tilde{U} \mathbf{J}_1, & \tilde{\varepsilon}_{rz} &= -\frac{1}{2} (\dot{\tilde{U}} + k \tilde{W}) \mathbf{J}_1, \\ \tilde{\varepsilon}_{zz} &= \dot{\tilde{W}} \mathbf{J}_0, & \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Um die  $\partial_z$ -Terme in (A.7) zu vermeiden, verwenden wir die zugehörigen Komponenten der vertikalen Traktion gemäß (3.36) und (3.37):

$$\tilde{t}_{rz}^{(\delta)}(r, z) = -\tilde{R} \mathbf{J}_1, \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{t}_{zz}^{(\delta)}(r, z) = \tilde{T} \mathbf{J}_0. \quad (\text{A.20})$$

Mit (A.19) und der  $rz$ -Komponente des Cauchy'schen Spannungstensors

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(\delta)} = \tilde{\lambda} \operatorname{spur} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{1} + 2\tilde{\mu} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.21})$$

gilt

$$\tilde{\varepsilon}_{rz} = -\frac{\tilde{R}}{2\tilde{\mu}} \mathbf{J}_1, \quad (\text{A.22})$$

so dass

$$\dot{\tilde{U}} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \tilde{R} - k \tilde{W}. \quad (\text{A.23})$$

Mit (A.19), der  $zz$ -Komponente von (A.21),

$$\tilde{t}_{zz}^{(\delta)} = \tilde{\lambda} \operatorname{spur} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\tilde{\mu} \tilde{\varepsilon}_{zz}, \quad (\text{A.24})$$

und

$$\tilde{d} = \operatorname{spur} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\dot{\tilde{W}} - k \tilde{U}) \mathbf{J}_0 \quad (\text{A.25})$$

ergeben sich

$$\dot{\tilde{W}} = \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \left( \tilde{T} + k \tilde{\lambda} \tilde{U} \right), \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{d} = \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \left( \tilde{T} - 2k \tilde{\mu} \tilde{U} \right) \mathbf{J}_0, \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \left( \tilde{T} + k \tilde{\lambda} \tilde{U} \right) \mathbf{J}_0. \quad (\text{A.28})$$

### A.3.2 Deviator der Verzerrung

Alternativ zu (3.60) kann man die Laplace-transformierte Materialgleichung getrennt nach hydrostatischem und deviatorischem Anteil der Verzerrung in der Form

$$\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} = \kappa \tilde{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} \tilde{\varepsilon}_{ij}^d \quad (\text{A.29})$$

schreiben, wobei

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^d = \tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.30})$$

den Deviator darstellt. Seine Komponenten in Zylinderkoordinaten für eine spektrale Last ergeben sich unmittelbar durch Einsetzen von (A.18) und (A.27). Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass direkt zwischen reiner Dilatation und reiner Scherung unterschieden wird.

### A.3.3 Spannung

Durch Einsetzen von (A.18), (A.19), (A.20) und (A.27) in (A.21) ergeben sich für das Lastspektrum (A.14):

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{rr}^{(\delta)} &= \tilde{p}^{(\delta)} + 2k\tilde{\mu}\tilde{U} \left( \frac{1}{kr} J_1 - J_0 \right), & \tilde{t}_{\varphi z}^{(\delta)} &= 0, \\ \tilde{t}_{\varphi\varphi}^{(\delta)} &= \tilde{p}^{(\delta)} - 2k\tilde{\mu}\tilde{U} \frac{1}{kr} J_1, & \tilde{t}_{rz}^{(\delta)} &= -\tilde{R} J_1, \\ \tilde{t}_{zz}^{(\delta)} &= \tilde{T} J_0, & \tilde{t}_{r\varphi}^{(\delta)} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

wobei

$$\tilde{p}^{(\delta)} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \left( \tilde{T} - 2k\tilde{\mu}\tilde{U} \right) J_0. \quad (\text{A.32})$$

### A.3.4 Potentialbeiträge des inkrementiellen Zustandes

Das Integral

$$L(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_+} \mathbf{T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* dv^{(0)} \quad (\text{A.33})$$

stellt das innere Produkt der Bewegungsgleichung  $\mathbf{T} \mathbf{u}$ , wobei  $\mathbf{T}$  der Differentialoperator von (3.1) ist, mit der Verschiebung  $\mathbf{u}$  dar. Der \* bezeichnet die konjugiert komplexe Größe, die wir im Folgenden unterdrücken. Für ein elastisches Materialgesetz führt es auf die kanonische Form der Energiegleichung (Woodhouse, 1976). Für die Laplace-transformierte Bewegungsgleichung stellt das Funktional nur formal eine Energie dar, wir ersetzen deshalb den Begriff Energie durch Potential. Schreiben wir für Term  $\mathbf{I}$  in (3.1) die Divergenz der Cauchy'schen Spannung, liefert das innere Produkt

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_+} \tilde{t}_{ij}^{(\delta)} \tilde{u}_i dv^{(0)} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_+} (\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} \tilde{u}_i)_{,j} dv^{(0)} - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_+} \tilde{t}_{ij}^{(\delta)} \tilde{u}_{i,j} dv^{(0)}. \quad (\text{A.34})$$

Anwendung des Gauß'schen Satz auf das zweite Integral und Berücksichtigung der Regularitätsbedingung (3.13) reduziert die Integration auf  $\partial^I \mathcal{X}_+^{(1)}$ , so dass die Traktion mit Hilfe der Randbedingung (2.139) substituiert werden kann:

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial^I \mathcal{X}_+^{(1)}} \tilde{t}_{ij}^{(\delta)} \tilde{u}_i n_j^{(0)} da^{(0)} = \frac{1}{2} \int_{\partial^I \mathcal{X}_+^{(1)}} g^{(0)} \tilde{\sigma}^R \delta_{i3} \tilde{u}_i da^{(0)}, \quad (\text{A.35})$$

$n_j^{(0)}$  ist nach innen orientiert. Im dritten Integral von (A.34) nutzen wir die Symmetrie von  $t_{ij}$ , so dass  $\tilde{t}_{ij} \tilde{u}_{i,j} = \tilde{t}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}$  gilt. Mit (A.29) und (A.30) ergibt sich dann folgendes Integral bezüglich der viskoelastischen Potentialdichte (z. B. Landau & Lifschitz, 1989, S. 12):

$$- \int_{\mathcal{X}_+} \left[ \frac{\kappa}{2} (\tilde{\varepsilon}_{kk})^2 + \tilde{\mu} \tilde{\varepsilon}_{ij}^d \tilde{\varepsilon}_{ij}^d \right] dv^{(0)}. \quad (\text{A.36})$$

Entsprechend erhalten wir für Term **II** in (3.1)

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_+} \rho^{(0)} g^{(0)} \delta_{j3} \tilde{u}_{j,i} \tilde{u}_i dv^{(0)} \quad (\text{A.37})$$

und für den Term **III** in (3.1)

$$- \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_+} \rho^{(0)} g^{(0)} \delta_{j3} \tilde{u}_j \tilde{u}_{i,i} dv^{(0)}. \quad (\text{A.38})$$

Multiplikation von (A.35)–(A.38) mit  $-1$  ergibt

$$\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\rho = 0, \quad (\text{A.39})$$

wobei

$$\mathcal{E}_C := - \frac{1}{2} \int_{\partial^1 \mathcal{X}_+^{(1)}} g^{(0)} \tilde{\sigma}^R \delta_{i3} \tilde{u}_i da^{(0)}, \quad (\text{A.40})$$

$$\mathcal{E}_\kappa := \int_{\mathcal{X}_+} \frac{\kappa}{2} (\tilde{\varepsilon}_{kk})^2 dv^{(0)}, \quad (\text{A.41})$$

$$\mathcal{E}_\mu := \int_{\mathcal{X}_+} \tilde{\mu} \tilde{\varepsilon}_{ij}^d \tilde{\varepsilon}_{ij}^d dv^{(0)}, \quad (\text{A.42})$$

$$\mathcal{E}_\rho := \begin{cases} - \int_{\mathcal{X}_+} \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2} \delta_{j3} \tilde{u}_{j,i} \tilde{u}_i dv^{(0)} & \text{für Näherung C1 und IC,} \\ - \int_{\mathcal{X}_+} \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2} (\delta_{j3} \tilde{u}_{j,i} \tilde{u}_i - \delta_{j3} \tilde{u}_j \tilde{u}_{i,i}) dv^{(0)} & \text{für Näherung C2.} \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

Entsprechend Peltier (1976) sowie Tromp & Mitrovica (1999b) definieren wir Potentialdichten

$$\mathcal{E}_\kappa = \int_0^\infty E_\kappa(z) dz, \quad (\text{A.44})$$

$$\mathcal{E}_\mu = \int_0^\infty E_\mu(z) dz, \quad (\text{A.45})$$

$$\mathcal{E}_\rho = \int_0^\infty E_\rho(z) dz. \quad (\text{A.46})$$

Für das Lastspektrum (A.14) ergeben sich  $E_\kappa$ ,  $E_\mu$  und  $E_\rho$  durch Einsetzen von  $\tilde{\mathbf{u}}$  (A.16) und  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (A.18) in (A.41)–(A.43) und Integration bezüglich der Koordinaten  $r$  und  $\varphi$ . Da die Integrale divergieren, normieren wir sie gemäß  $2\pi \int_0^\infty [J_0(kr)]^2 r dr = 2\pi \delta(0)/k$  und erhalten mit (A.9)–(A.11)

$$E_\kappa(z) = \frac{\kappa}{2} \left( \dot{\tilde{W}} - 2k\tilde{U} \right)^2, \quad (\text{A.47})$$

$$E_\mu(z) = \tilde{\mu} \left[ \left( k\tilde{U} \right)^2 + \dot{\tilde{W}}^2 + \left( \dot{\tilde{U}} + k\tilde{W} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \dot{\tilde{W}} - 2k\tilde{U} \right)^2 \right], \quad (\text{A.48})$$

$$E_\rho(z) = - \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2} \begin{cases} k\tilde{U}\tilde{W} + \dot{\tilde{W}}\tilde{W} & \text{für Näherung C1 und IC,} \\ 2k\tilde{U}\tilde{W} & \text{für Näherung C2.} \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

Ersetzen wir  $\tilde{U}$  gemäß (A.23) und  $\tilde{W}$  gemäß (A.26) ergeben sich die Potentialdichten

$$E_\kappa(z) = \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\tilde{T} - 2k\tilde{\mu}\tilde{U}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \right)^2, \quad (\text{A.50})$$

$$E_\mu(z) = \tilde{\mu} \left[ \left( k\tilde{U} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{T} + k\tilde{\lambda}\tilde{U}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{\mu}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{T} - 2k\tilde{\mu}\tilde{U}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \right)^2 \right], \quad (\text{A.51})$$

$$E_\rho(z) = -\frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2} \begin{cases} k\tilde{U}\tilde{W} + \frac{(\tilde{T} + \tilde{\lambda}k\tilde{U})\tilde{W}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & \text{für Näherung C1,} \\ 2k\tilde{U}\tilde{W} & \text{für Näherung C2.} \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

Für Näherung IC ergeben sich  $E_\kappa(z) = 0$ ,

$$E_\mu(z) = \tilde{\mu} \left[ 2 \left( k\tilde{U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{\mu}} \right)^2 \right], \quad (\text{A.53})$$

$$E_\rho(z) = -\rho^{(0)} g^{(0)} k\tilde{U}\tilde{W}. \quad (\text{A.54})$$

Das Potential der Auflast (A.40) lautet in der entsprechenden Normierung

$$\mathcal{E}_C = -\frac{1}{2} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R(z_1) \tilde{W}(z_1) \quad (\text{A.55})$$

und ist vom Betrag gleich der Energie, die durch die Verschiebung dem System zugeführt wurde: Die Spannungskomponente  $t_{zz}$  ist proportional zur Vertikalverschiebung,  $t_{zz} = \alpha w$ , so dass sich für eine stetige und hinreichend langsame Bewegung die aufgebrauchte Energie zu

$$E = \int_0^t t_{zz}(t') \partial_{t'} w(t') dt' = \alpha \int_0^t w(t') \partial_{t'} w(t') dt' = \frac{\alpha}{2} [w(t')^2]_0^t \quad (\text{A.56})$$

ergibt. Mit  $w(0) = 0$  folgt daraus

$$E = \frac{1}{2} \alpha w(t)^2 = \frac{1}{2} t_{zz}(t) w(t). \quad (\text{A.57})$$

## A.4 Hankel-transformierte Lastquerschnitte

Die Auflast wird als axialsymmetrische Figur mit dem Radius  $r_L$  und dem Querschnitt  $\sigma^r$  angesehen. Querschnitte wie Rechteck, Ellipse oder Parabel, deren Hankel-Transformierte als geschlossener Ausdruck vorliegen (z. B. Erdelyi *et al.*, 1954; Miles, 1971), geben das Profil eines Eisschildes nur ungenügend wieder. Daher berechnen wir hier die Hankel-Transformierten von realistischeren Lastquerschnitten:

- Der Querschnitt gemäß einer liegenden Parabel (Quadratwurzel),

$$\sigma^r(r) = \begin{cases} \sqrt{1 - (r/r_L)} & \text{für } r \leq r_L, \\ 0 & \text{für } r > r_L, \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

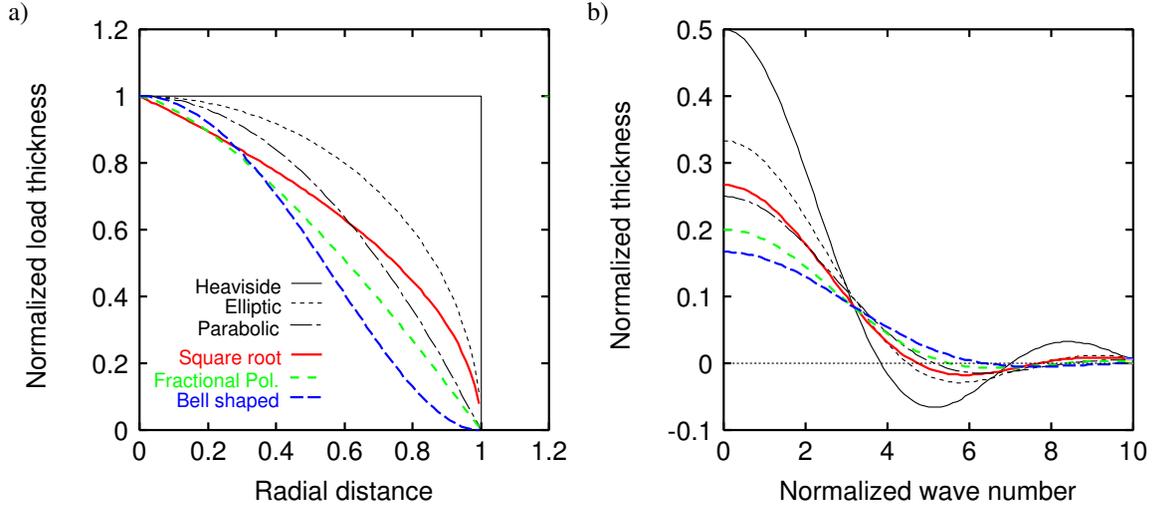


Abbildung A.2: a) Verschiedene Lastquerschnitte als Funktion des radialen Abstandes und b) deren Hankel-Transformierte als Funktion der Wellenzahl. Die drei farbigen Querschnitte werden diskutiert.

stellt den klassischen Querschnitt eines dynamischen Eisschildes im stationären Gleichgewicht dar, das man unter Annahmen wie perfekte Plastizität oder konstante Akkumulationsrate erhält (Hutter, 1983, S. 292ff.). Der Querschnitt approximiert zum Beispiel das Profil des antarktischen Eisschildes bis in einen Abstand von 200 km vom Eisrand (Lliboutry, 1998). Die Hankel-Transformierte lautet als alternierende Reihe

$$\Sigma^r(k) = r_L^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{2^{(n+1)} n! \prod_{\nu=n+1}^{\infty} (2\nu+1)} [-(k r_L/2)^2]^n \quad (\text{A.59})$$

und ergibt sich mit (A.5) und der Lösung der Integrale vom Typ  $\int_0^1 \sqrt{1-x} x^m dx$  (Beyer, 1978, S. 400).

- Der Querschnitt gemäß eines gebrochen rationalen Polynoms,

$$\sigma^r(r) = \begin{cases} 1 - (r/r_L)^\alpha & \text{für } r \leq r_L, \\ 0 & \text{für } r > r_L, \end{cases} \quad (\text{A.60})$$

nähert für  $\alpha = 1.4$  das Profil der nordpolaren geschichteten Ablagerungen<sup>1</sup> des Planeten Mars an, und wurde für die Modellierung des dynamisch/thermodynamischen Verhaltens der Eiskappe verwendet (Greve, 1999; Greve *et al.*, 2003). Die Hankel-Transformierte von (A.60) lautet als alternierende Reihe

$$\Sigma^r(k) = r_L^2 \left\{ \frac{1}{k r_L} J_1(k r_L) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2 + \alpha + 2n) n!^2} [-(k r_L/2)^2]^n \right\} \quad (\text{A.61})$$

und ergibt sich mit (A.5) und der Lösung der Integrale vom Typ  $\int_0^1 x^{m+\alpha} dx$ .

<sup>1</sup> north polar layered deposits

- Der Querschnitt gemäß einer Glockenkurve,

$$\sigma^r(r) = \begin{cases} (1 - (r/r_L)^2)^2 & \text{für } r \leq r_L, \\ 0 & \text{für } r > r_L \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

nähert das Verhalten eines Eisschildes während der Abschmelzphase an. Während dieser Phase ist das Eisschild nicht im Gleichgewichtszustand und dünnt in der Ablationszone (Randbereich) stärker aus als in der Akkumulationszone (Zentralbereich) (Liboutry, 1998). Das Profil wurde bei der Modellierung der Abschmelzphase der Weichselvereisung Fennoskandiens verwendet (Thoma & Wolf, 1999, S. 49). Die Hankel-Transformierte lautet

$$\Sigma^r(k) = \frac{8}{k^5 r_L^3} [(8 - k^2 r_L^2) J_1(k r_L) - 4 k r_L J_0(k r_L)] \quad (\text{A.63})$$

und ergibt sich aus der Lösung der Integrale vom Typ  $\int_0^1 x^n J_0(x) dx$  (Thoma & Wolf, 1999, S. 89).

Die Formeln (A.59) und (A.61) können numerisch nur bis  $k r_L \simeq 30$  verwendet werden, was z. B. bei  $r_L = 1000$  km zu einer maximalen normierten Wellenzahl von  $n = 200$  führt. Damit (3.111) bzw. (3.112) für die betrachteten Feldgrößen hinreichend konvergieren, reicht dieser Wellenzahlbereich aus. Äquivalent können die Hankel-Transformierten (A.59) und (A.61) auch als generalisierte hypergeometrische Funktionen  ${}_pF_q$  dargestellt werden:

(A.59) lautet dann

$$\Sigma^r(k) = \frac{4}{15} r_L^2 {}_1F_2 \left[ \frac{3}{2}; \frac{7}{4}, \frac{9}{4}; -\left(\frac{k r_L}{2}\right)^2 \right] \quad (\text{A.64})$$

und (A.61) lautet

$$\Sigma^r(k) = \frac{r_L}{k} \left\{ J_1(k r_L) - \frac{k r_L}{2 + \alpha} {}_1F_2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{2}; 1, 2 + \frac{\alpha}{2}; -\left(\frac{k r_L}{2}\right)^2 \right] \right\} \quad (\text{A.65})$$

Die generalisierte hypergeometrische Funktion ist gemäß

$${}_pF_q [(\alpha)_p; (\beta)_q; z] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \cdots (\beta_q)_n n!} \quad (\text{A.66})$$

definiert, wobei

$$(\alpha)_n := \alpha (\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) \quad (\text{A.67})$$

das Pochhammer-Symbol ist (Abramowitz & Stegun, 1964, Gl. 6.1.2). Zur Lösung von (A.66) existieren numerische Methoden auch für große  $|z|$  (Perger *et al.*, 1993); diese verbrauchen jedoch viel Laufzeit im Programm.

