

GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

Scientific Technical Report

ISSN 1610-0956

Materiell und lokal inkompressible viskoelastische Erdmodelle: Theorie und Anwendungen in der glazialen Isostasie

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Malte Thoma

aus Wuppertal

Hauptberichter: Prof. Dr. habil. Detlef Wolf
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. tech. h.c. mult.
Dr.-Ing. E.h. mult. Erik W. Grafarend
Prof. Dr. Zdeněk Martinec

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Oktober 2003

Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

2004

Materiell und lokal inkompressible viskoelastische Erdmodelle: Theorie und Anwendungen in der glazialen Isostasie

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Malte Thoma

aus Wuppertal

Hauptberichter: Prof. Dr. habil. Detlef Wolf
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. tech. h.c. mult.
Dr.-Ing. E.h. mult. Erik W. Grafarend
Prof. Dr. Zdeněk Martinec

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Oktober 2003

Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

2004

Für meine Mutter
Karin Thoma.
Eine großartige Frau,
die noch so viel vor hatte

Inhaltsverzeichnis

Abstract	8
Kurzfassung	9
1 Einleitung	10
2 Theorie	12
2.1 Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen	12
2.1.1 Kinematische Formulierung	12
2.1.2 Totalfelder	13
2.1.3 Anfangsfelder	14
2.1.4 Materiell-lokale Form der Laplace-transformierten inkrementiellen Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen	15
2.1.5 Darwinsches Gesetz als Lösung der Adams-Williamson-Gleichung	16
2.1.6 Gravitationsbeschleunigung im Anfangszustand	17
2.1.7 Vereinfachte inkrementielle Feldgleichungen	19
Lokale Inkompressibilität	19
Materielle Inkompressibilität	19
2.1.8 Aufstellung des Differentialgleichungssystems	20
2.2 Lösung des Differentialgleichungssystems	20
2.2.1 Lokale Inkompressibilität	20
2.2.2 Materielle Inkompressibilität	23
2.2.3 Kugel mit K Schichten	23
2.2.4 Spezialfälle $n = 0$ und $n = 1$	25
Spezialfall $n = 0$	25
Spezialfall $n = 1$	25
2.3 Rücktransformation in den Raum-Zeitbereich	25
2.3.1 Lösung im Spektralbereich	26
2.3.2 Lovesche Zahlen	27
2.3.3 Lösung im Raumbereich	28
2.4 Kugelflächenfunktionsentwicklung der Lastverteilung	29
2.4.1 Kreisförmige Lastverteilung	30
2.4.2 Elliptische Lastverteilungen	31
3 Relaxationsverhalten ebener und sphärischer Erdmodelle	33
3.1 Erd- und Lastmodelle	33
3.1.1 Erdmodelle	33
3.1.2 Lastmodell	34

3.2	Relaxationsverhalten im Spektral- und Raumbereich	35
3.2.1	Homogenes Erdmodell	35
3.2.2	Dreischichtige Erdmodelle mit Lithosphäre	36
3.2.3	Erdmodelle mit Dichtesprüngen im Mantel	37
3.3	Zusammenfassung	40
4	Landhebung in Island	41
4.1	Lastmodell	41
4.2	Erdmodelle	43
4.3	Anpassung an die Beobachtungsdaten	44
4.4	Vergleich mit früheren Interpretationen	46
4.5	Verwendung eines kompressiblen Erdmodells	50
4.6	Zusammenfassung	51
5	Berücksichtigung der Ozeanlast	52
5.1	Theorie	52
5.2	Beispiel: Instantanes Verschwinden des antarktischen Eisschildes	54
5.3	Zusammenfassung	57
6	Landhebung in Fennoskandien	58
6.1	Pleistozäne Eislasten	60
6.1.1	Eismodell ICE-3G und Berechnung der Ozeanlast	60
6.1.2	Eismodell WEICHSEL-3 und W-ICE-3	64
6.1.3	Eismodell SCAN-2 und W-SCAN-2	66
6.1.4	Vergleich der Eismodelle	66
6.2	Beobachtungsdaten	67
6.2.1	Landhebung	67
6.2.2	Landhebungsgeschwindigkeit	73
6.2.3	Neigungsänderung	76
6.2.4	Schwereänderung	77
6.2.5	Tangentialbewegung	78
6.3	Erdmodell	78
6.4	Interpretation	80
6.4.1	Erdmodelle mit zwei viskoelastischen Schichten	80
6.4.2	Erdmodelle mit drei viskoelastischen Schichten	85
6.5	Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick	86
	Literaturverzeichnis	89
	Danksagungen	102
A	Ergänzungen zur Theorie	103
A.1	Ableitung des Differentialgleichungssystems	103
A.1.1	Differentialoperatoren in sphärischen Koordinaten	103
A.1.2	Kugelflächenfunktionen	104

Legendre-Polynome und skalare Kugelflächenfunktionen	104
Vektorielle Kugelflächenfunktionen	105
A.1.3 Entwicklung der Differentialoperatoren nach Kugelflächenfunktionen . . .	106
A.1.4 Kugelflächenfunktionsentwicklung der inkrementiellen Feldgleichungen . .	107
Materialgleichung	107
Gravitative Feldgleichungen	108
Bewegungsgleichung	108
A.1.5 Grenzflächenbedingungen	109
A.2 Lösung des Differentialgleichungssystems	109
A.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung	109
A.2.2 Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung	110
A.2.3 Inverse der Fundamentallösung und Propagator	112
Lokale Inkompressibilität	112
Materielle Inkompressibilität	114
A.3 Konvolution der Impulsantwort mit der Lastgeschichte	116
A.4 Entwicklungskoeffizienten verschiedener Lastquerschnitte	118
A.4.1 Rechtwinkliger Querschnitt	118
A.4.2 Parabolischer Querschnitt	119
B Numerisches Verfahren	122
B.1 Quellcode	122
B.2 „Kochbuch“ zur Berechnung von Störungen	124
B.2.1 Steuerdatei	125
B.2.2 Erdmodell	125
B.2.3 Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Lastquerschnitts	127
B.2.4 Eismodell	128
B.2.5 Beobachtungsorte und -zeiten	130
B.2.6 Dateien zur Berücksichtigung der Ozeanlast	131
B.3 Programmierung der „sea-level equation“	131
C Island	135
C.1 Eismodelle	135
C.2 Beobachtungsdaten	137
D Fennoskandien	138
D.1 Beobachtete Landhebung	138
D.2 Beobachtete Landhebungsgeschwindigkeit	158
E Symbolverzeichnis	160
E.1 Verzeichnis der lateinischen Symbole	160
E.2 Verzeichnis der griechischen Symbole	162

Abstract

The present study is concerned with glacial-isostatic adjustment processes, as can be observed in Iceland (recent melting of the Vatnajökull ice cap) or in Canada and Fennoscandia (melting of the Pleistocene ice sheets). For calculating the adjustment, a multi-layer spherical earth model is used, whose hydrostatic initial state is disturbed by surface loads. The viscoelastic material properties of the earth's interior are simulated using the Maxwell rheology. Furthermore, local incompressibility is assumed, which allows a consistent consideration of the density increase with depth caused by self-compression. After linearization and Laplace transformation of the incremental field equations, a coupled system of differential equations for the field quantities displacement, stress and gravitational acceleration results, which is solved analytically by means of spherical-harmonic expansion.

After a numerical comparison of flat and spherical earth models, glacial-isostatic adjustment processes in Iceland and Fennoscandia are interpreted as an application of the theory. For Fennoscandia, it is necessary to consider besides the ice load also the coupled ocean load. For this purpose, several approximate solutions of the sea-level equation are presented. The main results of the study can be summarized as follows:

- In the interpretation of glacial-isostatic observations, flat earth models lead to satisfactory results only if the load radius is smaller than 1500 km, the earth model has an elastic lithosphere and the locations of the observations are near the load centre. If one of these conditions is not satisfied, a spherical earth model should be used.
- The interpretation of the recent adjustment (land uplift rate and tilt change) caused by the melting of the Vatnajökull ice cap indicates a lithosphere thickness of 10 km to 20 km and an asthenosphere viscosity of 5×10^{16} to 1×10^{18} Pa.s.
- The gravitational influence of melt water discharged from glaciated regions into the oceans during climate warming must be included into the interpretation of glacial-isostatic adjustment. The associated load redistribution is quantitatively described and numerically determined by means of the sea-level equation.
- For the interpretation of the adjustment process in Fennoscandia, the postglacial land uplift as well as the present rates of land uplift, tilt change and gravity change are considered. The modelling results in viscosities of the upper and lower mantle of about 0.55×10^{21} Pa.s and 1×10^{21} Pa.s, respectively, a lithosphere thickness of 50 to 80 km and a maximum ice thickness of about 2000 m. The consideration of an asthenosphere does not lead to a significantly improved fit to the observations.