# B

---

## Integration der inkrementiellen Feldgleichungen

In diesem Anhang wird zunächst die Lösung für das homogene Differentialgleichungssystem  $\partial_z \mathbf{Y}'(z) = \mathbf{A} \mathbf{Y}(z)$  der mechanischen Feldgleichungen (S. 35) über das Fundamentalsystem von  $\mathbf{A}$  skizziert (Abschn. B.1.1, S. 107). Die Lösung in zwei Tiefen  $z_1$  und  $z_2$  verbindet der aus dem Fundamentalsystem bestimmbare Propagator  $\mathbf{P}(z_1, z_2)$ . Alternativ kann  $\mathbf{P}(z_1, z_2)$  auch ohne Kenntnis der Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  über das Sylvestrische Interpolationspolynom bestimmt werden. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass sich die analytische Berechnung von  $\mathbf{P}$  wesentlich vereinfacht (Abschn. B.1.2, S. 109). Die über die Eigenvektoren formulierte Lösung erhält man durch Anpassung der Regularitäts- und Randbedingungen (Abschn. B.1.3, S. 110): An der Oberfläche sollen keine Flächenkräfte angreifen, und alle Störungen sollen für  $z \rightarrow \infty$  verschwinden. Die Störungen gehen über die Grenzflächenbedingungen ein. Aus der Darstellung der Regularitätsbedingung über die Eigenvektoren folgt unmittelbar die Lösung für den homogenen Halbraum (Abschn. B.1.4, S. 111). Im darauf folgenden Abschnitt wird das inhomogene Differentialgleichungssystem der gravitativen Feldgleichungen  $\partial_z \mathbf{Z}(z) = \mathbf{B} \mathbf{Z}(z) + \mathbf{F}(z)$  (S. 38) über das Sylvestrische Interpolationspolynom bestimmt (Abschn. B.2.1, S. 111). Die Regularitätsbedingung, dass die Störung für  $z \rightarrow -\infty$  verschwinden muss, liefert dann die allgemeine Lösung (Abschn. B.2.2, S. 112). Die spezielle Lösung, die über die Anregung  $\mathbf{F}$  definiert ist, wird aus der Lösung der mechanischen Feldgleichungen bestimmt (Abschn. B.2.3, S. 113). Die Lösung für einen homogenen Halbraum ist separat ausgeführt (Abschn. B.2.4, S. 114). Danach werden mit dem bereitgestellten Material die Schichtpropagatoren und Halbraumlösungen für die in Kap. 3 diskutierten Feldgleichungen berechnet (Abschnitte B.3.1–B.3.4, S. 114ff.).

### B.1 Mechanische Feldgleichungen

#### B.1.1 Fundamentalsystem

Der Schichtpropagator für die in Kap. 3 diskutierten partiellen Differentialgleichungen ergibt sich jeweils aus dem Ansatz, dass ein System homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\partial_z \mathbf{Y}(z) = \mathbf{A} \mathbf{Y}, \quad (\text{B.1})$$

formal durch

$$\mathbf{Y}(z) = e^{\mathbf{A}z} \mathbf{C} \quad (\text{B.2})$$

gelöst wird, wobei die Konstante  $\mathbf{C}$  die Lösung für die Tiefe  $z = z_0$  darstellt, so dass

$$\mathbf{Y}(z+h) = e^{\mathbf{A}(h)} \mathbf{Y}(z) =: \mathbf{P}(z+h, z) \mathbf{Y}(z). \quad (\text{B.3})$$

Die Exponentialfunktion in (B.3) ist durch

$$e^{\mathbf{A}(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n(h)}{n!} \quad (\text{B.4})$$

definiert. Die Matrix  $\mathbf{A}$  kann durch ihre Eigenlösungen dargestellt werden,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{m} \mathbf{L}^{-1}, \quad (\text{B.5})$$

wobei die Spalten der Fundamentalmatrix  $\mathbf{L}$  die Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  sind,<sup>1</sup>  $\mathbf{m}$  die Jordan'sche Normalform von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{L}^{-1}$  die Inverse zu  $\mathbf{L}$  ist. Wir setzen (B.5) in (B.4) ein und nutzen aus, dass in den Potenzen  $\mathbf{A}^n$  alle  $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{I}$ , d. h. gleich der Einheitsmatrix sind. Dann folgt

$$e^{\mathbf{A}(h)} = \mathbf{L} \mathbf{E}(h) \mathbf{L}^{-1} \quad (\text{B.6})$$

mit  $\mathbf{E}(h)$  als Blockmatrix zu  $\mathbf{m}$  (z. B. Purcell, 1997, S. 57ff.). Setzen wir (B.6) in (B.3) ein, hat der Propagator die Gestalt

$$\mathbf{P}(z+h, z) = \mathbf{L} \mathbf{E}(h) \mathbf{L}^{-1}. \quad (\text{B.7})$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass die durch die Schichtpropagation transformierten Eigenvektoren zum Ausgleich numerischer Instabilitäten renormalisiert werden können (Wang, 1999).

Multiplizieren wir (B.5) von rechts mit  $\mathbf{L}$ , erhalten wir die charakteristische Gleichung, aus der die Eigenvektoren und -werte bestimmt werden können. Für vier disjunkte Eigenwerte der Vielfachheit Eins haben  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{E}(h)$  Diagonalgestalt,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}(h) = \begin{pmatrix} e^{m_1 h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{m_2 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{m_3 h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{m_4 h} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

so dass sich die Eigenvektoren aus  $\mathbf{A} \mathbf{L}_i - m_i \mathbf{L}_i = \mathbf{0}$  ergeben.

Für zwei disjunkte Eigenwerte der Vielfachheit Zwei lauten

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}(h) = \begin{pmatrix} e^{m_1 h} & h e^{m_1 h} & 0 & 0 \\ 0 & e^{m_1 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{m_2 h} & h e^{m_2 h} \\ 0 & 0 & 0 & e^{m_2 h} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

so dass für  $i = 1, 3$  die Eigenvektoren aus  $\mathbf{A} \mathbf{L}_1 - m_1 \mathbf{L}_1 = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{A} \mathbf{L}_3 - m_2 \mathbf{L}_3 = \mathbf{0}$  und für  $i = 2, 4$  aus  $\mathbf{A} \mathbf{L}_2 - m_1 \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1$  bzw.  $\mathbf{A} \mathbf{L}_4 - m_2 \mathbf{L}_4 = \mathbf{L}_3$  folgen. Mit der Form der Blockmatrix (B.9) können wir das Hauptssystem von  $\mathbf{A}$  in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(h) &:= \mathbf{L}_1, & \mathbf{L}_3(h) &:= \mathbf{L}_3, \\ \mathbf{L}_2(h) &:= \mathbf{L}_2 + h \mathbf{L}_1, & \mathbf{L}_4(h) &:= \mathbf{L}_4 + h \mathbf{L}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

schreiben, so dass  $\mathbf{E}(h)$  Diagonalgestalt gewinnt, wobei die ersten beiden Exponentialfunktionen den Eigenwert  $m_1$  und die letzten beiden den Eigenwert  $m_2$  enthalten. Nachteil dieser Darstellung ist, dass in den Elementen der modifizierten Fundamentalmatrix (B.10) von  $z$  abhängende Terme auftreten.

<sup>1</sup>  $\mathbf{L}$  bildet die Eigenvektoren auf den Bewegungs-Spannungs-Vektor  $\mathbf{Y} = (U, W, R, T)^T$  ab.

### B.1.2 Sylvestrisches Interpolationspolynom

Die Berechnung des Propagators mit Hilfe von (B.7) ist mühsam, da sie zunächst die Bestimmung von  $\mathbf{L}^{-1}$  verlangt und danach eine entsprechend große Anzahl von Multiplikationen. Deshalb kann es für analytische Betrachtungen wie auch für die numerische Stabilität günstiger sein, den Propagator mit Hilfe des Sylvestrischen Interpolationspolynoms zu bestimmen, das aus (B.7) abgeleitet werden kann (z. B. Gantmacher, 1986, S. 143ff.):

Weist  $\mathbf{A}$   $N$  disjunkte Eigenwerte  $m_i$  der Vielfachheit  $M_i$  auf, so dass weiterhin  $\sum_{i=1}^N M_i = \text{rang } \mathbf{A}$  gilt, lässt sich der Propagator wie folgt schreiben:

$$\mathbf{P}(z+h, z) = \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^{M_i} \frac{1}{(j-1)!} F_i^{(j-1)} (\mathbf{A} - m_i)^{j-1} \right] \psi_i(\mathbf{A}). \quad (\text{B.11})$$

Dabei sind<sup>1</sup>

$$\psi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x - m_j)^{M_j}, \quad (\text{B.12})$$

$$F_i^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left[ \frac{e^{xh}}{\psi_i(x)} \right]_{x=m_i}. \quad (\text{B.13})$$

Für  $N$  disjunkte Eigenwerte der Vielfachheit Eins ergibt sich aus (B.11)–(B.13)

$$\mathbf{P}(z+h, z) = \sum_{i=1}^N \left( \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\mathbf{A} - m_j}{m_i - m_j} \right) e^{m_i h}. \quad (\text{B.14})$$

Gilt für die Eigenwerte eines Systems  $m_3 = -m_1$  und  $m_4 = -m_2$ , lässt sich (B.14) über Hyperbolikusfunktionen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z+h, z) &= \frac{1}{m_1(m_1^2 - m_2^2)} \\ &\times [(\mathbf{A}^3 - m_2^2 \mathbf{A}) \sinh(m_1 h) + (m_1 \mathbf{A}^2 - m_1 m_2^2) \cosh(m_1 h)] \\ &- \frac{1}{m_2(m_1^2 - m_2^2)} \\ &\times [(\mathbf{A}^3 - m_1^2 \mathbf{A}) \sinh(m_2 h) + (m_2 \mathbf{A}^2 - m_2 m_1^2) \cosh(m_2 h)]. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Für zwei disjunkte Eigenwerte der Vielfachheit Zwei mit  $m_{1,2} = \pm k$  ergibt sich aus (B.11)–(B.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z+h, z) &= \frac{e^{kh}}{4k^3} [k + (kh - 1)(\mathbf{A} - k)] (\mathbf{A} + k)^2 \\ &+ \frac{e^{-kh}}{4k^3} [k + (kh + 1)(\mathbf{A} + k)] (\mathbf{A} - k)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

<sup>1</sup> In (B.12) ist das Argument entweder eine Matrix oder ein Skalar. In den Summen, in denen eine Matrix und ein Skalar erscheint, wird der Skalar als  $x = x \mathbf{I}$  interpretiert.

Alternativ lässt sich (B.16) durch Hyperbolikusfunktionen schreiben (z. B. Kaufmann, 1995):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z+h, z) &= \frac{1}{2k^3} [(-\mathbf{A}^3 + 3k^2 \mathbf{A}) \sinh(kh) + 2k^3 \cosh(kh)] \\ &+ \frac{kh}{2k^3} [(k\mathbf{A}^2 - k^3) \sinh(kh) + (\mathbf{A}^3 - k^2 \mathbf{A}) \cosh(kh)] . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Diese Form des Propagators verbindet zwei Tiefenwerte miteinander.<sup>1</sup>

### B.1.3 Anpassung an die Randbedingungen

Die Lösung an der Oberseite des Halbraumes erhält man über die Regularitätsbedingung, dass die Lösungen innerhalb des Halbraumes für  $z \rightarrow \infty$  verschwinden sollen. Dies bedeutet, dass die Eigenwerte mit  $\text{Re } m_i > 0$  keinen Beitrag leisten dürfen. Für die betrachteten Näherungen (3.66), (3.72), (3.78) und (3.90) treten im Wesentlichen nur Fälle auf, in denen die Realteile zweier Eigenwerte größer Null und zweier Eigenwerte kleiner Null sind. Ordnen wir die Eigenwerte nach dem Wert ihres Realteiles, kann man eine im Halbraum geltende Lösung in der Form

$$\mathbf{Y}^+(z_L) = \mathbf{H} \mathbf{X}^L := \mathbf{L}^L \mathbf{S}^T \mathbf{X}^L \quad (\text{B.18})$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

ist,  $\mathbf{X}^L$  die Amplituden der beiden Eigenvektoren mit negativen Eigenwerten enthält und  $\mathbf{H}$  der Halbraumpropagator ist. Die Propagation von der Oberseite des Halbraumes  $\mathbf{Y}^+(z_L)$  an die Oberfläche lautet mit (3.38) und (3.40)

$$\mathbf{Y}^-(z_1) = -\mathbf{Y}^C + \prod_{l=1}^{L-1} \mathbf{P}^{(l)}(z_l, z_{l+1}) \mathbf{Y}^+(z_L) , \quad (\text{B.20})$$

wobei

$$\mathbf{Y}^C := \mathbf{C}^{(1)} + \sum_{i=1}^{L-1} \prod_{l=1}^i \mathbf{P}^{(l)}(z_l, z_{l+1}) \mathbf{C}^{(i+1)} \quad (\text{B.21})$$

den Einfluss der Störungen an den Grenzflächen repräsentiert.<sup>2</sup> Die Regularitätsbedingung an der Oberfläche ist das Verschwinden der Traktion im externen Halbraum:

$$\left( \mathbf{Y}_3^-(z_1), \mathbf{Y}_4^-(z_1) \right)^T = \mathbf{0} . \quad (\text{B.22})$$

Multiplizieren wir (B.20) mit  $\mathbf{S}$ , berücksichtigen (B.18) und definieren die Funktionalmatrix durch

$$\mathbf{M} := \mathbf{S} \prod_{l=1}^{L-1} \mathbf{P}^{(l)}(z_l, z_{l+1}) \mathbf{L}^L \mathbf{S}^T , \quad (\text{B.23})$$

<sup>1</sup> In Kaufmann (1995, S. 125) werden alle Beziehungen für  $e^{-\mathbf{A}z}$  hergeleitet, wodurch sich teilweise andere Vorzeichen ergeben.

<sup>2</sup> Das Produkt ist so zu verstehen, dass mittels  $\prod$  die einzelnen Faktoren in der gegebenen Reihenfolge von links nach rechts notiert werden, die Matrixoperationen dann aber von rechts nach links ausgeführt werden.

verbindet

$$\mathbf{S} \mathbf{Y}^C = \mathbf{M} \mathbf{X}^L \quad (\text{B.24})$$

die Randbedingungen an der Oberfläche mit denen an der Oberseite des Halbraumes. Multiplizieren wir (B.24) mit der Inversen  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^* / \det \mathbf{M}$ ,<sup>1</sup> ergibt sich

$$\mathbf{X}^L = \frac{\mathbf{M}^*}{\det \mathbf{M}} \mathbf{S} \mathbf{Y}^C \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} M_{22} Y_3^C - M_{12} Y_4^C \\ -M_{21} Y_3^C + M_{11} Y_4^C \end{pmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

### B.1.4 Lösung für homogenen Halbraum

Setzen wir (B.18) in (B.20) ein, lautet die Lösung für einen an der Oberfläche durch eine Druckkraft belasteten homogenen Halbraum [ $\mathbf{Y}^C = (0, 0, 0, C_4)^T$  (B.21)]

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{L} \mathbf{E}(z) \mathbf{S}^T \mathbf{X}. \quad (\text{B.27})$$

Der Index  $L = 1$  wird nicht benötigt. Dabei sind mit (B.23) und (B.26)

$$\mathbf{X} = \frac{C_4}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} -L_{34} \\ L_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

$$\det \mathbf{M} = L_{33} L_{44} - L_{34} L_{43}. \quad (\text{B.29})$$

Die Lösung für einen homogenen Halbraum lautet dann

$$\mathbf{Y}(z) = \frac{C_4}{\det \mathbf{M}} [-L_{34} L_3 e^{m_3 z} + L_{33} L_4 e^{m_4 z}]. \quad (\text{B.30})$$

## B.2 Gravitative Feldgleichungen

### B.2.1 Sylvestrisches Interpolationspolynom

Die Lösung für das inhomogene Differentialgleichungssystem  $\partial_z \mathbf{Z}(z) = \mathbf{B} \mathbf{Z}(z) + \mathbf{F}(z)$  (3.52) mit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\pi\gamma\rho^{(0)}\tilde{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{G} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

lautet innerhalb jeder Schicht formal (siehe Gantmacher, 1986, S. 143ff)

$$\mathbf{Z}(z) = e^{\mathbf{B}(z-z_0)} \mathbf{Z}(z_0) + \int_{z_0}^z e^{\mathbf{B}(z-z')} \mathbf{F}(z') dz', \quad (\text{B.32})$$

wobei sich die Anregung  $\mathbf{F}$  aus den Lösungen der mechanischen Feldgleichungen ergibt. Über jede Grenzfläche müssen die Grenzflächenbedingungen (3.46) und (3.51) erfüllt werden, so dass

$$[\mathbf{Z}(z_l)]_+^\pm = -\mathbf{C}^{(l)}, \quad \mathbf{C}^{(l)} := \left( 0, 4\pi\gamma [\tilde{\Sigma}_l^R - (\rho_l^{(0)} - \rho_{l-1}^{(0)}) \tilde{W}(z_l)] \right)^T. \quad (\text{B.33})$$

<sup>1</sup>  $\mathbf{M}^*$  bezeichnet die Transponierte der Komatrix von  $\mathbf{M}$  und lautet in diesem Fall  $\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}$ .

Lösen wir das System mit Hilfe des Sylvestrischen Interpolationspolynoms, indem wir die Koeffizientenmatrix (B.31) mit ihren Eigenwerten  $m_{1,2} = \pm k$  in (B.14) einsetzen, lautet der Propagator

$$\mathbf{Q}(z, z_0) = \mathbf{Q}_1(z, z_0) + \mathbf{Q}_2(z, z_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ k & 1 \end{pmatrix} e^{k(z-z_0)} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1/k \\ -k & 1 \end{pmatrix} e^{-k(z-z_0)}. \quad (\text{B.34})$$

Die Propagation durch die Schicht  $l$ , von  $[\mathbf{Z}(z_{l+1})]^-$  nach  $[\mathbf{Z}(z_l)]^+$ , erfolgt so mit Hilfe von

$$[\mathbf{Z}(z_l)]^+ = \mathbf{Q}(z_l, z_{l+1})[\mathbf{Z}(z_{l+1})]^- + \int_{z_{l+1}}^{z_l} \mathbf{Q}(z_l, z') \mathbf{F}(z') dz' \quad (\text{B.35})$$

und die Propagation über die Grenzfläche  $l$ , von  $[\mathbf{Z}(z_l)]^+$  nach  $[\mathbf{Z}(z_l)]^-$ , mit (B.33) entsprechend

$$[\mathbf{Z}(z_l)]^- = [\mathbf{Z}(z_l)]^+ + \mathbf{C}^{(l)}. \quad (\text{B.36})$$

Da für (B.34)  $\mathbf{Q}(z_1, z_2) \mathbf{Q}(z_2, z_3) = \mathbf{Q}(z_1, z_3)$  gilt, lautet die Propagation durch die  $L - 1$  Schichten des Erdmodelles

$$[\mathbf{Z}(z_1)]^- = \sum_{l=1}^{L-1} \mathbf{Q}(z, z_l) \left[ \mathbf{C}^{(l)} + \int_{z_{l+1}}^{z_l} \mathbf{Q}(z_l, z') \mathbf{F}(z') dz' \right]. \quad (\text{B.37})$$

## B.2.2 Anpassung an die Randbedingungen

Die Regularitätsbedingung des Potentials im Außenraum,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{Z}(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{Q}(z, z_1) [\mathbf{Z}(z_1)]^- = 0, \quad (\text{B.38})$$

fordert mit (B.34), dass der Beitrag  $\mathbf{Q}_2(z, z_1)[\mathbf{Y}(z_1)]^-$  verschwindet. Damit folgt

$$\tilde{\Phi}(z_1) = \frac{1}{k} \tilde{G}(z_1) \quad (\text{B.39})$$

und desweiteren mit der Orthogonalität von  $\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{Q}_2$ , dass

$$\mathbf{Q}(z, z_0) = \mathbf{Q}_1(z, z_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ k & 1 \end{pmatrix} e^{k(z-z_0)} \quad (\text{B.40})$$

gilt.<sup>1</sup> Da in  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{C}^{(l)}$  gemäß (B.31) und (B.33) nur die jeweils zweite Zeile von Null verschieden ist, reduziert sich (B.37) mit (B.40) auf die folgende Lösung der gravitativen Feldgleichungen:

$$[\mathbf{Z}(z_1)]^- = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1 \end{pmatrix} 2\pi\gamma \sum_{l=1}^L e^{k(z_1-z_l)} \left( C_2^{(l)} + \rho_l^{(0)} \overline{D}^{(l)} \right). \quad (\text{B.41})$$

<sup>1</sup> Mit (B.39) gilt  $\mathbf{Q}(z, z_1)\mathbf{Y}(z_1) = \mathbf{Q}_1(z, z_1)\mathbf{Y}(z_1)$ , so dass sich die gesamte Lösung auf die Beiträge von  $\mathbf{Q}_1$  reduziert.