Kurzfassung

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit glazial-isostatischen Ausgleichsvorgängen, wie sie in Island (rezentes Abschmelzen der Vatnajökull-Eiskappe) oder in Kanada und Fennoskandien (Abschmelzen der pleistozänen Eisschilde) beobachtet werden. Zur Berechnung des Ausgleichs wird ein mehrschichtiges sphärisches Erdmodell verwendet, dessen hydrostatischer Anfangszustand durch Auflasten gestört wird. Die viskoelastischen Materialeigenschaften des Erdinnern werden mit Hilfe der Maxwell-Rheologie simuliert. Weiterhin wird lokale InkompRESSibilität vorausgesetzt, was eine konsistente Berücksichtigung der durch Selbstkompression bedingten Dichtezunahme mit der Tiefe gestattet. Nach Linearisierung und Laplace-Transformation der inkrementiellen Feldgleichungen ergibt sich für die Feldgrößen Verschiebung, Spannung und Gravitationsbeschleunigung ein gekoppeltes lineares Differentialgleichungssystem, das mit Hilfe der Kugelflächenfunktionsentwicklung analytisch gelöst wird.

Nach einem numerischen Vergleich ebener und sphärischer Erdmodelle werden als Anwendung der Theorie die glazial-isostatischen Ausgleichsvorgänge in Island und Fennoskandien interpretiert. Für Fennoskandien ist es notwendig, neben der Eislast auch die gekoppelte Ozeanlast zu berücksichtigen. Hierzu werden verschiedene Näherungslösungen der „sea-level equation“ präsentiert. Die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Bei der Interpretation glazial-isostatischer Beobachtungen führen ebene Erdmodelle nur zu befriedigenden Ergebnissen, wenn der Lastradius kleiner als 1500 km ist, das Erdmodell eine elastische Lithosphäre besitzt und die Beobachtungsorte in der Nähe des Lastzentrums liegen. Ist eine dieser Voraussetzungen nicht erfüllt, sollte ein sphärisches Erdmodell verwendet werden.
- Die Interpretation des durch das Abschmelzen der Vatnajökull-Eiskappe hervorgerufenen rezenten Ausgleichsvorgangs (Landhebungsrate und Neigungsänderung) weist auf eine Lithosphärenmächtigkeit von 10 bis 20 km und eine Asthenosphärenviskosität von 5×10^{16} bis 1×10^{18} Pa s hin.
- Der gravitative Einfluß des während einer Klimaerwärmung aus den vereisten Gebieten in die Ozeane abgeführten Schmelzwassers muß in die Interpretation des glazial-isostatischen Ausgleichs einbezogen werden. Die hiermit verbundene Lastumverteilung wird mit Hilfe der „sea-level equation“ quantitativ beschrieben und numerisch bestimmt.
- Zur Interpretation des Ausgleichsvorgangs in Fennoskandien werden die postglaziale Landhebung sowie die gegenwärtigen Raten der Landhebung, Neigungsänderung und Schwerkraftänderung berücksichtigt. Die Modellierung ergibt Viskositäten des oberen und unteren Mantels von etwa 0.55×10^{21} Pa s bzw. 1×10^{21} Pa s, eine Lithosphärenmächtigkeit von 50 bis 80 km und eine maximale Eismächtigkeit von etwa 2000 m. Die Berücksichtigung einer Asthenosphäre führt zu keiner nennenswert verbesserten Anpassung an die Beobachtungsdaten.

1. Einleitung

Die Erde ist kein statischer Körper, sondern ein dynamisches System. Viele dieser Veränderungen, wie z.B. die Bewegungen von Wind und Wellen, sind mit bloßem Auge sichtbar, da sie sich in kurzen Zeiträumen (Sekunden, Minuten) abspielen. Für den Menschen genauso gut erkennbar, auch wenn die Zeiträume dieser Phänomene etwas länger sind (Stunden, Monate), sind die Ozeangezeiten und Änderungen des Tageslichtes bzw. der jahreszeitliche Rhythmus. Um Klimaschwankungen und isostatische Ausgleichsvorgänge zu beobachten, benötigt man hingegen schon mehrere Generationen oder zumindest doch sensible Meßgeräte. In noch größeren Zeiträumen spielen sich die Mantelkonvektion und die damit verbundene Plattentektonik ab.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit isostatischen Ausgleichsvorgängen. Zu diesen kommt es, wenn Auflasten (Eis, Wasser, Sedimente, Gebirge) eine Kraft auf die Erdoberfläche ausüben. Die bekanntesten isostatischen Ausgleichsvorgänge sind die postglazialen Landhebungen in Kanada und Fennoskandien. Dort sind jahrtausendealte Strandlinien (mehrere hundert Meter über dem heutigen Meeresspiegel) und aktuelle Landhebungen (meßbar in Millimetern pro Jahr) zu beobachten. Die Existenz der Landhebung ist seit Mitte des 19. Jahrhunderts bekannt (Jamieson, 1865, 1882); die ersten quantitativen Formulierungen zur Abschätzung der Viskosität der Erde mit Hilfe dieses Phänomens gelangen Haskell (1935) und Van Bemmelen & Berlage (1935). Seit diesen ersten Versuchen gab es große Weiterentwicklungen: Zum einen wurde die Theorie verbessert, so daß es inzwischen möglich ist, Gleichungssysteme für mehrschichtige, kompressible, viskoelastische Kugeln aufzustellen und formal zu lösen. Zum anderen ist es, Dank der Rechenleistung heutiger Computer, auch möglich, diese Lösungen mit numerischen Werten zu füllen und für die betrachteten Modelle die Landhebung zu simulieren.

Mit diesem Problem befaßt sich die vorliegende Arbeit. Dabei gliedert sie sich in mehrere Teile. Zunächst werden die Gleichungen für einen sphärischen, nichtrotierenden, selbstgravitierenden, viskoelastischen, lokal inkompressiblen Körper aufgestellt und mit Hilfe der Laplace-Transformation und der Normalmoden-Theorie gelöst (Kapitel 2 und Anhang A). Bisherige Arbeiten verwendeten entweder einen inkompressiblen Körper (z.B. Sabadini *et al.*, 1982; Spada *et al.*, 1992) oder einen viskosen Körper (Li & Yuen, 1987; Wu & Yuen, 1991) oder eine spezielle Form der inkrementiellen Kompressibilität, die einen inkompressiblen Anfangszustand voraussetzt (z.B. Peltier, 1974; Wu & Peltier, 1982; Vermeersen & Sabadini, 1997). Diese physikalische Inkonsistenz führt jedoch zu Instabilitäten (Plag & Jüttner, 1995; Hanyk *et al.*, 1998; Vermeersen & Sabadini, 1998; Wiczerkowski, 1999; Vermeersen & Mitrovica, 2000). Die hier eingeführte lokale Inkompressibilität ist eine besondere Form der Kompressibilität, die bei einem kompressiblen Anfangszustand Störungen erlaubt, die entsprechend diesem Anfangszustand kompressibel sind. Da Anfangs- und inkrementieller Zustand miteinander konsistent sind, treten keine numerischen Instabilitäten auf. Ein materiell inkompressibler Körper wird als Spezialfall betrachtet. Für eine ebene Erde ist eine explizite Lösung in Wolf & Kaufmann (2000), für eine zweischichtige Kugel in Wolf & Li (2002) zu finden; eine andere Darstellung der hier verwendeten Theorie bieten Martinec *et al.* (2001).

Der zweite Bestandteil dieser Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens, das die Berechnung von auflastinduzierten Störungen sowohl des materiell als auch des lokal inkompressiblen Körpers gestattet. In Anhang B wird die Programmierung und Verwendung des entsprechenden Verfahrens beschrieben.¹ In Kapitel 3 wird zum einen das Programm getestet, zum anderen der Unterschied zwischen ebenen und sphärischen Erdmodellen in Abhängigkeit von verschiedenen Lastradien betrachtet. Eine erste praktische Anwendung erfährt die Theorie dann in Kapitel 4, in dem Beobachtungen der glazial-isostatischen Landhebungsrate in Island interpretiert werden. Island eignet sich als Studienobjekt, da aufgrund der geringen Größe der Eislast und der recht jungen Enteisungsgeschichte der Einfluß der Ozeanlast vernachlässigt werden kann.

Der Wasservorrat der Erde ist ein geschlossenes System. Daraus folgt, daß sich Eis auf den Kontinenten nur dann bilden kann, wenn gleichzeitig Wasser aus den Ozeanen verschwindet. Umgekehrt fließt das Wasser beim Abschmelzen von Eisschilden wieder in den Ozean zurück. In beiden Fällen verändert sich dadurch auch der Küstenverlauf. Bei der Berechnung isostatischer Ausgleichsvorgänge muß diese Umverteilung der gravitierenden Ozeanlast berücksichtigt werden. Die entsprechende Theorie wird in Kapitel 5 beschrieben und führt zu einer Neuformulierung der „sea-level equation“ (Farrell & Clark, 1976; Clark *et al.*, 1978; Johnston, 1993; Milne, 1998; Peltier, 1998). In Anhang B sind die hier entwickelten Programme zur Lösung dieses gekoppelten Problems beschrieben. Als Test der Programme und zur Verdeutlichung der Komplexität des Problems wird in Kapitel 5 außerdem gezeigt, wie sich der Meeresspiegel verändert, wenn das gesamte Eis der Antarktis auf einmal schmilzt.²

Zum Abschluß dieser Arbeit werden in Kapitel 6 verschiedene Beobachtungsdaten in Fennoskandien im Hinblick auf die Viskosität des Erdinneren interpretiert. Dazu wird ein lokal inkompressibles Erdmodell mit einem globalen Eismodell unter Berücksichtigung der Umverteilung der Wassermassen gekoppelt. Außerdem werden, anders als in früheren Interpretationen (Fjeldskaar & Cathles, 1991; Fjeldskaar, 1994; Thoma & Wolf, 1998; Lambeck *et al.*, 1998b; Thoma & Wolf, 1999; Davis *et al.*, 1999b), für die Strandliniendatierungen siderische Jahre (statt ¹⁴C Jahre) verwendet.