Dabei sind

$$C_2^{\prime(l)} := \left[ \tilde{\Sigma}_l^R - (\rho_l^{(0)} - \rho_{l-1}^{(0)}) \tilde{W}(z_l) \right] \quad \text{für } l = 1, \dots, L, \quad (\text{B.42})$$

$$\bar{D}^{(l)} := \begin{cases} \int_{z_{l+1}}^{z_l} e^{k(z_l - z')} \tilde{D}(z') dz' & \text{für } l = 1, \dots, L-1, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \int_z^{z_L} e^{k(z_L - z')} \tilde{D}(z') dz' & \text{für } l = L \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

Den Quellterm in Folge des Dichteinkrementes (B.43) bestimmen wir im folgenden Abschnitt.

### B.2.3 Quellterm in Folge des Dichteinkrementes

Die Divergenz der Verschiebung  $\tilde{D}$  innerhalb der Schicht  $l$  lässt sich über den mechanischen Schichtpropagator  $\mathbf{P}^{(l)}$  berechnen, indem in (3.47) mittels (3.27)  $\partial_z \tilde{W}$  eliminiert wird. Dann gilt für  $z \in (z_l, z_{l+1})$

$$\tilde{D}(z) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_l + 2\tilde{\mu}_l} \sum_{i=1}^4 [\mathbf{P}_{4i}^{(l)}(z, z_l) - 2\tilde{\mu}_l k \mathbf{P}_{1i}^{(l)}(z, z_l)] [\mathbf{Y}_i(z_l)]^+. \quad (\text{B.44})$$

Für Modelle mit einfachen Eigenwerten wird ausgenutzt, dass die Fundamentalmatrix  $\mathbf{L}$  der mechanischen Feldgleichungen jeweils konstant ist. Dann lässt sich in (B.43) die Integration über  $\tilde{D}$  auf die diagonale Blockmatrix  $\mathbf{E}$  reduzieren, so dass

$$\bar{D}^{(l)} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_l + 2\tilde{\mu}_l} \sum_{i=1}^4 \left[ \bar{\mathbf{P}}_{4i}^{(l)} - 2\tilde{\mu}_l k \bar{\mathbf{P}}_{1i}^{(l)} \right] [\mathbf{Y}_i(z_l)]^+ \quad \text{für } l = 1, \dots, L-1 \quad (\text{B.45})$$

mit

$$\bar{\mathbf{P}}^{(l)}(z_{l+1}, z_l) := \mathbf{L}^{(l)} \bar{\mathbf{E}}^{(l)}(z_{l+1} - z_l) (\mathbf{L}^{(l)})^{-1}. \quad (\text{B.46})$$

Die Diagonalelemente von  $\bar{\mathbf{E}}^{(l)}$  lauten für  $l = 1, \dots, L-1$

$$\bar{E}_{ii}^{(l)}(z_{l+1} - z_l) = \int_{z_{l+1}}^{z_l} e^{k(z_l - z)} e^{(z - z_l)m_i^{(l)}} dz = \frac{1}{m_i^{(l)} - k} \left[ 1 - e^{(m_i^{(l)} - k)(z_{l+1} - z_l)} \right]. \quad (\text{B.47})$$

Der Beitrag  $\bar{D}^{(L)}$  für den Halbraum lautet abweichend

$$\bar{D}^{(L)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_z^{z_L} e^{k(z_L - z')} \tilde{D}(z') dz', \quad (\text{B.48})$$

wobei dann in (B.44) der Halbraumpropagator der mechanischen Feldgleichungen steht. Schreibt man die Propagation der mechanischen Feldgrößen in den unteren Halbraum in der Form

$$\mathbf{Y}(z > z_L) = \mathbf{P}^{(L)}(z, z_L) \mathbf{L}^{(L)} \mathbf{S}^T \mathbf{X}^L = \mathbf{L}^{(L)} \mathbf{E}^{(L)}(z - z_L) \mathbf{S}^T \mathbf{X}^L, \quad (\text{B.49})$$

wobei  $\mathbf{P}^{(L)} := \mathbf{L}^{(L)} \mathbf{E}^{(L)} (\mathbf{L}^{(L)})^{-1}$  ausgenutzt wurde, reduziert sich die Integration mit  $\mathbf{E}^{(L)}(z - z_L) \mathbf{S}^T$  auf die Komponenten  $E_{33}^{(L)}$  und  $E_{44}^{(L)}$ . Integriert man entsprechend (B.47) über diese und bildet den Grenzwert  $z \rightarrow \infty$ , lauten die beiden Komponenten

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{E}_{ii}^{(L)}(z - z_L) = \frac{1}{m_i^{(L)} - k} \quad \text{für } i = 3, 4. \quad (\text{B.50})$$

Mit (B.49) und (B.50) in (B.44) folgt daraus

$$\bar{D}^{(l)} = \frac{X_1^L}{m_3^{(L)} - k} \frac{L_{43}^{(L)} - 2\tilde{\mu}_L k L_{13}^{(L)}}{\tilde{\lambda}_L + 2\tilde{\mu}_L} + \frac{X_2^L}{m_4^{(L)} - k} \frac{L_{44}^{(L)} - 2\tilde{\mu}_L k L_{14}^{(L)}}{\tilde{\lambda}_L + 2\tilde{\mu}_L}. \quad (\text{B.51})$$

### B.2.4 Lösung für homogenen Halbraum

Für einen homogenen Halbraum ( $L = 1$ ) ergibt sich aus (B.33) und (B.41)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(z_1) \\ \tilde{G}(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1 \end{pmatrix} 2\pi\gamma \left( \tilde{\Sigma}^R - \rho^{(0)} \tilde{W}(z_1) + \rho^{(0)} \bar{D} \right). \quad (\text{B.52})$$

Dabei ist  $\rho^{(0)}$  die Dichte des homogenen Halbraumes ( die Dichte des externen Halbraumes ist als Null angenommen).  $\tilde{W}$  ist die sich aus (B.30) ergebende Vertikalverschiebung an der Oberfläche und  $\bar{D} := \bar{D}^{(L)}$  ist der sich aus (B.51) ergebende Quellterm in Folge des Dichteinkrements.

## B.3 Explizite Form der Näherungslösungen

### B.3.1 Näherung C0

Die Koeffizientenmatrix für das homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet gemäß (3.30)

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -k & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 \\ \frac{k\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ \frac{4k^2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\lambda}k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.53})$$

und die Eigenwerte nach (3.66)

$$m_1 = k, \quad m_2 = -k \quad (\text{B.54})$$

mit der Vielfachheit Zwei. Die Fundamentalmatrix von (B.53) und deren Inverse sind

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2\frac{\delta}{k} + z & -1 & 2\frac{\delta - 1}{k} - z \\ 1 & k^{-1} + z & 1 & k^{-1} + z \\ 2k\tilde{\mu} & 2\tilde{\mu}(1 + \delta + kz) & 2k\tilde{\mu} & 2\tilde{\mu}(1 - \delta + kz) \\ 2k\tilde{\mu} & 2\tilde{\mu}(\delta + kz) & -2k\tilde{\mu} & 2\tilde{\mu}(\delta - 2 - kz) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.55})$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\delta + kz}{\delta} & \frac{1 + \delta + kz}{\delta} & -\frac{1 + kz}{2k\tilde{\mu}\delta} & \frac{2\delta + kz}{2k\tilde{\mu}\delta} \\ \frac{k}{\delta} & -\frac{k}{\delta} & \frac{1}{2\tilde{\mu}\delta} & -\frac{1}{2\tilde{\mu}\delta} \\ \frac{\delta - 2 - kz}{\delta} & \frac{\delta - 1 - kz}{\delta} & \frac{1 + kz}{2k\tilde{\mu}\delta} & -\frac{2\delta - 2 - kz}{2k\tilde{\mu}\delta} \\ \frac{k}{\delta} & \frac{k}{\delta} & -\frac{1}{2\tilde{\mu}\delta} & -\frac{1}{2\tilde{\mu}\delta} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.56})$$

wobei

$$\delta := \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}. \quad (\text{B.57})$$

$\mathbf{E}$  ist durch (B.8) gegeben. Aus diesen Matrizen oder alternativ über das Sylvestrische Interpolationspolynom ergeben sich die Elemente des Propagators zu

$$\begin{aligned} P_{11}(z, 0) &= \frac{1}{\delta} \sinh(kz)kz + \cosh(kz), & P_{31}(z, 0) &= \frac{2k\tilde{\mu}}{\delta} [\sinh(kz) + \cosh(kz)kz], \\ P_{12}(z, 0) &= -\frac{\delta-1}{\delta} \sinh(kz) - \frac{1}{\delta} \cosh(kz)kz, & P_{32}(z, 0) &= -\frac{2k\tilde{\mu}}{\delta} \sinh(kz)kz, \\ P_{13}(z, 0) &= \frac{2\delta-1}{2k\tilde{\mu}\delta} \sinh(kz) + \frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} \cosh(kz)kz, & P_{33}(z, 0) &= \frac{1}{\delta} \sinh(kz)kz + \cosh(kz), \\ P_{14}(z, 0) &= -\frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} \sinh(kz)kz, & P_{34}(z, 0) &= \frac{\delta-1}{\delta} \sinh(kz) - \frac{1}{\delta} \cosh(kz)kz, \\ P_{21}(z, 0) &= -\frac{\delta-1}{\delta} \sinh(kz) + \frac{1}{\delta} \cosh(kz)kz, & P_{41}(z, 0) &= \frac{2k\tilde{\mu}}{\delta} \sinh(kz)kz, \\ P_{22}(z, 0) &= -\frac{1}{\delta} \sinh(kz)kz + \cosh(kz), & P_{42}(z, 0) &= \frac{2k\tilde{\mu}}{\delta} [\sinh(kz) - \cosh(kz)kz], \\ P_{23}(z, 0) &= \frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} \sinh(kz)kz, & P_{43}(z, 0) &= \frac{\delta-1}{\delta} \sinh(kz) + \frac{1}{\delta} \cosh(kz)kz, \\ P_{24}(z, 0) &= \frac{2\delta-1}{2k\tilde{\mu}\delta} \sinh(kz) - \frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} \cosh(kz)kz, & P_{44}(z, 0) &= -\frac{1}{\delta} \sinh(kz)kz + \cosh(kz). \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

### Quellterm $\overline{D}^{(l)}$

Die Berechnung der Quellterme für die einzelnen Schichten erfolgt entsprechend [Abschn. B.2, S. 111](#):

Setzen wir (B.58) in (B.44) ein und schreiben die Summe als Matrixoperation, lautet die Divergenz der Verschiebung innerhalb der  $l$ -ten Schicht

$$\tilde{D}(z) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_l + 2\tilde{\mu}_l} \begin{pmatrix} -2k\tilde{\mu}_l \cosh[k(z-z_l)] \\ 2k\tilde{\mu}_l \sinh[k(z-z_l)] \\ -\sinh[k(z-z_l)] \\ \cosh[k(z-z_l)] \end{pmatrix}^T [\mathbf{Y}(z_l)]^+ \quad \text{für } z \in (z_l, z_{l+1}). \quad (\text{B.59})$$

Einsetzen von (B.59) in (B.43) und Integration führen auf den Quellterm der  $l$ -ten Schicht,

$$\overline{D}^{(l)} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_l + 2\tilde{\mu}_l} \left[ \begin{pmatrix} 2k\tilde{\mu}_l \\ -2k\tilde{\mu}_l \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \frac{h_l}{2} + \begin{pmatrix} 2k\tilde{\mu}_l \\ 2k\tilde{\mu}_l \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \frac{1 - e^{-2kh_l}}{4k} \right] [\mathbf{Y}(z_l)]^+, \quad (\text{B.60})$$

wobei  $h_l := z_{l+1} - z_l$  die Dicke der Schicht  $l$  ist.

Den Quellterm  $\overline{D}^{(L)}$  berechnen wir, indem wir aus der Lösung für den Halbraum,

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{L}^{(L)}(z - z_L) \mathbf{E}^{(L)}(z - z_L) \mathbf{S}^T \mathbf{X}^L, \quad (\text{B.61})$$

die Divergenz der Verschiebung bestimmen. Einsetzen von (B.8), (B.19) und (B.55) in (B.61) ergibt

$$\tilde{D} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_L + 2\tilde{\mu}_L} [Y_4(z) - 2k\tilde{\mu}_L Y_1(z)] = \frac{-2\tilde{\mu}_L}{\tilde{\lambda}_L + \tilde{\mu}_L} e^{-k(z-z_L)} \mathbf{X}_2^L \quad \text{für } z > z_L, \quad (\text{B.62})$$

und Einsetzen von (B.62) in (B.48), Integration und Grenzwertbildung führen auf

$$\bar{D}^{(L)} = \frac{\tilde{\mu}_L}{k(\tilde{\lambda}_L + \tilde{\mu}_L)} \mathbf{X}_2^L. \quad (\text{B.63})$$

### Lösung für homogenen Halbraum

Die Lösung für den homogenen Halbraum stellt für ein elastisches Medium die Lösung des klassischen Boussinesq-Problems dar (z. B. Wolf, 1991b). Sie geht aus (B.61) hervor:

Die Komponenten in  $\mathbf{X}$  ergeben sich aus (B.28), wobei mit (3.42) und (B.55) für  $z = 0$

$$\mathbf{M} = 2k\tilde{\mu} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tilde{\mu}}{k(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} \\ -1 & -\frac{\tilde{\lambda}}{k(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} \end{pmatrix} \quad (\text{B.64})$$

gilt, so dass  $\det \mathbf{M} = -(2k\tilde{\mu})^2/k$ . Damit folgt

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 - \delta \\ -k \end{pmatrix} \frac{C_4}{2k\tilde{\mu}} \quad (\text{B.65})$$

und in (B.4) eingesetzt

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \delta \\ -k \end{pmatrix} \frac{C_4 e^{-kz}}{2k\tilde{\mu}}. \quad (\text{B.66})$$

Substituieren wir (B.55) und  $C_4 = -g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R$ , erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z) = \begin{pmatrix} 1 - \delta + kz \\ \delta + kz \\ 2k\tilde{\mu}kz \\ -2k\tilde{\mu}(1 + kz) \end{pmatrix} \frac{e^{-kz} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R}{2k\tilde{\mu}}. \quad (\text{B.67})$$

Berücksichtigen wir (B.57) in (B.67), ergeben sich für  $z = 0$  die Oberflächenverschiebungen zu

$$\tilde{U} = \frac{1}{2k\tilde{\mu}} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R, \quad (\text{B.68})$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{2k\tilde{\mu}} \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R. \quad (\text{B.69})$$

Der Quellterm durch das Dichteinkrement folgt, indem wir (B.65) in (B.63) berücksichtigen,

$$\bar{D} = -\frac{C_4}{2k(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})}, \quad (\text{B.70})$$

und das lokale Schwereinkrement, indem wir (B.69) und (B.70) in (B.52) einsetzen:

$$\tilde{G} = 2\pi\gamma \left( 1 - \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k\tilde{\mu}} \right) \tilde{\Sigma}^R. \quad (\text{B.71})$$

Da die Auftriebskräfte für dieses Modell vernachlässigt sind, divergieren die *inviskosen Beiträge* ( $s \rightarrow 0$ ) der Vertikalverschiebung  $W^F$  und der Schwere  $G^F$ . Der Beitrag zur Horizontalverschiebung ist dagegen endlich und lautet

$$U^F = \frac{1}{2k\kappa} g^{(0)} \Sigma^R. \quad (\text{B.72})$$

Die *elastischen Beiträge* ( $s \rightarrow \infty$ ) lassen sich mittels der Poisson'schen Zahl  $2\nu = \lambda_0/(\lambda_0 + \mu_0)$  schreiben:

$$U^E = \frac{1 - 2\nu}{2k\mu_0} g^{(0)} \Sigma^R, \quad (\text{B.73})$$

$$W^E = \frac{1 - \nu}{k\mu_0} g^{(0)} \Sigma^R, \quad (\text{B.74})$$

$$G^E = 2\pi\gamma \left( 1 - \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k\mu_0} \right) \Sigma^R. \quad (\text{B.75})$$

Die Schwere hängt demnach nicht von der Kompressibilität ab und stimmt mit der für ein inkompressibles Medium überein.

Der Vollständigkeit sei hier noch die von [Cathles \(1975, S. 57\)](#) analytisch bestimmte Lösung für einen viskoelastischen Halbraum angegeben. Diese lautet für die Vertikalverschiebung nach Heaviside-Belastung

$$W(t) = \frac{g^{(0)} \Sigma^R}{2k\mu_0} \left\{ 2(1 - \nu) + \frac{t}{\tau} + \left[ \frac{\mu_0}{\kappa} - (1 - 2\nu) \right] (1 - e^{-\alpha t}) \right\}, \quad (\text{B.76})$$

wobei im dritten Term  $\alpha := \frac{2}{3\tau}(1 + \nu)$  eine transiente Relaxation beschreibt, die den Übergang von dem elastischen zum viskosen Verhalten beschreibt, und der zweite Term den linearen Anstieg der Vertikalverschiebung. Die  $\alpha$  entsprechende Relaxationsmode entspricht der Mode CP der Näherungen C1 und C2.

### B.3.2 Näherung C1

Die Koeffizientenmatrix für das homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet gemäß (3.30)

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -k & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda} k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ \frac{4k^2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & -k\rho^{(0)}g^{(0)} & 0 & -\frac{k\lambda}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ -\frac{k\tilde{\lambda}\rho^{(0)}g^{(0)}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & k & -\frac{\rho^{(0)}g^{(0)}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.77})$$

und die Eigenwerte nach (3.72)

$$m_1 = k, \quad m_2 = k \left( \sqrt{1 + \epsilon^2} - \epsilon \right), \quad m_3 = -k, \quad m_4 = -k \left( \sqrt{1 + \epsilon^2} + \epsilon \right). \quad (\text{B.78})$$

Sofern  $m_1 = -m_3 = k$  und  $m_4 = -m_2$  ausgenutzt wird, ergeben sich aus **A** die Fundamentalmatrix und ihre Inverse zu

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 + 2\delta & \frac{m_2}{k} + 2\epsilon & -1 + 2\delta & \frac{m_4}{k} + 2\epsilon \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2k\tilde{\mu}(1 + \delta) & 2k\tilde{\mu} & 2k\tilde{\mu}(1 - \delta) & 2k\tilde{\mu} \\ 2k\tilde{\mu} - 2\tilde{\lambda}k\delta & 2\tilde{\mu}m_2 - 2k\tilde{\lambda}\epsilon & -2k\tilde{\mu} - 2k\tilde{\lambda}\delta & 2\tilde{\mu}m_4 - 2k\tilde{\lambda}\epsilon \end{pmatrix}, \quad (\text{B.79})$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} & -\frac{1}{\delta} - \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} & \frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} & -\frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} \\ -\frac{1}{\delta} - \frac{\tilde{\mu}}{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\sqrt{1 + \epsilon^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \left( \frac{1}{\delta} - \frac{m_4(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}{\tilde{\mu}k} \right) & -\frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta\sqrt{1 + \epsilon^2}} & -\frac{1}{k\sqrt{1 + \epsilon^2}} \left( \frac{m_4}{2k\tilde{\mu}\delta} - \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \right) \\ \frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} - \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} & -\frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} & -\frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta} \\ -\frac{1}{\delta} + \frac{\tilde{\mu}}{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\sqrt{1 + \epsilon^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \left( \frac{1}{\delta} - \frac{m_2(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}{k\tilde{\mu}} \right) & \frac{1}{2k\tilde{\mu}\delta\sqrt{1 + \epsilon^2}} & \frac{1}{k\sqrt{1 + \epsilon^2}} \left( \frac{m_2}{2k\tilde{\mu}\delta} - \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.80})$$

wobei

$$\delta = \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})}, \quad \epsilon = \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}. \quad (\text{B.81})$$

**E** liegt in der Form (B.8) vor.

Die einzelnen Schichtpropagatoren folgen aus  $\mathbf{P}^{(l)} = \mathbf{L}^{(l)} \mathbf{E}^{(l)}(-h) \mathbf{L}^{-1(l)}$ . Die Lösung an der Oberseite des Halbraumes ergibt sich entsprechend der Herleitung in Abschn. B.1.3, S. 110: Hierbei ist  $\mathbf{L}^L$  die Fundamentalmatrix des Halbraumes.