¹Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm ist bereits von Göbell *et al.* (1999); Bölling *et al.* (2001); Bürger *et al.* (2002a,b); Hagedoorn & Wolf (2002) verwendet worden.

²Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programme zur Lösung der „sea-level equation“ werden von Volker Klemann am GeoForschungsZentrum Potsdam genutzt und weiterentwickelt.

2. Theorie

In diesem Kapitel wird die theoretische Grundlage geschaffen, um isostatische Ausgleichsvorgänge berechnen zu können. Dazu wird zunächst in Abschnitt 2.1 die kinematische Formulierung erläutert und ein Differentialgleichungssystem mit den entsprechenden Grenzflächenbedingungen für einen sphärischen, nichtrotierenden, selbstgravitierenden Körper aufgestellt (ellipsoidische und Rotationseffekte können vernachlässigt werden (Engels, 2002)). Das Gleichungssystem wird mit einer Kugelflächenfunktionsentwicklung und der Laplace-Transformation umgeformt und in Abschnitt 2.2 für einen n -schichtigen Körper gelöst. In Abschnitt 2.3 wird die gewonnene Lösung in den Raum-Zeitbereich zurücktransformiert und Abschnitt 2.4 beschäftigt sich schließlich mit der Kugelflächenfunktionsentwicklung allgemeiner und spezieller Auflasten.

2.1 Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen für ein viskoelastisches Kontinuum

2.1.1 Kinematische Formulierung

Die in dieser Arbeit verwendete Notation ist Wolf (1997) entnommen. Darin wird die aktuelle Position \check{r}_i eines Teilchens im Kontinuum durch seine Anfangsposition X_i und seine Verschiebung u_i beschrieben:

$$\check{r}_i(\mathbf{X}, t) = X_i + u_i(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Hier wird die Lagrangesche Formulierung verwendet, bei der sich der Wert einer Feldgröße zur aktuellen Zeit t auf ein Teilchen bezieht, dessen Position zur Anfangszeit $t = 0$ der Ort $X_i = \check{r}_i(\mathbf{X}, t = 0)$ ist:¹

$$f_{ij\dots} := f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t), \quad (2.2)$$

wobei $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$ ein beliebiges Tensorfeld ist. Um Störungen des Anfangszustandes berechnen zu können, ist es notwendig, Gleichungen für die Störfelder herzuleiten. Als Ansatz hierzu dient die Zerlegung des Totalfeldes $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$ in

$$f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) + f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t). \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnen $f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) := f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t = 0)$ das Anfangsfeld und $f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t)$ das *materielle* Inkrement. Letzteres beschreibt die Änderung der Feldgröße $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$ an dem Teilchen, welches sich zur Anfangszeit $t = 0$ am Ort X_i und zur aktuellen Zeit t am Ort \check{r}_i befindet. Störungen können statt durch das materielle Inkrement $f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t)$ alternativ durch das *lokale* Inkrement $f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t)$ beschrieben werden. Unter der Voraussetzung infinitesimaler Störungen gilt zwischen beiden die Beziehung

$$f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) + f_{ij\dots,k}^{(0)}(\mathbf{X}, t)u_k, \quad (2.4)$$

¹Eine Alternative dazu ist die Eulersche Formulierung, bei der sich der Wert einer Feldgröße zur aktuellen Zeit t auf einen festen Raumpunkt \check{r}_i bezieht: $F_{ij\dots} := F_{ij\dots}(\mathbf{r}, t)$. (Die Groß- und Kleinschreibung bei der Eulerschen bzw. Lagrangeschen Formulierung erleichtert die Unterscheidung.)

wobei der letzte Term als *advectives* Inkrement bezeichnet wird (Wolf, 1997). Das lokale Inkrement bezeichnet im Gegensatz zum materiellen Inkrement die Änderung der Feldgröße $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$ am Ort X_i . Wegen der hier gemachten Voraussetzung

$$u_i^{(0)} = 0 \quad (2.5)$$

gilt insbesondere

$$u_i^{(\delta)} = u_i^{(\Delta)}, \quad (2.6)$$

so daß auf den Hochindex verzichtet worden ist. Gradienten eines Tensors $f_{ij\dots}$ bezüglich der Position X_k bzw. der Zeit t werden folgendermaßen abgekürzt:

$$f_{ij\dots,k} := \partial_k f_{ij\dots} := \frac{\partial f_{ij\dots}}{\partial X_k}, \quad (2.7)$$

$$d_t f_{ij\dots} := \frac{d f_{ij\dots}}{d t}, \quad d_t^2 f_{ij\dots} := \frac{d^2 f_{ij\dots}}{d t^2}. \quad (2.8)$$

Zum Schluß dieses Abschnittes wird noch eine abkürzende Schreibweise für Grenzflächenbedingungen eingeführt. Feldgleichungen gelten jeweils für einen Raum \mathcal{X}^3 , in dem sich Materialparameter stetig ändern. An den Grenzflächen \mathcal{X}^2 , an denen sich Materialparameter auch unstetig ändern können, müssen dagegen Grenzflächenbedingungen formuliert werden. Es wird folgende abkürzende Schreibweise benutzt:

$$\begin{aligned} [f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{-}^{+} &:= [f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{+} - [f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{-} \\ &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f_{ij\dots}(\mathbf{X} + \epsilon \mathbf{n}, t) - f_{ij\dots}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{n}, t)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei n_i senkrecht auf der Grenzfläche steht. Im folgenden werden die Argumente X_i und t unterdrückt.

2.1.2 Totalfelder

Die quasistatischen Gleichungen für die Totalfelder beschreiben gravitativ-viskoelastische Störungen eines chemisch und/oder entropisch geschichteten, kompressibelen, nichtrotierenden Kontinuums (Wolf, 1997).

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad \tau_{ij,j} + \rho^{(0)} g_i = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{Gravitationsbeschleunigung:} \quad g_i := -\phi_{,j} X_{j,i}, \quad (2.11)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \rho j = \rho^{(0)}, \quad (2.12)$$

$$\text{Funktionaldeterminante:} \quad j := \det[\check{r}_{i,j}], \quad (2.13)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad j(\phi_{,ij} X_{i,k} X_{j,k} + \phi_{,i} X_{i,jj}) = 4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.14)$$

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{ij} = t_{ij}^{(0)} + \mathcal{M}_{ij} [\check{r}_{m,k}(t-t') \check{r}_{m,l}(t-t') - \delta_{kl}], \quad (2.15)$$

$$\text{Zustandsgleichung:} \quad \varpi = \xi(\rho). \quad (2.16)$$

Dabei sind τ_{ij} die (asymmetrische) Piola-Spannung, ρ die Volumenmassendichte, g_i die Gravitationsbeschleunigung, ϕ das Gravitationspotential, t_{ij} die (symmetrische) Cauchy-Spannung, t

die aktuelle Zeit, t' die Anregungszeit, γ die Gravitationskonstante, ϖ der thermodynamische Druck und ξ der funktionale Zusammenhang zwischen Dichte und Druck.²

Die Materialgleichung verknüpft die Dehnungsgeschichte, die durch den Term in eckigen Klammern gegeben ist, mit der inkrementiellen Cauchy-Spannung $t_{ij}^{(\delta)}$ mit Hilfe des linearen und anisotropen Relaxationsfunktionals \mathcal{M}_{ij} . Aus dem Kausalitätsprinzip ergibt sich $0 \leq t' \leq t$. Der Zusammenhang zwischen der Cauchy- und der Piola-Spannung ist gegeben durch (z.B. Wolf, 1997)

$$\check{r}_{i,k} \tau_{jk} = j t_{ij}. \quad (2.17)$$

Dabei bezieht sich die in der Bewegungsgleichung vorkommende Piola-Spannung auf die undeformierte Fläche des Kontinuums, während sich die in der Materialgleichung vorkommende Cauchy-Spannung auf die deformierte Fläche bezieht. Wird angenommen, daß sich \mathcal{M}_{ij} als Konvolutionsintegral schreiben läßt, Isotropie vorliegt und das Kontinuum linear-viskoelastisch hinsichtlich Scherung und elastisch hinsichtlich Dilatation ist, ergibt sich (z.B. Wolf, 1997)

$$\mathcal{M}_{ij} = \kappa \delta_{ij} u_{k,k} - \frac{2}{3} \int_0^t \mu(t-t') \delta_{ij} d_{t'} u_{k,k}(t') dt' + \int_0^t \mu(t-t') d_{t'} [u_{i,j}(t') + u_{j,i}(t')] dt' \quad (2.18)$$

mit dem Kompressionsmodul κ und der Scherrelaxationsfunktion $\mu(t)$.

Die Grenzflächenbedingungen für die mechanischen und gravitativen Feldgrößen lauten (Wolf, 1997, 2003; Grafarend, 2000; Klemann, 2003)

$$[\check{r}_i]_-^+ = 0, \quad (2.19)$$

$$[\phi]_-^+ = 0, \quad (2.20)$$

$$[n_j t_{ij}]_-^+ = -g_i \sigma, \quad (2.21)$$

$$[n_i \phi_{,j} X_{j,i}]_-^+ = 4\pi \gamma \sigma. \quad (2.22)$$

wobei σ die Flächenmassendichte bezeichnet.