**Quellterm**  $\bar{D}^{(l)}$

Die Abhängigkeit des Integranden  $\tilde{D}(z')$ ,  $C_4 = -g^{(0)} \tilde{\Sigma}^{\text{R}}$  gemäß (3.54) und (3.55) reduziert sich mit (B.7), (B.79) und (B.80) auf  $\mathbf{E}(h)$ . Somit können wir den Quellterm mittels (B.45)–(B.47) berechnen.

Der Quellterm für den Halbraum ergibt sich durch Einsetzen von (B.79) in (B.51):

$$\bar{D}^{(L)} = -\rho_L^{(0)} g_L^{(0)} \left( \frac{X_1^L}{m_3^{(L)} - k} \frac{1}{\tilde{\lambda}_L + \tilde{\mu}_L} + \frac{X_2^L}{m_4^{(L)} - k} \frac{1}{\tilde{\lambda}_L + 2\tilde{\mu}_L} \right). \quad (\text{B.82})$$

**Lösung für homogenen Halbraum**

Einsetzen von (B.79) und (3.40) und (3.40) in (B.28) ergibt

$$\mathbf{X} = \frac{2k\tilde{\mu}g^{(0)}\tilde{\Sigma}^{\text{R}}}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} 1 \\ -(1 - \delta) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.83})$$

und in (B.29) bzw. (B.30) für  $z = 0$

$$\det \mathbf{M} = (2k\tilde{\mu})^2 \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k\tilde{\mu}} - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} \right) - \sqrt{1 + \epsilon^2} (1 - \delta) \right], \quad (\text{B.84})$$

$$\tilde{U} = \frac{2k\tilde{\mu}}{\det \mathbf{M}} \left[ \delta - \left( 1 + \epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2} \right) (1 - \delta) \right] g^{(0)} \tilde{\Sigma}^{\text{R}}, \quad (\text{B.85})$$

$$\tilde{W} = \frac{2k\tilde{\mu}}{\det \mathbf{M}} \delta g^{(0)} \tilde{\Sigma}^{\text{R}}. \quad (\text{B.86})$$

Das lokale Schwereinkrement an der Oberfläche folgt, indem wir in (B.52)  $\tilde{W}$  mittels (B.86) substituieren und  $\bar{D}$  mittels (B.82) und (B.83) sowie den Eigenwerten aus (B.78) darstellen:

$$\tilde{G} = 2\pi\gamma \left[ 1 - \frac{2k\tilde{\mu}}{\det \mathbf{M}} \frac{2\rho^{(0)} g^{(0)} \epsilon (1 - \delta)}{1 + \epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2}} \right] \tilde{\Sigma}^{\text{R}}. \quad (\text{B.87})$$

Die *inviskosen Beiträge* sind durch  $\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{Y}}$  definiert, so dass  $\lim_{s \rightarrow 0} \{\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\} = \{\kappa, 0\}$  und

$$\epsilon' := \lim_{s \rightarrow 0} \epsilon = \lim_{s \rightarrow 0} \delta = \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k\kappa}. \quad (\text{B.88})$$

Die Determinante (B.84) lautet dann

$$\det \mathbf{M} = 2k\tilde{\mu}\rho^{(0)} g^{(0)} \epsilon'. \quad (\text{B.89})$$

Setzen wir (B.88) und (B.89) in (B.85)–(B.87) ein, erhalten wir

$$U^{\text{F}} = \frac{\epsilon'^2 - (1 - \epsilon') (1 - \sqrt{1 + \epsilon'^2})}{\epsilon' \rho^{(0)}} \Sigma^{\text{R}}, \quad (\text{B.90})$$

$$W^{\text{F}} = \frac{1}{\rho^{(0)}} \Sigma^{\text{R}}, \quad (\text{B.91})$$

$$G^{\text{F}} = 2\pi\gamma \left( 1 - 2 \frac{1 - \epsilon'}{1 + \epsilon' + \sqrt{1 + \epsilon'^2}} \right) \Sigma^{\text{R}}. \quad (\text{B.92})$$

Die inviskose Horizontalverschiebung nimmt demnach einen von Null verschiedenen Grenzwert an, die Vertikalverschiebung gleicht dem hydrostatischen Auftrieb und das Schwereinkrement ist ebenfalls von Null verschieden. Dies liegt daran, dass für den inviskosen Grenzwert die Divergenz der Verschiebung im Halbraum nicht verschwindet. Für große Wellenzahlen gilt  $\epsilon' \ll 1$ . Entwickeln wir (B.90) bis  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  und (B.92) bis  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , reduzieren sich die Gleichungen auf

$$U^{\text{F}} = \frac{3}{4k\kappa} g^{(0)} \Sigma^{\text{R}}, \quad (\text{B.93})$$

$$G^{\text{F}} = 2\pi\gamma \frac{3\rho^{(0)} g^{(0)}}{4k\kappa + \rho^{(0)} g^{(0)}} \Sigma^{\text{R}}. \quad (\text{B.94})$$

Die *elastischen Beiträge* ergeben sich aus  $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{Y}}$ , so dass  $\lim_{s \rightarrow \infty} \{\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\} = \{\lambda_0, \mu_0\}$ . Nehmen wir hier ebenfalls an, dass  $\epsilon \ll 1$  gilt, und entwickeln (B.84)–(B.87) bis hin zu Termen mit

$\mathcal{O}(\epsilon)$ , erhalten wir

$$\det \mathbf{M} = 2 k \mu_0 \epsilon \left( 2 k \mu_0 + \rho^{(0)} g^{(0)} \right), \quad (\text{B.95})$$

$$U^E = \frac{2 k \mu_0 \epsilon}{\det \mathbf{M}} \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} g^{(0)} \Sigma^R, \quad (\text{B.96})$$

$$W^E = \frac{2 k \mu_0 \epsilon}{\det \mathbf{M}} \frac{\lambda_0 + 2 \mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} g^{(0)} \Sigma^R, \quad (\text{B.97})$$

$$G^E = 2 \pi \gamma \left( 1 - \frac{4 k \mu_0 \epsilon \rho^{(0)} g^{(0)}}{\det \mathbf{M}} \frac{1 - \delta}{2 + \epsilon} \right) \Sigma^R. \quad (\text{B.98})$$

Setzen wir schließlich (B.95) in (B.96)–(B.98) ein, und substituieren wir die Poisson'sche Zahl gemäß  $2\nu = \lambda/(\lambda + \mu)$ , folgt

$$U^E = \frac{1 - 2\nu}{2 k \mu^{(0)} + \rho^{(0)} g^{(0)}} g^{(0)} \Sigma^R, \quad (\text{B.99})$$

$$W^E = \frac{2(1 - \nu)}{2 k \mu^{(0)} + \rho^{(0)} g^{(0)}} g^{(0)} \Sigma^R, \quad (\text{B.100})$$

$$G^E = 2 \pi \gamma \frac{2 k \mu^{(0)} + \rho^{(0)} g^{(0)} \delta}{2 k \mu^{(0)} + \rho^{(0)} g^{(0)}} \Sigma^R. \quad (\text{B.101})$$

Die Formel (B.100) weicht geringfügig von der von Wolf (1985c, Gl. 23a) ab, stellt aber für kleine Wellenzahlen eine bessere Näherung dar. Die Schwerestörung weicht nur für kleine Wellenzahlen von der Näherung für einen inkompressiblen Halbraum ab, siehe (B.138). Vernachlässigen wir den Quellterm  $\bar{D}$  in (B.52), so lautet in erster Näherung das lokale Schwereinkrement

$$G^{\nu E} = 2 \pi \gamma \frac{2 k \mu^{(0)} (1 - \delta)}{2 k \mu^{(0)} + \rho^{(0)} g^{(0)}} \Sigma^R. \quad (\text{B.102})$$

Damit ist es bei kompressiblen Deformationen nicht gerechtfertigt, den Einfluss der Kompression auf das Schweresignal zu vernachlässigen. Dies widerspricht teilweise den Ergebnissen von Hagedoorn (1999), der unter Vernachlässigung von  $\bar{D}$  eine Verbesserung der Modellierung für die Schwere gegenüber der für einen inkompressiblen, geschichteten elastischen Halbraum sah. Beim Übergang vom lokalen zum materiellen Inkrement wird der Beitrag durch die Verschiebung  $W^E$  im Schwerfeld dominant. Bei Vernachlässigung der Vorspannung  $\rho^{(0)} g^{(0)} = 0$  im jeweiligen Nenner und in  $\epsilon$  stimmen (B.99)–(B.101) mit denen (B.73)–(B.75) für einen nicht gravitierenden elastischen Halbraum überein.

### B.3.3 Näherung C2

Die Koeffizientenmatrix für das homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet gemäß (3.30)

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -k & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda} k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \\ \frac{4 k^2 (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \rho^{(0)} g^{(0)} k & 0 & -\frac{\tilde{\lambda} k}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} & 0 \\ -\rho^{(0)} g^{(0)} k & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.103})$$

und die Eigenwerte

$$m_1 = k\sqrt{1+\epsilon}, \quad m_2 = k\sqrt{1-\epsilon}, \quad m_3 = -k\sqrt{1+\epsilon}, \quad m_4 = -k\sqrt{1-\epsilon}, \quad (\text{B.104})$$

(3.77). Sofern wir  $m_3 = -m_1$  und  $m_4 = -m_2$  ausnutzen, ergeben sich aus  $\mathbf{A}$  die Elemente der Fundamentalmatrix bzw. die ihrer Inversen zu<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} L_{11} &= \gamma + \epsilon, & L_{31} &= k\tilde{\mu} [(2\gamma + \epsilon) m_1/k - \delta], \\ L_{12} &= \gamma - \epsilon, & L_{32} &= k\tilde{\mu} [(2\gamma - \epsilon) m_2/k - \delta], \\ L_{13} &= \gamma + \epsilon, & L_{33} &= k\tilde{\mu} [-(2\gamma + \epsilon) m_1/k - \delta], \\ L_{14} &= \gamma - \epsilon, & L_{34} &= k\tilde{\mu} [-(2\gamma - \epsilon) m_2/k - \delta], \\ L_{21} &= \gamma m_1/k - \delta, & L_{41} &= k\tilde{\mu} (2\gamma + \epsilon) - \rho^{(0)} g^{(0)} m_1/k, \\ L_{22} &= \gamma m_2/k - \delta, & L_{42} &= k\tilde{\mu} (2\gamma - \epsilon) - \rho^{(0)} g^{(0)} m_2/k, \\ L_{23} &= -\gamma m_1/k - \delta, & L_{43} &= k\tilde{\mu} (2\gamma + \epsilon) + \rho^{(0)} g^{(0)} m_1/k, \\ L_{24} &= -\gamma m_2/k - \delta, & L_{44} &= k\tilde{\mu} (2\gamma - \epsilon) + \rho^{(0)} g^{(0)} m_2/k, \end{aligned} \quad (\text{B.105})$$

$$\begin{aligned} L_{11}^{-1} &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{k\tilde{\mu} (\gamma m_1/k + \delta) (\epsilon - \gamma)}{\alpha m_1/k} - \frac{1}{\epsilon} \right], & L_{13}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{1}{k\tilde{\mu} \epsilon m_1/k}, \\ L_{21}^{-1} &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{k\tilde{\mu} (\gamma m_2/k + \delta) (\epsilon + \gamma)}{\alpha m_2/k} + \frac{1}{\epsilon} \right], & L_{23}^{-1} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{k\tilde{\mu} \epsilon m_2/k}, \\ L_{31}^{-1} &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{k\tilde{\mu} (\gamma m_1/k - \delta) (\epsilon - \gamma)}{\alpha m_1/k} - \frac{1}{\epsilon} \right], & L_{33}^{-1} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{k\tilde{\mu} \epsilon m_1/k}, \\ L_{41}^{-1} &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{k\tilde{\mu} (\gamma m_2/k - \delta) (\epsilon + \gamma)}{\alpha m_2/k} + \frac{1}{\epsilon} \right], & L_{43}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{1}{k\tilde{\mu} \epsilon m_2/k}, \\ L_{12}^{-1} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(\rho^{(0)} g^{(0)} m_1/k + \gamma k\tilde{\mu}) (\epsilon - \gamma)}{\alpha m_1/k} - \frac{1}{\epsilon m_1/k} \right], & L_{14}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{(\gamma m_1/k + \delta) (\epsilon - \gamma)}{\alpha m_1/k}, \\ L_{22}^{-1} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(\rho^{(0)} g^{(0)} m_2/k + \gamma k\tilde{\mu}) (\epsilon + \gamma)}{\alpha m_2/k} + \frac{1}{\epsilon m_2/k} \right], & L_{24}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{(\gamma m_2/k + \delta) (\epsilon + \gamma)}{\alpha m_2/k}, \\ L_{32}^{-1} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(\rho^{(0)} g^{(0)} m_1/k - \gamma k\tilde{\mu}) (\epsilon - \gamma)}{\alpha m_1/k} + \frac{1}{\epsilon m_1/k} \right], & L_{34}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{(\gamma m_1/k - \delta) (\epsilon - \gamma)}{\alpha m_1/k}, \\ L_{42}^{-1} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(\rho^{(0)} g^{(0)} m_2/k - \gamma k\tilde{\mu}) (\epsilon + \gamma)}{\alpha m_2/k} - \frac{1}{\epsilon m_2/k} \right], & L_{44}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{(\gamma m_2/k - \delta) (\epsilon + \gamma)}{\alpha m_2/k}. \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

und  $\mathbf{E}$  in der Form (B.8). In (B.104)–(B.106) sind bereits

$$\begin{aligned} \alpha &:= \epsilon \left( k\tilde{\mu} \gamma^2 - \delta \rho^{(0)} g^{(0)} \right), & \gamma &:= \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\ \delta &:= \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}, & \epsilon &:= \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k\sqrt{\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}} \end{aligned} \quad (\text{B.107})$$

<sup>1</sup> Beachte die unterschiedliche Reihenfolge der Indizes in (B.105) und (B.106).

benutzt worden.

Die Lösung für den Halbraum folgt aus der Regularitätsbedingung für  $z \rightarrow \infty$  (Abschn. B.1.3, S. 110). Abhängig davon, ob die Eigenwerte reell oder komplex sind, muss die Halbraumlösung unterschiedlich bestimmt werden.

**1.**  $\epsilon < 1 \Rightarrow m_i \in \mathbb{R}$ :

Mit  $m_{1,2} > 0$  lautet die Halbraumlösung

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z_L + h) = x_1^L \mathbf{L}_3^{(L)} e^{m_3^{(L)} z} + x_2^L \mathbf{L}_4^{(L)} e^{m_4^{(L)} z}, \quad (\text{B.108})$$

wobei  $\mathbf{L}_i^{(L)}$  den  $i$ -ten Eigenvektor bzw. die  $i$ -te Spalte der Fundamentalmatrix bezeichnet.<sup>1</sup> Die Berechnung von  $\mathbf{X}^H$  erfolgt entsprechend Abschn. B.1.3, S. 110.

**2.**  $\epsilon > 1 \Rightarrow m_1 = -m_3 \in \mathbb{R}$  und  $m_2 = -m_4 \in \mathbb{I}$ :

Dieser Fall verletzt die Regularitätsbedingung, dass die Störung für  $z \rightarrow \infty$  verschwinden muss (S. 42).

**3.**  $\epsilon(s) \in \mathbb{I}$  für  $s_3^B < s < 0 \Rightarrow m_1 = \bar{m}_2 = -m_3 = -\bar{m}_4 \in \mathbb{C}$ :

Die Eigenwerte lassen sich o. B. d. A. mit  $m := m_1$  und somit

$$m^R := k \sqrt{\frac{\sqrt{1 + |\epsilon|^2} + 1}{2}}, \quad m^I := k \sqrt{\frac{\sqrt{1 + |\epsilon|^2} - 1}{2}} \quad (\text{B.109})$$

in der Form

$$m_i = \pm (m^R \pm i m^I) \quad (\text{B.110})$$

darstellen. Da die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  reell ist, muss mit  $m_{2,4} = \bar{m}_{1,3}$  auch  $\mathbf{L}_{2,4} = \bar{\mathbf{L}}_{1,3}$  gelten. Mit  $\text{Re}\{m_{1,2}\} > 0$  beschränkt sich die Halbraumlösung auf den dritten und vierten Eigenvektor:

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z_L + h) = [(a \mathbf{L}_3^R - b \mathbf{L}_3^I) \cos(m^I h) - (a \mathbf{L}_3^R + b \mathbf{L}_3^I) \sin(m^I h)] e^{-m^R h}. \quad (\text{B.111})$$

Die Komponenten des Eigenvektors lauten mit (B.110) in (B.105)

$$\mathbf{L}_3^R = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\delta - \gamma m^R/k \\ -k \tilde{\mu} (\delta + 2\gamma m^R/k - |\epsilon| m^I/k) \\ 2\gamma k \tilde{\mu} + \rho^{(0)} g^{(0)} m^R/k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_3^I = \begin{pmatrix} |\epsilon| \\ -\gamma m^I/k \\ -k \tilde{\mu} (2\gamma m^I/k + |\epsilon| m^R/k) \\ k \tilde{\mu} |\epsilon| + \rho^{(0)} g^{(0)} m^I/k \end{pmatrix}, \quad (\text{B.112})$$

und die Anpassung der Randbedingungen erfolgt über die Matrix

$$\mathbf{H}' = (\mathbf{L}_3^R, -\mathbf{L}_3^I) \mathbf{X}'^L, \quad (\text{B.113})$$

vergleiche hierzu (B.18).

**4.**  $s \in \mathbb{C}$ :

Dieser Fall tritt bei der inversen Laplace-Transformation auf, da die Bereiche, in denen Fall 2 relevant ist, durch eine numerische Integration ausgeschlossen werden müssen (Abschn. 3.5, S. 43). Wir sehen jedoch von einer analytischen Darstellung in Real- und Imaginärteil aufgeteilt ab und verwenden direkt den Fall 1 mit einer komplexen Arithmetik, die bei Implementierung in FORTRAN möglich ist.

<sup>1</sup> Das hochgestellte ( $L$ ) zur Kennzeichnung des Halbraumes ist hier unterdrückt.

**Quellterm  $\bar{D}_l$** 

Der Quellterm  $\bar{D}_l$  für das Schwereinkrement ergibt sich wie in [Abschn. B.3.2, S. 117](#) aus [\(B.45\)](#). Auch hier kann die Integration über die Schichtdicke auf die Diagonalmatrix reduziert werden, nur dass diese in Abhängigkeit von der Wertigkeit der Eigenwerte unterschiedliche Formen aufweist, je nachdem ob die Eigenwerte reell oder komplex sind. Entsprechend [Abschn. B.3.2, S. 117](#) ergeben sich für die Schichten  $l = 1, \dots, L-1$  die Elemente von  $\bar{\mathbf{E}}$  aus [\(B.47\)](#). Dass diese komplex sein können, ist von untergeordneter Bedeutung, da  $\bar{\mathbf{P}}$  reell sein muss.

Für den Halbraum  $l = L$  müssen dagegen die Fälle 1 und 3 gesondert betrachtet werden:

1.  $\epsilon < 1$ :

$$\bar{D}^{(L)} = \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \left[ \frac{X_1^L}{m_3 - k} \left( \sqrt{1 + \epsilon} - \frac{k \tilde{\mu} \epsilon}{\rho^{(0)} g^{(0)}} \right) + \frac{X_2^L}{m_4 - k} \left( \sqrt{1 - \epsilon} + \frac{k \tilde{\mu} \epsilon}{\rho^{(0)} g^{(0)}} \right) \right]. \quad (\text{B.114})$$

3.  $\epsilon \in \mathbb{I}$ :

$$\bar{D}^{(L)} = -\frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \left[ X_1^L \frac{m^R/k (k + m^R - m^I)}{(k + m^R)^2 + (m^I)^2} - X_2^L \frac{\left( m^I/k - \frac{k \tilde{\mu} |\epsilon|}{\rho^{(0)} g^{(0)}} \right) (k + m^R + m^I)}{(k + m^R)^2 + (m^I)^2} \right]. \quad (\text{B.115})$$

Der Ausdruck [\(B.114\)](#) berechnet sich wie in [\(B.50\)](#). Zur Bestimmung von [\(B.115\)](#) ist die Lösung [\(B.111\)](#) in [\(B.44\)](#) eingesetzt worden, so dass mittels [\(B.48\)](#)

$$\bar{D}^{(L)} = \frac{X_1^L D^R - X_2^L D^I}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \int_{-\infty}^0 \cos(m^I z) e^{-(m^R+k)z} dz - \frac{X_1^L D^R + X_2^L D^I}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \int_{-\infty}^0 \sin(m^I z) e^{-(m^R+k)z} dz. \quad (\text{B.116})$$

Mit [\(B.112\)](#) sind dabei

$$D^R := L_{43}^R - 2k \tilde{\mu} L_{13}^R = \rho^{(0)} g^{(0)} m^R/k, \quad (\text{B.117})$$

$$D^I := L_{43}^I - 2k \tilde{\mu} L_{13}^I = \rho^{(0)} g^{(0)} m^I/k - k \tilde{\mu} |\epsilon|, \quad (\text{B.118})$$

und die Integrale lauten

$$\int_{-\infty}^0 \left\{ \cos(m^I z) e^{-m^R z}, \sin(m^I z) e^{-m^R z} \right\} e^{-kz} dz = \frac{-1}{(k + m^R)^2 + (m^I)^2} \{k + m^R, m^I\}. \quad (\text{B.119})$$

**Lösung für homogenen Halbraum**

1.  $\epsilon < 1$ :

Einsetzen von (B.105) und (3.40) in (B.30) ergibt für  $z = 0$

$$\det \mathbf{M} = -(k \tilde{\mu})^2 \times \tag{B.120}$$

$$\left[ \left( 4\gamma^2 - \epsilon^2 - \delta \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k \tilde{\mu}} \right) (\sqrt{1+\epsilon} - \sqrt{1-\epsilon}) - 2\epsilon \left( \delta - \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k \tilde{\mu}} \sqrt{1-\epsilon^2} \right) \right], \tag{B.121}$$

$$\tilde{U} = \frac{k \tilde{\mu} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R}{\det \mathbf{M}} \left( (2\gamma^2 - \epsilon^2) (\sqrt{1+\epsilon} - \sqrt{1-\epsilon}) - \gamma \epsilon (\sqrt{1+\epsilon} + \sqrt{1-\epsilon}) - 2\epsilon \delta \right), \tag{B.122}$$

$$\tilde{W} = \frac{-k \tilde{\mu} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R}{\det \mathbf{M}} \left( \gamma \delta (\sqrt{1+\epsilon} - \sqrt{1-\epsilon}) + \epsilon \delta (\sqrt{1+\epsilon} + \sqrt{1-\epsilon}) + 2\gamma \epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \right). \tag{B.123}$$

### 3. $\epsilon \in \mathbb{I}$ :

Die Komponenten an der Oberfläche ergeben sich, indem wir (B.112), (B.113) und (3.40) in (B.30) berücksichtigen:

$$\det \mathbf{M} = k^2 \tilde{\mu}^2 \left[ \left( 4\gamma^2 + |\epsilon|^2 - \delta \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k \tilde{\mu}} \right) m^I/k - |\epsilon| \left( \delta - \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{k \tilde{\mu}} \sqrt{1+|\epsilon|^2} \right) \right]. \tag{B.124}$$

$$\tilde{U} = -\frac{k \tilde{\mu} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R}{\det \mathbf{M}} \left[ \left( 2\gamma^2 + |\epsilon|^2 \right) m^I/k - |\epsilon| (\gamma m^R/k + \delta) \right], \tag{B.125}$$

$$\tilde{W} = \frac{k \tilde{\mu} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R}{\det \mathbf{M}} \left[ \delta (|\epsilon| m^R + \gamma m^I) / k + \gamma |\epsilon| \sqrt{1+|\epsilon|^2} \right]. \tag{B.126}$$

Für  $\epsilon, \delta \ll 1$  und Entwicklung von (B.121)–(B.123) bis  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  und  $\mathcal{O}(\delta^2)$  folgt für die *elastischen Beiträge*:

$$U^E = \frac{1 - 2\nu + 4(1-\nu)^2 \delta}{2k \mu^{(0)} + 2(1-\nu) \rho^{(0)} g^{(0)}} g^{(0)} \Sigma^R, \tag{B.127}$$

$$W^E = \frac{2(1-\nu) + (5-\nu) \gamma^{-1} \delta}{2k \mu^{(0)} + 2(1-\nu) \rho^{(0)} g^{(0)}} g^{(0)} \Sigma^R, \tag{B.128}$$

$$G^E = 2\pi \gamma \frac{2k \mu^{(0)} + (1-2\nu) \rho^{(0)} g^{(0)}}{2k \mu^{(0)} + 2(1-\nu) \rho^{(0)} g^{(0)}} \Sigma^R. \tag{B.129}$$

### B.3.4 Näherung IC

Substituieren wir in den Feldgleichungen (3.86) und (3.87)  $\tilde{R}$  mittels (3.25) sowie  $\tilde{T}$  mittels

$$\tilde{T} = -\tilde{P} + 2\tilde{\mu} \partial_z \tilde{W} \tag{B.130}$$

und berücksichtigen  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$  in der Form (3.88), lautet die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -k & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 4k^2 \tilde{\mu} & -\rho^{(0)} g^{(0)} k & 0 & -k \\ -\rho^{(0)} g^{(0)} k & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \tag{B.131}$$

mit den Eigenwerten

$$m_1 = k, \quad m_2 = -k \quad (\text{B.132})$$

der Vielfachheit Zwei. Die Fundamentalmatrix und ihre Inverse ergeben sich damit zu

$$\mathbf{L}(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & -1 & -z \\ 1 & -\frac{1}{k} + z & 1 & \frac{1}{k} + z \\ 2k\tilde{\mu} & 2k\tilde{\mu}z & 2k\tilde{\mu} & 2k\tilde{\mu}z \\ 2k\tilde{\mu}(1-\epsilon) & -2k\tilde{\mu}(1-\epsilon)\left(\frac{1}{k}-z\right) & -2k\tilde{\mu}(1+\epsilon) & -2k\tilde{\mu}(1+\epsilon)\left(\frac{1}{k}+z\right) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.133})$$

$$\mathbf{L}^{-1}(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-kz & kz(1+\epsilon) & \frac{1-kz}{2k\tilde{\mu}} & \frac{z}{2\tilde{\mu}} \\ k & -k(1+\epsilon) & \frac{1}{2\tilde{\mu}} & -\frac{1}{2\tilde{\mu}} \\ -1-kz & -kz(1-\epsilon) & \frac{1+kz}{2k\tilde{\mu}} & \frac{z}{2\tilde{\mu}} \\ k & k(1-\epsilon) & -\frac{1}{2\tilde{\mu}} & -\frac{1}{2\tilde{\mu}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.134})$$

$\mathbf{E}$  liegt in der Form (B.8) vor und

$$\epsilon := \frac{\rho^{(0)} g^{(0)}}{2k\tilde{\mu}}. \quad (\text{B.135})$$

Der Propagator kann wiederum aus dem Produkt  $\mathbf{P}(z) = \mathbf{L}(z) \mathbf{E}(z) \mathbf{L}^{-1}(z)$  gewonnen werden, es wird aber auf eine Auflistung verzichtet, da er z. B. in [Wolf \(1985b\)](#) gefunden werden kann.

### Lösung für homogenen Halbraum

Die Lösung lautet an der Oberfläche:

$$\tilde{U} = 0, \quad (\text{B.136})$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{2k\tilde{\mu} + \rho^{(0)} g^{(0)}} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^{\text{R}}, \quad (\text{B.137})$$

$$\tilde{G} = 2\pi\gamma \frac{2k\tilde{\mu}}{2k\tilde{\mu} + \rho^{(0)} g^{(0)}} \tilde{\Sigma}^{\text{R}}. \quad (\text{B.138})$$

Sie geht aus (B.61) hervor.  $\mathbf{X}$  ergibt sich aus (B.26), wobei mit (B.29) die Funktionalmatrix

$$\mathbf{M} = 2k\tilde{\mu} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -(1+\epsilon) & (1+\epsilon)\left(\frac{1}{k}+z\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.139})$$

und ihre Determinante  $\det \mathbf{M} = -(2\tilde{\mu}k)^2 (1+\epsilon)/k$  lautet. Damit folgt

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \frac{C_4^{(1)}}{2\tilde{\mu}(1+\epsilon)}. \quad (\text{B.140})$$

und mit (B.9) und (B.18)

$$\mathbf{Y}(z) = -\mathbf{L}_4 \frac{C_4^{(1)} e^{-kz}}{2\tilde{\mu}(1+\epsilon)}. \quad (\text{B.141})$$

Daher trägt nur der vierte Eigenvektor zur Halbraumlösung bei. Einsetzen von (B.133), (B.135),  $C_4^{(1)} = -g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R$  in (B.141) liefert für  $z = 0$  (B.136) und (B.137), Einsetzen von (B.137) in (B.52) dann (B.138).

(B.138) stimmt für kleine  $\epsilon$  mit (B.71) für das kompressible Modell ohne hydrostatische Vorspannung, Näherung C0, überein.

Die *inviskosen Beiträge* ( $s \rightarrow 0$ ) repräsentieren mit

$$U^F = 0, \quad (\text{B.142})$$

$$W^F = \frac{g^{(0)} \Sigma^R}{\rho^{(0)} g^{(0)}}, \quad (\text{B.143})$$

$$G^F = 0 \quad (\text{B.144})$$

wie erwartet das hydrostatische Gleichgewicht einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Die *elastischen Amplituden* ( $s \rightarrow \infty$ ) ergeben sich unmittelbar, wenn man in (B.136)–(B.138) den Scherrelaxationsmodul durch den unrelaxierten Schermodul ersetzt:

$$U^E = 0, \quad (\text{B.145})$$

$$W^E = \frac{1}{2k\mu_0 + \rho^{(0)}g^{(0)}} g^{(0)} \tilde{\Sigma}^R, \quad (\text{B.146})$$

$$G^E = 2\pi\gamma \frac{2k\mu_0}{2k\mu_0 + \rho^{(0)}g^{(0)}} \tilde{\Sigma}^R. \quad (\text{B.147})$$

# C

---

## Eigenschaften der spektralen Lösungen

In diesem Abschnitt werden einige Konzepte vorgestellt, die bei der Anwendung der Viskoelastodynamik auf quasistatische Probleme üblich sind. Darunter fallen die aus der Variationsrechnung folgenden Kernfunktionen ([Abschn. C.1, S. 127](#)) und die Relaxationsmoden ([Abschn. C.2, S. 129](#)) als Eigenlösungen der Bewegungsgleichung.

### C.1 Anwendung der Variationsrechnung

[Backus & Gilbert \(1967\)](#) formulierten für die elastodynamische Bewegungsgleichung die Variationsgleichung der kanonischen Lagrange-Funktion, bzw. Energiegleichung  $L$ :

$$\int_{\mathcal{X}_+} (\partial_{p_k} L \delta p_k + \partial_{\lambda} L \delta \lambda) dv^{(0)} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Diese setzt Störungen  $\delta \lambda$  in den Frequenzen der Eigenschwingungen zu den Störungen  $\delta p_k$  in den Materialparametern des Erdmodelles in Beziehung und ermöglicht die Inversion des Eigenschwingungsspektrums hinsichtlich der elastischen Materialparameter der Erde. Der Ansatz von [Peltier \(1976\)](#), diese Variationsrechnung auf die viskoelastische Bewegungsgleichung zu übertragen, lässt sich wie folgt skizzieren.

- Die Relaxationsmoden ergeben sich aus der Anwendung des Residuenkalküls auf die Rücktransformation der spektralen Lösung in den Zeitbereich ([Abschn. 3.5.2, S. 45](#)):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{Y}}(s)}{s} \right\} = \mathbf{Y}^E \sigma^t(t') \delta(t - t') - \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{Y}^N(s_i)}{s_i \partial_s \det \mathbf{M}(s)|_{s=s_i}} \tilde{\sigma}^t(s_i) (1 - e^{s_i t}). \quad (\text{C.2})$$

Die Matrix  $\mathbf{M}(s)$  passt die Randbedingungen an der Oberfläche an die Randbedingungen an der Oberseite des Halbraumes an. Die Lösungen

$$s_i \in \{s \in \mathbb{R} \mid \det \mathbf{M}(s) = 0\} \quad (\text{C.3})$$

bezeichnen die Werte, für die Lösungen des Gleichungssystems für homogene Randbedingungen existieren, d. h.  $s_i$  ist ein Eigenwert der Bewegungsgleichung. Die weitergehende Analyse von [Tromp & Mitrovica \(1999a\)](#) überträgt die für Eigenschwingungen übliche Nomenklatur auf die Relaxationsmoden.

- Für die Bewegungsgleichung ([3.8](#)) lässt sich ein Funktional  $L$  formulieren, dessen Variation  $\delta L = 0$  die Relaxationsmoden liefert. Allgemein hat das Funktional die Form

$$L(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{T} \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}), \quad (\text{C.4})$$

wobei der Differentialoperator  $\mathbf{T}$  der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\mathcal{X}_+ \quad (\text{C.5})$$

ein selbstadjungierter Operator und die Verschiebung  $\mathbf{u}$  so oft wie nötig stetig differenzierbar sein muss (Plaschko und Brod, 1989, S. 183). Das innere Produkt ist über

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{X}_+} \mathbf{u} \mathbf{v}^* dv^{(0)} \quad (\text{C.6})$$

definiert. Peltier zeigte, dass der Differentialoperator die Bedingung der Selbstadjungiertheit erfüllt, so dass dieser Formalismus auf das viskoelastische Problem anwendbar ist.

- Neben der Berechnung der Eigenlösungen kann das Funktional genutzt werden, um über das Rayleigh-Prinzip Kernfunktionen zu berechnen, die die Variation des Eigenwertes als Variation der Struktur des Erdmodelles beschreiben. Für die Variation des Schermoduls kann man

$$\int_{\mathcal{X}_+} \tilde{\varepsilon}_{ij}^d \tilde{\varepsilon}_{ij}^d \delta\tilde{\mu} da^{(0)} = 0 \quad (\text{C.7})$$

herleiten. Dieser Ausdruck hat die Dimension einer Energie (Abschn. A.3.4, S. 102). Der Deviator  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^d$  ist gemäß (A.7) und (A.30) eine lineare Funktion der Eigenlösungen.

Nimmt man für den Schermodul in (C.7) Maxwell-Viskoelastizität gemäß  $\tilde{\mu}(s) = \mu_0/(1+(s\tau)^{-1})$  an, kann man durch seine Variation nach  $s$  und  $\tau$  in (C.1),

$$\delta\tilde{\mu}(\tau, s) = \partial_\tau \tilde{\mu}(\tau, s)|_s \delta\tau + \partial_s \tilde{\mu}(\tau, s)|_\tau \delta s \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{\tilde{\mu}(s)^2}{\mu_0 \tau^2 s} \delta\tau + \frac{\tilde{\mu}(s)^2}{\mu_0 \tau s^2} \delta s, \quad (\text{C.9})$$

eine Kernfunktion  $\tilde{K}_\tau(s_i)$  herleiten, die die Variation in der Eigenmode  $s_i$  als Variation der tiefenabhängigen Maxwell-Zeit  $\tau(z)$  darstellt:

$$\frac{\delta s_i}{s_i} = - \int_z \tilde{K}(s_i) \frac{\delta\tau}{\tau} dz \quad (\text{C.10})$$

mit

$$\tilde{K}(s_i) = \frac{\frac{\tilde{\mu}(s_i)}{\mu_0 \tau} E_\mu(s_i)}{\int_z \frac{\tilde{\mu}(s_i)}{\mu_0 \tau} E_\mu(s_i) dz}. \quad (\text{C.11})$$

Die bereits eingesetzte Scherpotentialdichte  $E_\mu(s_i)$  berechnet sich aus (A.51) bzw. (A.53), wobei sich die Verschiebungskomponenten  $U, W$  und die Spannungskomponenten  $R, T$  als Lösungen des homogenen viskoelastischen Gleichungssystems (3.1) für den Eigenwert  $s_i$  ergeben. (C.11) ist nur dann von Null verschieden, wenn die betrachtete Schicht viskoelastisch ist. Da in jeder Schicht der unrelaxierte Schermodul und die Viskosität konstant sind, wird  $\tilde{K}(s_i)$  über die gesamte Schichtdicke integriert. Dann ist

$$\frac{\delta s_i}{s_i} = - \sum_{n=1}^L \tilde{K}_n(s_i) \frac{\delta\tau_n}{\tau_n} \quad (\text{C.12})$$

mit  $L$  der Schichtzahl und

$$\bar{K}_n(s_i) = \int_{z_{n-1}}^{z_n} \tilde{K}(s_i) dz \quad (\text{C.13})$$

als Beitrag der  $n$ -ten Schicht. Nach (C.11) gilt  $\sum_{n=1}^L \bar{K}_n(s_i) = 1$ .

## C.2 Physikalische Bedeutung der Relaxationsmoden

Die Eigenlösungen  $\mathcal{S}_i^X = \{s_i, \mathbf{u}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , der Laplace- und Hankel-transformierten Feldgleichungen für ein Erdmodell X (Abschn. C.1, S. 127) liefern als Eigenwerte  $s_i \in \mathbb{R}$  inverse Relaxationszeiten und als Eigenfunktionen  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^3$  charakteristische Verschiebungsfelder. Beide sind Funktionen der Wellenzahl  $n$ , wobei die Nummerierung in  $i$  entsprechend der Reihenfolge von  $-s_i$  erfolgt.

Ein den Erdmantel repräsentierender homogener, inkompressibler, viskoelastischer Halbraum stellt für die vorgegebene Geometrie das einfachste Erdmodell dar (Erdmodell U). Es liefert genau eine Eigenlösung  $\mathcal{S}^U$  deren Eigenwert

$$s(n) = \frac{\tau^{-1}}{1 + \frac{2n\mu_0}{\rho^{(0)}g^{(0)}R_\oplus}} \quad (\text{C.14})$$

lautet (Wolf, 1997, S. 48), wobei  $\eta$  die Viskosität,  $\mu_0$  der Relaxationsmodul,  $\tau = \eta/\mu_0$  die Maxwell-Zeit,  $\rho^{(0)}$  die Dichte des Halbraumes,  $g^{(0)}$  die vertikal wirkende Schwere und  $R_\oplus$  der Erdradius sind.

Modifiziert man das Erdmodell durch Hinzufügen weiterer Schichten mit abgeänderten Materialparametern, so erhöht sich die Anzahl der Eigenlösungen für jeden Dichtekontrast zwischen viskoelastischen Schichten um eins und für jede Änderung in den viskoelastischen Parametern um zwei (Vermeersen *et al.*, 1996a; Wu & Ni, 1996). Der Übergang von einer elastischen zu einer viskoelastischen Schicht liefert dagegen nur eine zusätzliche Mode. Für das Modell EL in Näherung IC, das aus einer elastischen Lithosphäre über einem viskoelastischen Halbraum besteht, ergeben sich somit zwei Eigenlösungen  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$  und  $\mathcal{S}_2^{\text{EL}}$  als Funktion von  $n$ .