Damit ist ein System von partiellen Differentialgleichungen aufgestellt, mit dem sich die Feldgrößen g_i , j , \check{r}_i , X_i , t_{ij} , τ_{ij} und ϕ berechnen lassen, wenn die Parameter κ , $\mu(t)$, $t_{ij}^{(0)}$ und $\rho^{(0)}$ vorgegeben sind, die im allgemeinen von X_i abhängen.

2.1.3 Anfangsfelder

Zur Anfangszeit $t = 0$ soll sich das Kontinuum im hydrostatischen Zustand befinden. Dies ist dann der Fall, wenn keine deviatorischen Spannungen auftreten ($t_{ij}^{(0)} = 0$ für $i \neq j$) und die Normalspannung ($t_{ij}^{(0)}$ für $i = j$) für alle Raumrichtungen gleich groß ist. Formal läßt sich das durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$\text{Aktuelle Position} = \text{Anfangsposition:} \quad \check{r}_i^{(0)} = X_i, \quad (2.23)$$

$$\text{statischer Anfangszustand:} \quad d_t = 0, \quad (2.24)$$

$$\text{Definition des mechanischen Druckes:} \quad p^{(0)} := -\frac{1}{3} t_{ii}^{(0)}, \quad (2.25)$$

²Es wird hier vorausgesetzt, daß der funktionale Zusammenhang nicht von der chemischen Zusammensetzung oder der Entropie abhängt.

$$\text{hydrostatische Spannung:} \quad t_{ij}^{(0)} = -p^{(0)} \delta_{ij}, \quad (2.26)$$

$$\text{Konsequenz:} \quad \check{r}_{i,j}^{(0)} = X_{i,j} = \delta_{ij}, \quad (2.27)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist. Mit (2.27) folgt aus (2.13)

$$j^{(0)} = 1 \quad (2.28)$$

und weiter aus (2.17)

$$\tau_{ij}^{(0)} = t_{ij}^{(0)}. \quad (2.29)$$

Damit vereinfachen sich die Bewegungs-, Gravitations-, Potential- und Zustandsgleichung zu

$$p_{,i}^{(0)} = \rho^{(0)} g_i^{(0)}, \quad (2.30)$$

$$g_i^{(0)} = -\phi_{,i}^{(0)}, \quad (2.31)$$

$$\phi_{,ii}^{(0)} = 4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.32)$$

$$\varpi^{(0)} = \xi(\rho^{(0)}) = p^{(0)}. \quad (2.33)$$

Die erste Gleichung in (2.33) ergibt sich unmittelbar aus (2.16), die zweite aus der Annahme, daß der mechanische Druck und die Volumenmassendichte im Anfangszustand über die Zustandsgleichung ξ verknüpft sind (Wolf, 1997).

Für die Grenzflächenbedingungen ergeben sich unter der Voraussetzung, daß im Anfangszustand keine Flächenmassen vorhanden sind ($\sigma^{(0)} = 0$), die Beziehungen

$$[\check{r}_i^{(0)}]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.34)$$

$$[\phi^{(0)}]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.35)$$

$$[p^{(0)}]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.36)$$

$$[n_i^{(0)} \phi_{,i}^{(0)}]_{\pm}^{\pm} = 0. \quad (2.37)$$

Obwohl die oben genannten Felder stetig sind, ist zu beachten, daß Dichtediskontinuitäten $[\rho^{(0)}]_{\pm}^{\pm} =: \rho^{\pm}$ vorliegen können.

2.1.4 Materiell-lokale Form der Laplace-transformierten inkrementiellen Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen

Eine ausführliche Herleitung der Formeln dieses Abschnittes bieten Wolf (1997) und Thoma & Wolf (1999)³. Es wird dabei die Annahme gemacht, daß die Störungen isochemisch und isentrop sind. Dies wird durch die Erfahrung gerechtfertigt, daß chemische und thermische Diffusion gewöhnlich über viel größere Zeiträume abläuft als die viskoelastische Relaxation. Die quasistatische Bewegungsgleichung ($d^2t = 0$) lautet

$$\check{t}_{i,j,j}^{(\delta)} - (p_j^{(0)} \check{u}_j)_{,i} - g_i^{(0)} \check{\rho}^{(\Delta)} - \rho^{(0)} \check{g}_i^{(\Delta)} = 0. \quad (2.38)$$