Anhand des Relaxationszeitspektrums  $-s_i^{-1}(n)$  (Abb. C.1a auf S. 131) kann man folgende Charakteristika der Eigenlösungen für die Erdmodelle U und EL diskutieren:

- Für kleine  $n$  deckt sich der Eigenwert von  $\mathcal{S}_2^{\text{EL}}$  mit dem Eigenwert des Halbraummodelles.
- Für die Eigenwerte von  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$  und  $\mathcal{S}_2^{\text{EL}}$  kommt es zu einer Vertauschung nahe  $n = 4$ . Bei näherer Betrachtung (Ausschnitt in Abb. C.1 auf S. 131a) erkennt man, dass sich die Eigenwerte einander nähern, aber nicht kreuzen. Damit bleiben die Eigenwerte einfach und isoliert. Dies ist von Bedeutung, da das Heaviside'sche Theorem zur Berechnung der Residuen nur für einfache und isolierte Nullstellen (Eigenwerte) anwendbar ist (siehe Abschnitt 3.5.2).
- Ab  $n \simeq 20$  differieren die Eigenwerte von  $\mathcal{S}^U$  und  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$  zusehends. Dies lässt sich dahingehend deuten, dass die endliche Biegesteifigkeit der elastischen Platte an Einfluss gewinnt.
- Für große  $n$  nähern sich die beiden Eigenwerte des Modelles EL dem Wert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{1,2}(n) = \frac{\mu_2}{\eta_2} \left( 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-1}. \quad (\text{C.15})$$

Eine vertieftes Verständnis der Relaxationsmoden ergibt sich aus der Untersuchung der Deformation. Dazu betrachten wir die Scherpotentialdichten  $E_\mu$  der Eigenfunktionen ([Abschn. A.3.4, S. 102](#)). Wir zeigen ihre Tiefenverteilung für die Wellenzahlen  $n = 4, 10$  und  $100$  ([Abb. C.1b auf der gegenüberliegenden Seite](#)).

- Die Scherpotentialdichte verschwindet für  $\mathcal{S}^U$  an der Oberfläche, hat ein Maximum bei  $R_\oplus/n$  (z. B. [Wolf, 1997, S. 44ff](#)) und nimmt dann mit der Tiefe exponentiell ab.
- Die Scherpotentialdichte von  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$  ist in der Lithosphäre für  $n = 4$  endlich, hat eine Unstetigkeit mit Vorzeichenwechsel an der Grenzfläche zum Mantel und nimmt dann mit der Tiefe exponentiell ab. Diese Charakteristika weisen mit entsprechend reduzierter Eindringtiefe  $\mathcal{S}_2^{\text{EL}}$  für  $n = 10$  und  $100$  auf. Der Verlauf für  $n = 100$  zeigt auch einen deutlichen Abfall zur Oberfläche. Desweiteren tritt ein Nebenmaximum in größerer Tiefe auf.
- Das Scherpotential von  $\mathcal{S}_2^{\text{EL}}$  ist in der Lithosphäre für  $n = 4$  ebenfalls endlich und hat wiederum eine Unstetigkeit an der Grenzfläche zum Mantel. Innerhalb des Mantels ähnelt der Verlauf dem für  $\mathcal{S}^U$ , nur dass das Maximum leicht nach oben verschoben ist. Dieses Verhalten zeigt für  $n = 10$  das Scherpotential von  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$ , so dass zwischen  $n = 4$  und  $5$  die physikalische Bedeutung der Eigenlösungen vertauscht wird. Für  $n = 100$  zeigt das Scherpotential von  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$  einen ähnlichen Verlauf wie für  $n = 10$ , jedoch mit einem Maximum innerhalb der Lithosphäre.

Der Verlauf der Relaxationszeitenspektren ([Abb. C.1a auf der gegenüberliegenden Seite](#)) sowie der Eigenfunktionen ([Abb. C.1b](#)) legt die Einführung physikalisch begründeter Relaxationsmoden nahe, die die Eigenlösungen ersetzen. Die Übergänge, an denen es zu einer Vertauschung in der Zuordnung der Eigenlösungen zu den Moden kommt, ergeben im Relaxationszeitenspektrum eine Kreuzung der Moden. Für das Erdmodell EL ergeben sich somit folgende Relaxationsmoden: Die Mode, die sich für kleine  $n$  wie die Eigenlösung von Erdmodell U verhält, wird als fundamentale Mantelmode M0 bezeichnet. Die zweite Eigenlösung, die im Scherpotential einen exponentiellen Abfall von der Lithosphärenunterseite zeigt, wird als fundamentale Lithosphärenmode L0 bezeichnet.

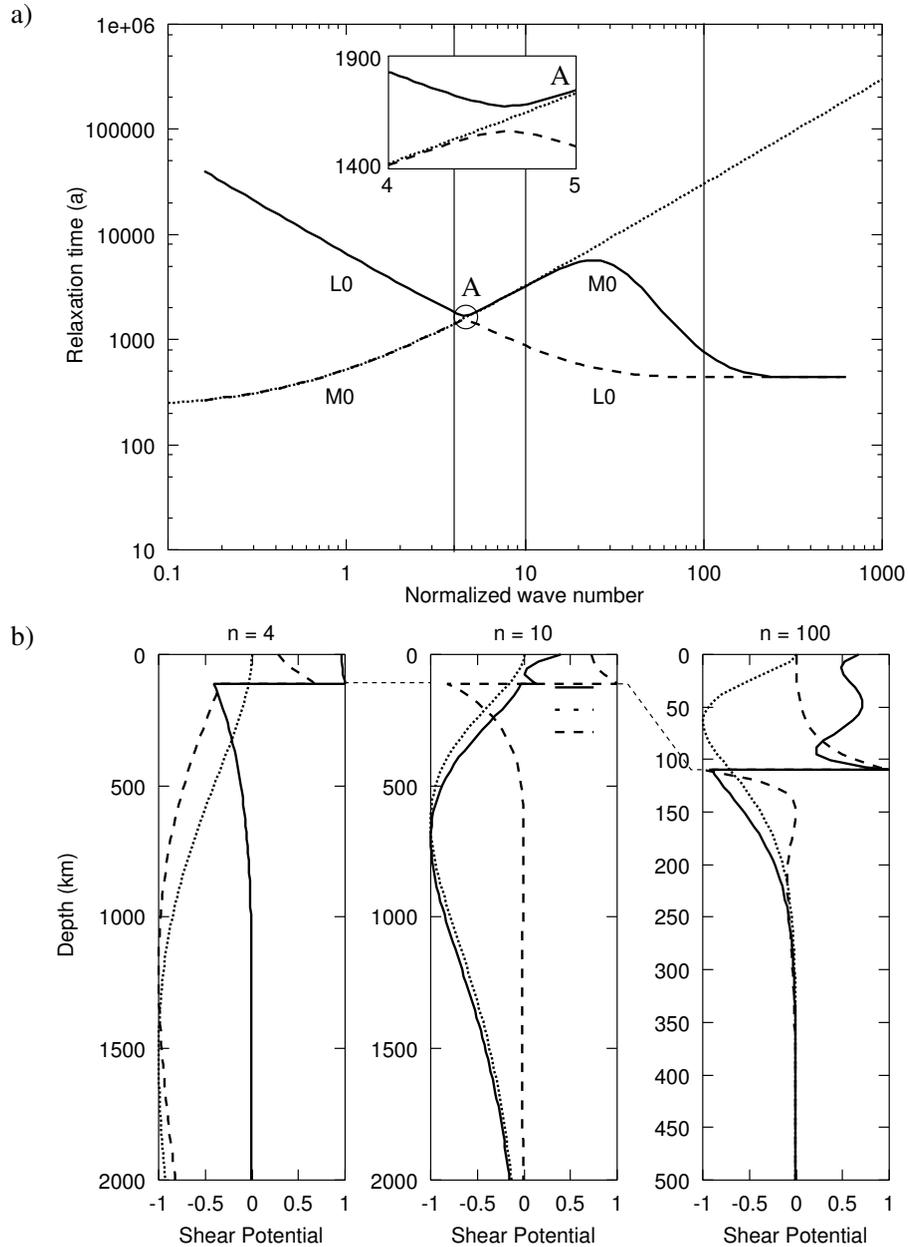


Abbildung C.1: a) Relaxationszeitspektren für die Eigenlösungen  $\mathcal{S}^U$  (gepunktet),  $\mathcal{S}_1^{\text{EL}}$  (durchgezogen) und  $\mathcal{S}_2^{\text{EL}}$  (gestrichelt); b) die entsprechenden Scherpotentiale der Eigenlösungen gemäß (A.53) für  $n = 4, 10$  und  $100$  als Funktion der Tiefe. Der Ausschnitt in a) verdeutlicht die Vertauschung der Eigenlösungen. Die Lithosphärenuntergrenze liegt bei  $110$  km (gestrichelt zwischen den Plots in b), für  $n = 100$  ist der Tiefenbereich reduziert. Die Bezeichnungen M0 und L0 ordnen den Eigenlösungen die sich aus der Diskussion ergebenden Relaxationsmoden zu.

# Literaturverzeichnis

Die verwendeten Abkürzungen der Zeitschriftentitel entsprechen der ISO-Norm, zu finden zum Beispiel in den Chemical Abstracts.

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Washington, D. C. 100, 106
- Alterman, Z., Jarosch, H. & Pekeris, C. L., 1959. Oscillations of the earth. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 252: 80–95. 5, 49
- Amelung, F. & Wolf, D., 1994. Viscoelastic perturbations of the earth: significance of the incremental gravitational force in models of glacial isostasy. *Geophys. J. Int.*, 117: 864–879. 5
- Anderson, D. L., 1995. Lithosphere, asthenosphere, and perisphere. *Rev. Geophys.*, 33: 125–149. 7, 76, 78
- Arfken, G., 1985. *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd edn. Academic Press, Inc., San Diego. 45
- Arvidsson, R., 1996. Fennoscandian earthquakes: whole crustal rupturing related to postglacial rebound. *Science*, 274: 744–746. 75, 77
- Backus, G. E. & Gilbert, J. F., 1967. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13: 247–276. 127
- Bailey, R. C., 1999. Gravity-driven continental overflow and Archaean tectonics. *Nature*, 398: 413–415. 77
- Balling, N., 1995. Heat flow and thermal structure of the lithosphere across the Baltic Shield and northern Tornquist Zone. *Tectonophysics*, 244: 13–50. 7
- Banerdt, W. B., Golombek, M. P. & Tanaka, K. L., 1992. Stress and tectonics on Mars. In: Kieffer, H. H., Jakosky, B. M., Snyder, C. W. & Matthews, M. S. (eds.), *Mars*, pp. 249–297. The University of Arizona Press, Tucson. 77
- Ben-Menahem, A. & Singh, S. J., 1968. Multipolar elastic fields in a layered half space. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 58: 1519–1572. 34
- Beyer, W. H., 1978. *Handbook of Mathematical Science*, 5th edn. CRC Press, Boca Raton. 105
- Birger, B. I., 1996. Rheological model of the earth's and the terrestrial planets' mantles. *Comp. Seismol. Geodyn.*, 3: 1–7. 18
- Bott, M. H. P., 1999. Modeling local crustal isostasy by ductile flow in the lower crust. *J. Geophys. Res.*, 104: 20349–20359. 95
- Breuer, D. & Wolf, D., 1995. Deglacial land emergence and lateral upper-mantle heterogeneity in the Svalbard Archipelago—I. first results for simple load models. *Geophys. J. Int.*, 121: 775–788. 33
- Bronstein, I. N. & Semendjajew, K. A. (eds.), 1987. *Taschenbuch der Mathematik*, 23rd edn. Verlag Harry Deutsch, Thun, Frankfurt/Main. 20, 34, 41, 44
- Bullen, K. E., 1975. *The Earth's Density*. Chapman & Hall, London. 50

- Burov, E. B. & Diament, M., 1995. The effective elastic thickness ( $T_e$ ) of continental lithosphere: what does it really mean? *J. Geophys. Res.*, 100: 3905–3927. 7, 69, 76
- Calcagnile, G., 1982. The lithosphere–asthenosphere system in Fennoscandia. *Tectonophysics*, 90: 19–35. 7
- Cathles, L. M., 1975. *The Viscosity of the Earth's Mantle*. Princeton University Press, Princeton. 5, 18, 75, 87, 117
- Chen, W.-P. & Molnar, P., 1983. Focal depths of intracontinental and intraplate earthquakes and their implications for the thermal and mechanical properties of the lithosphere. *J. Geophys. Res.*, 88: 4183–4214. 77
- Cheng, W. C.-W., 1990–2001, TGIF, Xlib based interactive 2-D drawing tool, <http://bourbon.usc.edu:8001/tgif/index.html>. 150
- Coleman, B. D. & Noll, W., 1961. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Modern Phys.*, 33: 239–249. 18, 20
- Comer, R. P., 1983. Thick plate flexure. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 72: 101–113. 67
- Di Donato, G., Mitrovica, J. X., Sabadini, R. & Vermeersen, L. L. A., 2000. The influence of a ductile crustal zone on glacial isostatic adjustment: geodetic observables along the U.S. east coast. *Geophys. Res. Lett.*, 27: 3017–3020. 76, 77
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F. G., 1954. *Tables of Integral Transforms*. McGraw–Hill, New York. 104
- Eringen, C. A., 1989. *Mechanics of Continua*, 2nd edn. Robert E. Krieger Publishing Company, Melbourn. 17, 19
- Farrell, W. E., 1972. Deformation of the earth by surface loads. *Rev. Geophys.*, 10: 761–797. 32, 36, 63
- Gantmacher, F. R., 1986. *Matrizentheorie*. Springer-Verlag, Berlin. 109, 111
- Goossens, M., Mittelbach, F. & Samarin, A., 1994. *Der Latex-Begleiter*. Addison–Wesley, Bonn. 150
- Gregersen, S., 1992. Crustal stress regime in Fennoscandia from focal mechanisms. *J. Geophys. Res.*, 97: 11821–11827. 75
- Greve, R., 1999. Waxing and waning of the perennial north polar H<sub>2</sub>O ice cap of Mars along the obliquity cycles. *Icarus*, 144: 119–131. 105
- Greve, R., Klemann, V. & Wolf, D., 2003. Ice flow and isostasy of the north polar cap of Mars. *Planet. Space Sci.*, 51: 193–204. 105
- Grollmund, B. & Zoback, M., 2001. Did deglaciation trigger intraplate seismicity in the New Madrid seismic zone? *Geology*, 29: 175–178. 76, 77
- Gross, B., 1953. *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Hermann, Paris. 18
- Gurtin, M. E. & Sternberg, E., 1962. On the linear theory of viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11: 291–356. 16, 18, 19
- Hagedoorn, J., 1999. *Modellierung von atmosphärischen Einflüssen auf hochgenaue Schweremessungen mit Hilfe elastischer Erdmodelle*, Diploma thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 120
- Han, D. & Wahr, J., 1995. The viscoelastic relaxation of a realistically stratified earth, and a further analysis of postglacial rebound. *Geophys. J. Int.*, 120: 287–311. 49, 58
- Hanyk, L., Matyska, C. & Yuen, D. A., 1999. Secular gravitational instability of a compressible viscoelastic sphere. *Geophys. Res. Lett.*, 26: 557–560. 6, 49, 58, 60, 61

- Hasegawa, H.S., Adams, J. & Yamasaki, K., 1985. Upper crustal stress migration in eastern Canada. *J. Geophys. Res.*, 90: 3637–3648. 75
- Haskell, N. A., 1935. The motion of a viscous fluid under a surface load. *Physics*, 6: 265–369. 6
- Hutter, K., 1983. *Theoretical Glaciology. Mathematical Approaches to Geophysics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. 105
- Ito, K., 1999. Seismogenic layer, reflective lower crust, surface heat flow and large inland earthquakes. *Tectonophysics*, 306: 423–433. 77
- Ivins, E.R. & James, T.S., 1999. Simple models for late Holocene and present-day Patagonian glacier fluctuations and predictions of a geodetically detectable isostatic response. *Geophys. J. Int.*, 138: 601–624. 33
- Ivins, E.R., James, T.S. & Klemann, V., 2003. Glacial isostatic stress shadowing by the Antarctic ice sheet. *J. Geophys. Res.*, accepted. 33
- James, T.S. & Bent, A.L., 1994. A comparison of eastern North American seismic strain-rates to glacial rebound strain-rates. *Geophys. Res. Lett.*, 21: 2127–2130. 75
- James, T.S. & Lambert, A., 1993. A comparison of VLBI data with the ICE-3G glacial rebound model. *Geophys. Res. Lett.*, 20: 871–874. 8, 75
- James, T.S. & Morgan, W.J., 1990. Horizontal motions due to post-glacial rebound. *Geophys. Res. Lett.*, 17: 957–960. 8
- Jeans, J.H., 1903. On the vibrations and stability of a gravitating planet. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 201: 157–184. 6, 49
- Johnston, P., Wu, P. & Lambeck, K., 1998. Dependence of horizontal stress magnitude on load dimension in glacial rebound models. *Geophys. J. Int.*, 132: 41–60. 47, 48, 77
- Kästner, E., 1949. *Zeltbuch von Tumilad*. Insel-Verlag, Wiesbaden. 5
- Kaufman, P.S. & Royden, L.H., 1994. Lower crustal flow in an extensional setting: constraints from the Halloran Hill region, eastern Mojave Desert, California. *J. Geophys. Res.*, 99: 15723–15739. 77
- Kaufmann, G., 1995. *Zur Auflösbarkeit lateraler Heterogenitäten im Erdmantel durch nach-eiszeitliche Landhebungen am Beispiel der nördlichen Barentssee*, Ph.D. thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Münster. 110
- Kaufmann, G. & Wolf, D., 1996. Deglacial land emergence and lateral upper-mantle heterogeneity in the Svalbard Archipelago – II. Extended results for high-resolution models. *Geophys. J. Int.*, 127: 125–140. 33
- Kaufmann, G., Wu, P. & Li, G., 2000. Glacial isostatic adjustment in Fennoscandia for a laterally heterogeneous earth. *Geophys. J. Int.*, 143: 262–273. 97
- Kirby, S.H., 1983. Rheology of the lithosphere. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 21: 1458–1487. 18
- Klein, A., Jacoby, W. & Smilde, P., 1997. Mining-induced crustal deformation in Northwest Germany: modelling the rheological structure of the lithosphere. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 147: 107–123. 77
- Klemann, V. & Wolf, D., 1998. Modelling of stresses in the Fennoscandian lithosphere induced by Pleistocene glaciations. *Tectonophysics*, 294: 291–303. 92
- Klemann, V. & Wolf, D., 1999. Implications of a ductile crustal layer for the deformation caused by the Fennoscandian ice sheet. *Geophys. J. Int.*, 139: 216–226. 55, 76, 77, 78
- Kohlstedt, D.L., Evans, B. & Mackwell, S.J., 1995. Strength of the lithosphere: constraints imposed by laboratory experiments. *J. Geophys. Res.*, 100: 17587–17602. 7

- Körnig, M. & Müller, G., 1989. Rheological models and interpretation of postglacial uplift. *Geophys. J. Int.*, 98: 243–253. 18
- Korolczuk, J., 1996. Rheological properties of fresh cheeses by compression–relaxation method. II. stress evolution during relaxation period. *Milchwiss., Milk Sci. Int.*, 51: 148–150. 39
- Kruse, S., McNutt, M., Phipps-Morgan, J., Royden, L. & Wernicke, B., 1991. Lithospheric extension near Lake Mead, Nevada: a model for ductile flow in the lower crust. *J. Geophys. Res.*, 96: 4435–4456. 7, 77, 78
- Kukkonen, I. T. & Peltonen, P., 1999. Xenolith-controlled geotherm for the central Fennoscandian Shield: implications for the lithosphere–asthenosphere relations. *Tectonophysics*, 304: 301–315. 90, 91
- Kusznir, N. J., 1991. The distribution of stress with depth in the lithosphere; thermo-rheological and geodynamic constraints. *Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A*, 337: 95–110. 77
- Lambeck, K. & Nakiboglu, S. M., 1980. Seamount loading and stress in the ocean lithosphere. *J. Geophys. Res.*, 85: 6403–6418. 69
- Landau, L. D. & Lifschitz, E. M., 1989. *Lehrbuch der theoretischen Physik: Elastizitätstheorie*, 6th edn. Akademie-Verlag, Berlin. 19, 68, 103
- Lapwood, E. R. & Usami, T., 1981. *Free Oscillations of the Earth*. Cambridge University Press, Cambridge. 5, 23
- Li, G. & Yuen, D. A., 1987. Viscous relaxation of a compressible spherical shell. *Geophys. Res. Lett.*, 14: 1227–1230. 50
- Lliboutry, L., 1998. How to model the waxing and waning of ice-sheets. In: Wu, P. (ed.), *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, pp. 249–270. Trans Tech Publications, Hetikon. 105, 106
- Lobkovsky, L. L. & Kerchman, V. I., 1991. A two-level concept of plate tectonics: application to geodynamics. *Tectonophysics*, 199: 343–374. 77
- Love, A. E. H., 1908. The gravitational stability of the earth. *Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A*, 207: 171–241. 6, 49
- Love, A. E. H., 1911. *Some Problems of Geodynamics*. Dover Publications, New York. 5, 6, 42, 52
- Malischewsky, P., 1987. *Surface Waves and Discontinuities*. Elsevier, Amsterdam. 49
- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 14, 15, 16, 17
- Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R., 1983. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, New York. 11, 17, 18
- Martinec, Z., Thoma, M. & Wolf, D., 2001a. Material versus local incompressibility and its influence on glacial-isostatic adjustment. *Geophys. J. Int.*, 144: 136–156. 50
- Martinec, Z., Čadek, O. & Fleitout, L., 2001b. Can the 1D viscosity profiles inferred from post-glacial rebound data be affected by lateral viscosity variations in the tectosphere? *Geophys. Res. Lett.*, 28: 4403–4406. 97
- Maupin, V., 1996. The radiation modes of a vertically varying half-space: a new representation of the complete Green's function in terms of modes. *Geophys. J. Int.*, 126: 762–780. 6, 49, 55
- McConnell, R. K., 1965. Isostatic adjustment in a layered earth. *J. Geophys. Res.*, 70: 5171–5188. 6
- Meissner, R., 1986. *The Continental Crust*. vol. 34 of *International Geophysics Series*. Academic

- Press, London. 75
- Meissner, R. & Strehlau, J., 1982. Limits of stresses in continental crusts and their relation to the depth–frequency distribution of shallow earthquakes. *Tectonics*, 1: 73–89. 77
- Meissner, R. & Wever, T., 1986. Nature and development of crust according to deep reflection data from the German Variscides. In: Barazangi, M. & Brown, L. (eds.), *Reflection Seismology: A Global Perspective*, vol. 13 of *Geodynamics Series*, pp. 31–42. American Geophysical Union, Washington, D.C. 77
- Meissner, R. O. & Vetter, U. R., 1979. Relationship between the seismic quality factor  $Q$  and the effective viscosity  $\eta^*$ . *J. Geophys.*, 45: 147–158. 90
- Miles, A. W., 1971. *Integral Transforms in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. 104
- Mitrovica, J. X., 1996. Haskell [1935] revisited. *J. Geophys. Res.*, 94: 555–569. 6, 78
- Moisio, K., Kaikkonen, P. & Beekman, F., 2000. Rheological structure and dynamical response of the DSS profile BALTIC in the SE Fennoscandian Shield. *Tectonophysics*, 320: 175–194. 77
- Muir Wood, R., 1989. Extraordinary deglaciation reverse faulting in northern Fennoscandia. In: Gregersen, S. & Basham, P. W. (eds.), *Earthquakes at North-Atlantic Passive Margins: Neotectonics and Postglacial Rebound*, pp. 141–173. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 75
- Müller, G., 1986. Generalized Maxwell bodies and estimates of mantle viscosity. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 87: 1113–1141. 18
- Nakada, M., 1994. Convective coupling between ductile lower crust and upper mantle, and its tectonic implications. *Geophys. J. Int.*, 118: 579–603. 76, 77, 78
- Nakiboglu, S. M. & Lambeck, K., 1980. Deglaciation effects on the rotation of the earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 62: 49–58. 5
- Noll, W., 1958. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2: 197–226. 10, 18
- O’Keefe, K. & Wu, P., 1998. Viscoelastic channel flow. In: Wu, P. (ed.), *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, pp. 203–216. Trans Tech Publications, Hetikon. 63
- Parsons, B. E., 1972. *Changes in the Earth’s Shape*, Ph.D. thesis, University of Cambridge, Cambridge. 5
- Pasquale, V., Verdoya, M. & Chiozzi, P., 1991. Lithospheric thermal structure in the Baltic shield. *Geophys. J. Int.*, 106: 611–620. 90, 91, 92
- Peltier, W. R., 1974. The impulse response of a Maxwell earth. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 12: 649–669. 5, 6, 18, 49
- Peltier, W. R., 1976. Glacial–isostatic adjustment—II. The inverse problem. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 46: 669–705. 6, 49, 103, 127
- Perger, W. F., Bhalla, A. & Nardin, M., 1993. A numerical evaluator for the generalized hypergeometric series. *Comp. Phys. Comm.*, 77: 249–254. 106
- Plag, H.-P. & Jüttner, H.-U., 1995. Rayleigh-Taylor instabilities of a self-gravitating earth. *J. Geodyn.*, 20: 267–288. 6, 49, 58, 61
- Press, W. H., Teukolsky, S. L., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P., 1992. *Numerical Recipes in FORTRAN—The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, New York. 46

- Purcell, A., 1998. The significance of pre-stress advection and internal buoyancy in the flat-earth formulation. In: Wu, P. (ed.), *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, pp. 105–122. Trans Tech Publications, Hetikon. 6, 62
- Purcell, A. P., 1997. *High Resolution Modelling of Post-Glacial Rebound and Sea-Level Change*, Ph.D. thesis, Australian National University. 62, 108
- Ranalli, G., 1987. *Rheology of the Earth, Deformation and Flow Processes in Geophysics and Geodynamics*. Allan & Unwin, Boston. 75, 76, 90, 91
- Ranalli, G. & Murphy, D. C., 1987. Rheological stratification of the lithosphere. *Tectonophysics*, 132: 281–295. 7
- Regenauer-Lieb, K. & Yuen, D. A., 1998. Rapid conversion of elastic energy into plastic shear heating during incipient necking of the lithosphere. *Geophys. Res. Lett.*, 25: 2737–2740. 91
- Rümpker, G. & Wolf, D., 1996. Viscoelastic relaxation of a Burgers half-space: implications for the interpretation of the Fennoscandian uplift. *Geophys. J. Int.*, 124: 541–555. 18, 49
- Rundle, J. B., 1980. Static elastic-gravitational deformation of a layered half space by point coupled sources. *J. Geophys. Res.*, 85: 5355–5363. 33
- Rydelek, P. A. & Pollitz, F. F., 1994. Fossil strain from the 1811–1812 New Madrid earthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, 21: 2303–2306. 77
- Rydelek, P. A. & Sacks, I. S., 1990. Asthenospheric viscosity and stress diffusion: a mechanism to explain correlated earthquakes and surface deformations in NE Japan. *Geophys. J. Int.*, 100: 39–58. 77
- Scherneck, H.-G., Johansson, J. M. & Elgered, G., 1996. *Applications of space geodetic techniques for the determination of intraplate deformations and movements in relation with the postglacial rebound of Fennoscandia*, Technical Report 96-19, Swedish Nuclear Fuel and Waste Management Co., Stockholm. 75
- Sharp, D. H., 1984. An overview of Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, 12: 3–18. 61
- Singh, S. J., 1970. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources. *J. Geophys. Res.*, 75: 3257–3263. 34
- Slunga, R. S., 1989. Focal mechanisms and crustal stresses in the Baltic Shield. In: Gregersen, S. & Basham, P. W. (eds.), *Earthquakes at North-Atlantic Passive Margins: Neotectonics and Postglacial Rebound*, pp. 261–276. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 75, 77
- Sneddon, I. N., 1951. *Fourier Transforms*. Dover Publications, New York. 47
- Takeuchi, H., Saito, M. & Kobayashi, N., 1962. Statical deformations and free oscillations of a model earth. *J. Geophys. Res.*, 67: 1141–1154. 5
- Teisseyre, R. (ed.), 1989. *Gravity and Low-Frequency Geodynamics*. Elsevier, Amsterdam. 21
- Thoma, M. & Wolf, D., 1999. *Bestimmung der Mantelviskosität aus Beobachtungen der Landhebung und Schwere in Fennoskandien*, Scientific Technical Report STR99/02, GeoForschungs-Zentrum Potsdam, Potsdam. 33, 46, 87, 106
- Tromp, J. & Dahlen, F. A., 1990. Free oscillations of a spherical anelastic earth. *Geophys. J. Int.*, 103: 707–723. 6
- Tromp, J. & Mitrovica, J. X., 1999a. Surface loading of a viscoelastic earth—I. general theory. *Geophys. J. Int.*, 137: 847–855. 49, 127
- Tromp, J. & Mitrovica, J. X., 1999b. Surface loading of a viscoelastic earth—II. spherical models. *Geophys. J. Int.*, 137: 856–872. 55, 103
- Truesdell, C. & Noll, W., 1992. *The Non-Linear Theories of Mechanics*, 2nd edn. Springer-

- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 9, 11, 18, 24
- Turcotte, D. L. & Schubert, G., 1982. *Geodynamics, Applications of Continuum Physics to Geological Problems*. John Wiley & Sons, New York. 68
- Turcotte, D. L., Liu, J. T. & Kulhawy, F. H., 1984. The role of an intercrustal asthenosphere on the behavior of major strike-slip faults. *J. Geophys. Res.*, 89: 5801–5816. 7, 67, 76
- van Bemmelen, R. W. & Berlage, H. P., 1935. Versuch einer mathematischen Behandlung geotektonischer Bewegungen unter besonderer Berücksichtigung der Undationstheorie. *Gerl. Beitr. Geophys.*, 43: 19–55. 6
- Vening Meinesz, F. A., 1941. Gravity over the Hawaiian Archipelago and over the Madeira area; conclusions about the earth's crust. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 44: 1–12. 67
- Vermeersen, L. L. A. & Mitrovica, J. X., 2000. Gravitational stability of spherical self-gravitating relaxation models. *Geophys. J. Int.*, 142: 351–360. 6, 49, 58
- Vermeersen, L. L. A. & Vlaar, N. J., 1991. The gravito-elastodynamics of a pre-stressed elastic earth. *Geophys. J. Int.*, 104: 555–563. 28
- Vermeersen, L. L. A., Sabadini, R. & Spada, G., 1996a. Analytical visco-elastic relaxation models. *Geophys. Res. Lett.*, 23: 697–700. 49, 129
- Vermeersen, L. L. A., Sabadini, R. & Spada, G., 1996b. Compressible rotational deformation. *Geophys. J. Int.*, 126: 735–761. 49, 56, 58, 63
- Vetter, U. R. & Meissner, R. O., 1979. Rheological properties of the lithosphere and applications to passive continental margins. *Tectonophysics*, 59: 367–380. 77
- Vlaar, N. J., van Keken, P. E. & van den Berg, A. P., 1994. Cooling of the earth in the Archaean: consequences of pressure-release melting in a hotter mantle. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 121: 1–18. 90
- Wahlström, R., 1993. Fennoscandian seismicity and its relation to the isostatic rebound. *Global Planet. Change*, 8: 107–112. 75
- Walcott, R., 1970. Flexural rigidity, thickness, and viscosity of the lithosphere. *J. Geophys. Res.*, 75: 3941–3954. 7, 67
- Wang, R., 1999. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 89: 733–741. 108
- Ward, S. S., 1984. A note on lithospheric bending calculations. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 78: 241–253. 67, 75
- Watts, A. B. & Zhong, S., 2000. Observations of flexure and the rheology of oceanic lithosphere. *Geophys. J. Int.*, 142: 855–875. 76
- Wessel, P. & Smith, W. H. F., 1991. Free software helps map and display data. *EOS, Trans. Am. Geophys. Union*, 72: 441–446. 150
- Wieczerkowski, K., 1999. *Gravito-Viskoelastodynamik für verallgemeinerte Rheologien mit Anwendung auf den Jupitermond Io und die Erde. Series C, No. 515*. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München. 6, 9, 20, 49
- Wieczerkowski, K. & Wolf, D., 1998. Viscoelastic tidal dissipation in planetary models, In: Ducarme, B. & Pâquet, P. (eds.), *Proc. of the 13th Int. Symp. Earth Tides, Brussels, 1997*, pp. 277–285. Royal Observatory of Belgium, Brussels. 18
- Wilcox, C. H., 1984. *Sound Propagation in Stratified Fluids*. Springer-Verlag, New York. 49
- Williams, T. & Kelly, C., 1989, Gnuplot: An interactive plotting program, <http://www.gnuplot.info/>. 150

- Wolf, D., 1985a. Thick-plate flexure re-examined. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 80: 265–273. [36](#)
- Wolf, D., 1985b. The normal modes of a layered, incompressible Maxwell half-space. *J. Geophys.*, 57: 106–117. [5](#), [18](#), [49](#), [55](#), [76](#), [78](#), [93](#), [125](#)
- Wolf, D., 1985c. The normal modes of a uniform, compressible Maxwell half-space. *J. Geophys.*, 56: 100–105. [33](#), [55](#), [120](#)
- Wolf, D., 1986. Glacio-isostatic adjustment in Fennoscandia revisited. *J. Geophys.*, 59: 42–48. [88](#)
- Wolf, D., 1987. An upper bound on lithosphere thickness from glacio-isostatic adjustment in Fennoscandia. *J. Geophys.*, 61: 141–149. [87](#)
- Wolf, D., 1991a. Visco elastodynamics of a stratified compressible planet: incremental field equations and short- and long-time asymptotes. *Geophys. J. Int.*, 104: 401–417. [5](#), [6](#), [17](#), [28](#), [33](#)
- Wolf, D., 1991b. Boussinesq’s problem of viscoelasticity. *Terra Nova*, 3: 401–407. [49](#), [116](#)
- Wolf, D., 1993. The changing role of the lithosphere in models of glacial isostasy: a historical review. *Global Planet. Change*, 8: 95–106. [6](#), [7](#)
- Wolf, D., 1997. *Gravitational Viscoelastodynamics for a Hydrostatic Planet. Series C, No. 452.* Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München. [9](#), [22](#), [26](#), [28](#), [29](#), [30](#), [49](#), [50](#), [88](#), [129](#), [130](#)
- Wolf, D. & Kaufmann, G., 2000. Effects due to compressional and compositional density stratification on load-induced Maxwell-viscoelastic perturbations. *Geophys. J. Int.*, 140: 51–62. [50](#)
- Wolf, D. & Li, G., 2002. Compressible viscoelastic earth models based on Darwin’s law. In: Mitrovica, J. X. & Vermeersen, L. L. A. (eds.), *Glacial Isostatic Adjustment and the Earth System: Sea-Level, Crustal Deformation, Gravity and Rotation*, pp. 275–292. American Geophysical Union, Washington, D. C. [50](#)
- Woodhouse, J. H., 1976. On Rayleigh’s principle. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 46: 11–22. [102](#)
- Wu, J. & Yuen, D. A., 1991. Post-glacial relaxation of a viscously stratified compressible mantle. *Geophys. J. Int.*, 104: 331–349. [50](#)
- Wu, P., 1992. Viscoelastic versus viscous deformation and the advection of pre-stress. *Geophys. J. Int.*, 108: 136–142. [33](#), [49](#)
- Wu, P., 1997. Effects of viscosity structure on fault potential and stress orientations in eastern Canada. *Geophys. J. Int.*, 130: 365–382. [76](#), [77](#), [87](#)
- Wu, P. & Hasegawa, H. S., 1996. Induced stresses and fault potential in eastern Canada due to a disc load: a preliminary analysis. *Geophys. J. Int.*, 125: 415–430. [33](#)
- Wu, P. & Ni, Z., 1996. Some analytical solutions for the viscoelastic gravitational relaxation of a two-layer non-self-gravitating incompressible spherical earth. *Geophys. J. Int.*, 126: 413–436. [49](#), [129](#)
- Wu, P. & Peltier, W. R., 1982. Viscous gravitational relaxation. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 70: 435–485. [6](#), [49](#), [55](#)

# Abkürzungsverzeichnis

## 1. Erdmodelle

<i>Abkürzung</i>	<i>Seite</i>	<i>Beschreibung</i>
AEL	87	Modell EL mit Asthenosphäre im oberen Mantel
AVC	87	Modell VC mit Asthenosphäre im oberen Mantel
EL	67	elastische Lithosphäre über Halbraum
EL'	71	Modell EL mit verdünnter Lithosphäre
U	50	homogener Halbraum
U'	58	homogener Halbraum mit Parametrisierung einer homogenen Erdkugel
VC	78	Modell EL mit viskoelastischer unterer Kruste
VC <sup><math>\delta\rho</math></sup>	81	Modell VC mit Dichtekontrast zwischen Kruste und Mantel
VC <sup><math>\eta^+</math></sup>	81	Modell VC mit erhöhter Viskosität
VL	92	Modell EL mit viskoelastischer Mantellithosphäre

## 2. Relaxationsmoden

<i>Abkürzung</i>	<i>Seite</i>	<i>Beschreibung</i>
CP	55	fundamentale Kompressionsmode des Mantels
D	55	kontinuierliche Dilatationsmode
L0	71	fundamentale Lithosphärenmode
L <sub>1,2</sub> , L <sub>2,2</sub> , ...	78	viskoelastische Modenpaare der viskoelastischen Lithosphärenschichten 1, 2, ...
LC	78	Lithosphärenmode der elastischen oberen Kruste
M	55	fundamentale Auftriebsmode des Mantels für Erdmodell U
M0	71	fundamentale Auftriebsmode des Mantels für Erdmodelle mit Lithosphäre
MC	78	Auftriebsmode der duktilen Schicht in der Kruste
RT	55	kontinuierliche Rayleigh-Taylor-Mode
RT0	55	diskrete Rayleigh-Taylor-Mode

### 3. Näherungen

Die Abkürzungen erscheinen Zum Teil auch als Index an den Erdmodellen

<i>Abkürzung</i>	<i>Seite</i>	<i>Beschreibung</i>
C0	40	kompressibles Kontinuum
C1	40	kompressibles Kontinuum mit hydrostatischer Vorspannung
C2	41	kompressibles Kontinuum mit hydrostatischer Vorspannung und internem Auftrieb
IC	43	inkompressibles Kontinuum mit hydrostatischer Vorspannung

### 4. Textkürzel

<i>Abkürzung</i>	<i>Seite</i>	<i>Beschreibung</i>
DCL	76	duktile Schicht in der unteren Kruste (Ductile Crustal Layer)
GIA	5	glazial isostatische Ausgleichsbewegung (Glacial-Isostatic Adjustment)
GPS	8	Global Positioning System
GVED	5	Gravito-Viskoelastodynamik (Gravito-Viscoelastodynamics)
PREM	5	Preliminary Reference Earth Model
SLR	8	Satellite Laser Ranging
TPA	67	Dünne-Platten-Näherung (Thin-Plate Approximation)
VLBI	8	Very-Long-Baseline Interferometry

# Symbolverzeichnis

Die folgende Liste enthält nur Symbole, die häufig und systematisch verwendet werden. Jedem Symbol sind

- die Seite, auf der es eingeführt wird,
- die Nummer der Gleichung, in der es eingeführt wird,
- seine Bedeutung

nachgestellt. Darüber hinaus gelten folgende Konventionen:

- Tensoren sind in kursivem Fettdruck,  $\mathbf{f}$ , oder in entsprechender Indexnotation,  $f_{ij\dots}$ , notiert.
- Matrizen sind in normalem (geradem) Fettdruck,  $\mathbf{F}$ , oder in entsprechender Indexnotation,  $F_{ij}$ , notiert.
- Laplace-transformierte Größen sind durch eine übergestellte Tilde,  $\tilde{f}$ , gekennzeichnet.
- In [Kap. 2](#) werden Feldgrößen in der Euler'schen Formulierung durch Majuskeln,  $F_{ij\dots}$ , und in der Lagrange'schen Formulierung durch Minuskeln,  $f_{ij\dots}$ , gekennzeichnet. (In den Symbollisten erscheinen nur die Minuskeln.)
- In [Kap. 3](#) werden Hankel-transformierte Feldgrößen durch Majuskeln,  $F$ , gekennzeichnet.

## 1. Lateinische Symbole

Symbol	Seite	Gleichung	Beschreibung
$\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$	15	(2.40)	in $\mathcal{R}_+$ eingebettete Fläche
$\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$	10	(2.6)	in $\mathcal{X}_+$ eingebettete Fläche
$\mathbf{A}$	35	(3.30)	Koeffizientenmatrix für das R-Problem
$\mathbf{A}^L$	35	(3.31)	Koeffizientenmatrix für das L-Problem
$a_i$	11	(2.10)	Beschleunigung
$\mathcal{B}$	10	(2.1)	Kontinuum
$\mathbf{B}$	38	(3.52)	Koeffizientenmatrix der gravitativen Feldgleichungen
$\mathbf{B}^n$	34	(3.16)	lateraler Basisvektor der Ordnung $n$ für das R-Problem
$b_{ij}$	11	(2.14)	Bewegungsgradient
$b_{ij}^{-1}$	12	(2.20)	Inverse von $b_{ij}$
$\mathbb{C}$	41		Menge der komplexen Zahlen
$\mathcal{C}$	41	(3.73)	Schnittlinie einer Funktion in $\mathbb{C}$
$\mathcal{C}^{(l)}$	36	(3.40)	Störung auf der Grenzfläche $z = z_l$
$\mathcal{C}^n$	34	(3.16)	lateraler Basisvektor der Ordnung $n$ für das L-Problem
$C^i(\mathcal{X})$	127	(C.4)	Menge der in $\mathcal{X}$ $i$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen

Symbol	Seite	Gleichung	Beschreibung
$\partial.$	10	(2.2)	Rand oder Abschluss
$\partial./\partial x, \partial_x.$	12	(2.17)	partielle Ableitung nach $x$
$D_e$	68	(5.2)	Biegesteifigkeit einer elastischen Platte
$\overline{D}_l$	38	(3.54)	Quellterm in Folge des Dichteinkrementes
$d$	37	(3.47)	Divergenz der Verschiebung
$d_t.$	11	(2.10)	materielle Ableitung nach $t$
$dS, dA, dV$	14	(2.33)	räumliches Linien-, Flächen- bzw. Volumenelement
$ds^{(0)}, da^{(0)}, dv^{(0)}$	14	(2.34)	materielles Linien-, Flächen- bzw. Volumenelement
$\mathcal{E}$	54		Potential der Arbeit
$E$	103	(A.47)	Potentialdichte
$E^n$	37	(3.48)	Lateralkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{g}^{(\Delta)}$ für das R-Problem
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	10		Einheitsvektoren in kartesischen Koordinatenrichtungen
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$	100	(A.13)	Einheitsvektoren in Zylinderkoordinatenrichtungen
$\mathbf{F}$	38	(3.52)	Quellterm der gravitativen Feldgleichungen
$F_{ij\dots k}$	12	(2.19)	lokaler Gradient von $F_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}$	11	(2.11)	Tensorfeld in Lagrange'scher Formulierung und kartesischer Indexnotation
$f_{ij\dots k}$	11	(2.13)	materieller Gradient von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^{(0)}$	13	(2.24)	Ausgangszustand von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^{(\text{ad})}$	13	(2.25)	advektives Inkrement von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^{(\Delta)}$	13	(2.25)	lokales Inkrement von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^{(\delta)}$	13	(2.24)	materielles Inkrement von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^\pm$	13	(2.29)	Änderung von $f_{ij\dots}$ an Grenzfläche
$f_{ij\dots}^+$	13	(2.26)	interner Grenzwert von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^-$	13	(2.26)	externer Grenzwert von $f_{ij\dots}$
$f_{ij\dots}^*$	13		Anregung
$G^n$	37	(3.48)	Vertikalkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{g}^{(\Delta)}$ für das R-Problem
$g_i$	21	(2.79)	Schwere
$\mathcal{H}^{-1}\{.\}$	36	(3.34)	inverse Hankel-Transformation
$\mathbf{H}$	110	(B.18)	Halbraumpropagator für das R-Problem
$h$	50		Schichtdicke
$h_e$	69	(5.8)	effektive elastische Dicke
$h(t)$	38	(3.57)	Heaviside-Funktion
$\mathbb{I}$	62		Menge der imaginären Zahlen
<b>I, II, III, IV</b>	32	(3.4)	Terme der inkrementiellen Bewegungsgleichung
$I_2$	91	(6.7)	zweite Invariante des Spannungstensors
$i$	34	(3.16)	imaginäre Einheit

<i>Symbol</i>	<i>Seite</i>	<i>Gleichung</i>	<i>Beschreibung</i>
$J_n$	99	(A.5)	Bessel-Funktion erster Art und $n$ -ter Ordnung
$j$	14	(2.38)	Jacobi-Determinante
$\bar{K}_i$	129	(C.13)	Kernfunktion für Maxwell-Zeit der $i$ -ten Schicht
$k$	33	(3.15)	Wellenzahl
$k^g$	42	(3.79)	Wellenzahl der Stabilitätsgrenze
$\mathbf{L}$	108	(B.5)	Fundamentalmatrix
$\mathcal{L}\{.\}$	20	(2.69)	Laplace-Transformation
$\mathcal{L}^{-1}\{.\}$	44	(3.92)	inverse Laplace-Transformation
$L$	10	(2.2)	Schichtzahl
$l$	10	(2.2)	Schichtindex
$\mathcal{M}$	18	(2.61)	anisotropes Relaxationsfunktional
$\mathbf{M}$	111	(B.24)	Funktionalmatrix
$\mathbf{M}^*$	111	(B.25)	transponierte Komatrix von $\mathbf{M}$
$m$	40	(3.66)	Eigenwert von $\mathbf{A}$
$m_2$	20	(2.70)	Scherrelaxationsfunktion
$m_{ijkl}$	20	(2.67)	anisotrope Relaxationsfunktion
$n$	33	(3.15)	Ordnung der Entwicklung nach $e^{in\varphi}$
$n$	50	(4.1)	bezüglich des Erdradius normierte Wellenzahl
$n_i$	15	(2.42)	nach außen gerichtete Flächennormale
$\mathcal{O}(\cdot)$	20		Größenordnung
$\mathbf{P}$	36	(3.39)	Propagator für das R-Problem
$\mathbf{P}^{(l)}$	36	(3.39)	$l$ -ter Schichtpropagator für das R-Problem
$\mathbf{P}^n$	34	(3.16)	vertikaler Basisvektor für das R-Problem
$p$	20	(2.73)	Druck
$\mathbf{Q}$	112	(B.34)	Propagator der gravitativen Feldgleichungen
$\mathbb{R}$	10	(2.1)	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^3$	10	(2.1)	dreidimensionaler Euklid'scher Raum
$\mathcal{R}_+$	10	(2.6)	aktueller Definitionsbereich des Kontinuums
$\bar{\mathcal{R}}_+$	10		Abschluss von $\mathcal{R}_+$
$\mathcal{R}_+^{(l)}$	11	(2.8)	$l$ -te Schicht von $\mathcal{R}_+$
$\partial^l \mathcal{R}_+^{(l)}$	14	(2.31)	Grenzfläche von $\mathcal{R}_+^{(l)}$ mit $\mathcal{R}_+^{(l-1)}$ bzw. $\mathcal{R}_-$
$\mathcal{R}_-$	10	(2.6)	externer Definitionsbereich von $r_i$
$R^n$	34	(3.23)	Lateralkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z$ für das R-Problem
$R_\oplus$	50	(4.1)	Erdradius
$r$	100	(A.12)	radialer Abstand
$r_i$	11	(2.9)	räumliche Koordinate
$r_L$	43	(3.91)	Radius einer Lastscheibe
$S_i^X$	129		$i$ -te Eigenlösung der Feldgleichungen für Erdmodell X

Symbol	Seite	Gleichung	Beschreibung
$S^n$	34	(3.23)	Lateralkomponente $n$ -ter von $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z$ für das L-Problem
$s$	20	(2.69)	Laplace-Variable
$s^{\mathcal{B}}$	41	(3.73)	Verzweigungspunkt einer Funktion in $\mathbb{C}$
$s_i$	129		inverse Relaxationszeit
$\mathbf{T}$	102	(A.33)	Differentialoperator
$T$	90	(6.6)	absolute Temperatur
$T^n$	34	(3.23)	Vertikalkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z$
$t$	11		Zeit
$t_{ij}$	17	(2.51)	Cauchy'sche Spannung
$U^n$	33	(3.15)	Lateralkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{u}$ für das R-Problem
$u_i$	11	(2.9)	Verschiebung
$\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$	15	(2.41)	Teilvolumen von $\mathcal{R}_+$
$\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$	15	(2.41)	Teilvolumen von $\mathcal{X}_+$
$V^n$	33	(3.15)	Lateralkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{u}$ für das L-Problem
$v_i$	11	(2.10)	Geschwindigkeit
$W^n$	33	(3.15)	Vertikalkomponente $n$ -ter Ordnung von $\mathbf{u}$ für das R-Problem
$\mathcal{X}_+$	10	(2.1)	interner Definitionsbereich von $X_i$
$\bar{\mathcal{X}}_+$	10		Abschluss von $\mathcal{X}_+$
$\mathcal{X}_+^{(l)}$	10	(2.2)	$l$ -te Schicht von $\mathcal{X}_+$
$\partial^I \mathcal{X}_+^{(l)}$	10	(2.3)	Grenzfläche von $\mathcal{X}_+^{(l)}$ mit $\mathcal{X}_+^{(l-1)}$ bzw. $\mathcal{X}_-$
$\partial^\infty \mathcal{X}_+$	10	(2.4)	Rand von $\mathcal{X}_+$ ohne $\partial^I \mathcal{X}_+^{(1)}$
$\mathcal{X}_-$	10		externer Definitionsbereich von $X_i$
$X_i$	10		materielle Koordinate
$\mathbf{Y}$	35	(3.28)	Lösungsvektor für das R-Problem
$\mathbf{Y}^{\mathcal{C}}$	35	(3.28)	Spezielle Lösung für das R-Problem
$\mathbf{Y}^{\mathcal{E}}$	45	(3.97)	elastischer Lösungsvektor
$\mathbf{Y}^{\mathcal{F}}$	45	(3.98)	inviskoser Lösungsvektor
$\mathbf{Y}^{\mathcal{L}}$	35	(3.29)	Lösungsvektor für das L-Problem
$\mathbf{Y}^{\mathcal{V}}$	45	(3.98)	viskoser Lösungsvektor
$\mathbf{Z}$	38	(3.52)	Lösungsvektor der gravitativen Feldgleichungen
$z$	100	(A.12)	Tiefe

## 2. Griechische Symbole

Griechische Majuskeln, die ihrem lateinischen Äquivalent entsprechen sind in schrägem *Sans Serif* gesetzt, zum Beispiel  $P$  für  $\rho$ .

Symbol	Seite	Gleichung	Beschreibung
$\alpha$	83	(6.1)	Quotient der Maxwell-Zeiten $\tau_{\text{LC}}$ und $\tau_{\text{UM}}$
$\gamma$	21	(2.78)	Gravitationskonstante
$\nabla$	32	(3.8)	Nabla-Operator

<i>Symbol</i>	<i>Seite</i>	<i>Gleichung</i>	<i>Beschreibung</i>
$\nabla^2$	32	(3.5)	Laplace-Operator
$\delta(t - t')$	100	(A.15)	Dirac'sche Deltafunktion bezüglich des Argumentes $t$
$\delta_{ij}$	20	(2.70)	Einheitstensor zweiter Stufe
$\delta_{\mathbf{II}}, \delta_{\mathbf{III}}$	35	(3.30)	Schaltfunktionen
$\varepsilon_{ij}$	19	(2.62)	Verzerrung
$\varepsilon_{ij}^d$	38	(3.56)	Deviator der Verzerrung
$\eta$	39	(3.58)	dynamische Viskosität
$\kappa$	20	(2.72)	elastischer Kompressionsmodul
$\lambda_0$	21	(2.76)	erster Lamé'scher Parameter
$\tilde{\lambda}$	21	(2.76)	erster Lamé'scher Relaxationsmodul
$\mu_0$	38	(3.56)	zweiter Lamé'scher Parameter (Schermodul)
$\tilde{\mu}$	21	(2.77)	zweiter Lamé'scher Relaxationsmodul (Scherrelaxationsmodul)
$\nu$	52	(4.4)	Poisson'sche Zahl
$\xi$	10	(2.1)	Referenzkonfiguration
$\Phi^n$	37	(3.44)	$\phi^{(\Delta)}$ $n$ -ter Ordnung für das R-Problem
$\phi$	21	(2.78)	Schwerepotential
$\varphi$	100	(A.12)	Azimutwinkel
$\rho$	10	(2.5)	aktuelle Konfiguration
$\rho$	16	(2.47)	Volumenmassendichte
$\sigma$	23	(2.94)	Flächenmassendichte
$\sigma^R$	24	(2.99)	materielle Flächenmassendichte
$\Sigma^r$	43	(3.91)	Hankel-transformierter Anteil von $\sigma^R$
$\tilde{\sigma}^t$	43	(3.91)	Laplace-transformierter Anteil von $\sigma^R$
$\tau_{ij}$	17	(2.54)	Piola'sche Spannung
$\tau$	38	(3.56)	Maxwell-Zeit
$\tau_X$	81	(6.1.5)	Relaxationszeit von Mode X
$\chi$	10	(2.6)	Bewegung

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Geometrie des geschichteten Halbraumes . . . . .	10
2.2	Inkremete tensorieller Feldgrößen . . . . .	13
2.3	Grenzflächenbedingung für die Traktion . . . . .	23
3.1	Geometrie für Propagation durch den geschichteten Halbraum . . . . .	36
3.2	Relaxations- und Kriechfunktion für Maxwell-Viskoelastizität . . . . .	39
3.3	Schnittlinie und Verzweigungspunkte von $\sqrt{1 + \epsilon(s)^2}$ . . . . .	41
3.4	Schnittlinien und Verzweigungspunkte von $\sqrt{1 - \epsilon(s)}$ . . . . .	42
3.5	Integrationswege für Bromwich-Integral und Residuensatz . . . . .	44
3.6	Integrationswege für Näherungen C1 und C2 . . . . .	46
4.1	Elastische Beiträge für Erdmodell U in verschiedenen Näherungen . . . . .	51
4.2	Potentiale zur elastischen Deformation für Erdmodell U . . . . .	53
4.3	Spektren für Erdmodell $U_{C1}$ . . . . .	56
4.4	Spektren für Erdmodell $U_{C2}$ . . . . .	57
4.5	Regularität der Lösungen für Erdmodell $U_{C2}$ . . . . .	59
4.6	Verzweigungspunkte von $C^{1,2}$ und $C^{<0}$ . . . . .	60
4.7	Vergleich von $C^{>0}$ mit Mode RT1 eines sphärischen Erdmodelles . . . . .	61
4.8	Verschiebung an der Oberfläche nach Heaviside'scher Belastung für Erdmodell U . . . . .	62
4.9	Potentialdichten für Erdmodell U . . . . .	65
5.1	Elastische und inviskose Beiträge von Erdmodell EL in verschiedenen Näherungen . . . . .	70
5.2	Spektren für Erdmodell $EL_{C0}$ . . . . .	72
5.3	Spektren für Erdmodell $EL_{C1}$ . . . . .	72
5.4	Spektren für Erdmodell $EL_{C2}$ . . . . .	73
5.5	Spektren für Erdmodell $EL_{IC}$ . . . . .	73
5.6	Vergleich der Spektren für Erdmodell EL . . . . .	74
6.1	Scherfestigkeit in der Lithosphäre . . . . .	76
6.2	Spektren für Erdmodell VC . . . . .	79
6.3	Scherpotentialdichten für Erdmodelle VC und $VC^{\eta^+}$ . . . . .	80
6.4	Spektren für Erdmodell $VC^{\delta\rho}$ . . . . .	82
6.5	Zeitliche Änderung der effektiven elastischen Dicke für Erdmodell VC . . . . .	84
6.6	Beitrag der DCL zum Scherkern . . . . .	85
6.7	Spannungsverhalten für Erdmodelle VC und $VC^{\eta^+}$ . . . . .	86
6.8	Spektren für Erdmodelle AEL und AVC . . . . .	88
6.9	Geothermen für Fennoskandien . . . . .	90
6.10	Effektive Viskositäten als Funktion der Tiefe . . . . .	91
6.11	Mittlere Geotherme und mittlere effektive Viskosität für Fennoskandien . . . . .	92
6.12	Spektren für Erdmodell VL . . . . .	93
6.13	Zeitliche Änderung der effektiven elastischen Dicke für Erdmodell VL . . . . .	93
6.14	Spannungsverhalten für Erdmodell VL . . . . .	94

A.1	Definition des Zylinderkoordinatensystems . . . . .	100
A.2	Lastquerschnitte und deren Hankel-Transformierte . . . . .	105
C.1	Relaxationsmoden und Scherpotentiale für Erdmodelle $U_{IC}$ und $EL$ . . . . .	131

# Tabellenverzeichnis

4.1	Parameterwerte für Erdmodell U	50
4.2	Parameterwerte für Erdmodell U'	58
5.1	Parameterwerte für Erdmodell EL	67
5.2	Parameterwerte für Erdmodell EL'	71
6.1	Parameterwerte für Erdmodell VC	78
6.2	Parameterwerte für Erdmodell VC $\eta^+$	81
6.3	Parameterwerte für Erdmodell VC $\delta\rho$	81
6.4	Parameterwerte für Erdmodelle AEL und AVC	87
6.5	Parameterwerte für Erdmodell VL	92

## Danksagung

Zuallererst möchte ich meiner geliebten Frau Sylvia für ihre fortwährende Unterstützung danken und meinem Sohn Sören für die Zeit, die er von mir einforderte. Meinen Eltern möchte ich für die Ermöglichung des Studiums danken.

Ganz besonders bin ich den Leitern des Institutes für Planetologie an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, den Professoren Dr. Elmar Jeßberger und Dr. Tilman Spohn zu Dank verpflichtet, die mir die Arbeit an ihrem Institut ermöglichten.

Den Professoren Dr. Ulrich Hansen und Dr. Detlef Wolf danke ich für die Betreuung meiner Arbeit, darüber hinaus Detlef Wolf für die enge Zusammenarbeit und vor allem für die langjährige Geduld, die er meinem Unterfangen entgegenbrachte.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung durch Teilnahme am Graduiertenkolleg ‘Entstehung und Entwicklung des Sonnensystems’.

Am Institut für Planetologie danke ich des Weiteren den Kolleginnen und Kollegen Axel Hagermann für so manche Lächerstunde, Doris Breuer für Lithosphäre und Viskositäten, Frank Sohl für viele Hinweise und den Tip mit dem Graduiertenkolleg, Gea McCormack für viele Gespräche um administrative Details, Georg Kaufmann, der mir seinen numerischen Code zur Verfügung stellte, Karin Wiczerkowski für die vielen inhaltlichen Diskussionen, Karsten Seiferlin für planetologische Zusammenarbeit, Marile Avermann mit der ich in einem Zimmer saß, Martin Leweling, der immer dafür sorgte, dass mein Rechner Amadeo lief, Rainer Merk, der mein Gesumme und Gesinge über Jahre stoisch ertrug, Uschi Wienbruch, die mir bei der Bedienung von Ultrix-Rechnern häufig über die Schulter schaute, Vera Conzelmann für Entspannung über den Wolken, Hauke Hußmann, Ruth Ziethe, Tom Keller und allen anderen die die Arbeit am Institut interessant machten.

Am GeoForschungsZentrum Potsdam danke ich den Mitarbeitern, die meine gelegentlichen Ausflüge zu meiner Thesis duldeten und die mich teilweise traten, doch endlich abzugeben.

Ohne den Latex-Begleiter von [Goossens \*et al.\* \(1994\)](#) wäre die Feinabstimmung des Layouts nicht möglich gewesen. Die Visualisierung der Daten entstand mit den Open-Source-Werkzeugen GMT ([Wessel & Smith, 1991](#)), GNUPlot ([Williams & Kelly, 1989](#)) und Tgif ([Cheng, 1990–2001](#)).