Mit dem Druckinkrement (2.30) und der Kontinuitätsgleichung

$$(\rho^{(0)} \check{u}_i)_{,i} = -\check{\rho}^{(\Delta)} \quad (2.39)$$

³Zusätzlich zu den Herleitungen in Thoma & Wolf (1999) wird die Beziehung $\xi(\rho) = \xi(\rho^{(0)}) + \xi(\rho^{(\delta)}) = \xi(\rho^{(0)}) + (d\xi/d\rho)^{(0)} \rho^{(\delta)}$ verwendet.

ergibt sich die äquivalente Form

$$\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} - (\rho^{(0)} g_j^{(0)} \tilde{u}_j)_{,i} + g_i^{(0)} (\rho^{(0)} \tilde{u}_j)_{,j} - \rho^{(0)} \tilde{g}_i^{(\Delta)} = 0. \quad (2.40)$$

Die Material-, Potential-, Gravitations- und Zustandsgleichung lauten

$$\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} = (\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\delta_{ij}\tilde{u}_{k,k} + s\tilde{\mu}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad (2.41)$$

$$\tilde{\phi}_{,ii}^{(\Delta)} = 4\pi\gamma\tilde{\rho}^{(\Delta)} = -4\pi\gamma(\rho^{(0)}\tilde{u}_i)_{,i}, \quad (2.42)$$

$$\tilde{g}_i^{(\Delta)} = -\tilde{\phi}_{,i}^{(\Delta)}, \quad (2.43)$$

$$\tilde{\varpi}^{(\Delta)} = \left(\frac{d\xi}{d\rho}\right)^{(0)} (\tilde{\rho}^{(\Delta)} + \rho_{,i}^{(0)}\tilde{u}_i) - p_{,i}^{(0)}\tilde{u}_i. \quad (2.44)$$

In den Formeln bezeichnet die Tilde Laplace-Transformation und s die Laplace-Frequenz. Die Grenzflächenbedingungen lauten

$$[\tilde{u}_i]_{-}^{+} = 0, \quad (2.45)$$

$$[\tilde{\phi}^{(\Delta)}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.46)$$

$$[n_j^{(0)}\tilde{t}_{ij}^{(\delta)}]_{-}^{+} = -g_i^{(0)}\tilde{\sigma}, \quad (2.47)$$

$$[n_i^{(0)}(\tilde{\phi}_{,i}^{(\Delta)} + 4\pi\gamma\rho^{(0)}\tilde{u}_i)]_{-}^{+} = 4\pi\gamma\tilde{\sigma}. \quad (2.48)$$

2.1.5 Darwinsches Gesetz als Lösung der Adams-Williamson-Gleichung

Wird die Ableitung

$$p_{,i}^{(0)} = \left(\frac{d\xi}{d\rho}\right)^{(0)} \rho_{,i}^{(0)} \quad (2.49)$$

von (2.33) in (2.30) eingesetzt, erhält man die Adams-Williamson-Gleichung:

$$\left(\frac{d\xi}{d\rho}\right)^{(0)} \rho_{,i}^{(0)} = \rho^{(0)} g_i^{(0)}. \quad (2.50)$$

Um einen Ausdruck für $(d\xi/d\rho)^{(0)}$ zu erhalten, wird zunächst die Materialgleichung (2.18) für den hydrostatischen Fall ($d_t = 0$) vereinfacht:

$$\mathcal{M}_{ij} = \kappa\delta_{ij}u_{k,k}. \quad (2.51)$$

Mit (2.3) und (2.4) und Substituieren von (2.25) und (2.51) ergibt sich aus (2.15)

$$t_{ij}^{(\Delta)} = \delta_{ij}(\kappa u_{k,k} + p_{,k}^{(0)} u_k). \quad (2.52)$$

Da im *elastisch* kompressiblen Fall $p = \varpi$ ist (z.B. Malvern, 1969; Wolf, 1997), erhält man aus (2.25) und (2.52)

$$\varpi^{(\Delta)} = p^{(\Delta)} = -(\kappa u_{i,i} + p_{,i}^{(0)} u_i). \quad (2.53)$$

Gleichsetzen von (2.44) und (2.53) führt zusammen mit (2.39) zu der Beziehung

$$\left(\frac{d\xi}{d\rho}\right)^{(0)} = \frac{\kappa}{\rho^{(0)}}. \quad (2.54)$$

Damit ergibt sich aus (2.50) die bekanntere Form der Adams-Williamson-Gleichung (z.B. Williamson & Adams, 1923; Bullen, 1975; Cara, 1994):

$$\rho_{,i}^{(0)} = \rho^{(0)} g_i^{(0)} \frac{\rho^{(0)}}{\kappa}, \quad (2.55)$$

und aus (2.49) und (2.53) erhält man die Beziehung

$$p^{(\Delta)} = -\frac{\kappa}{\rho^{(0)}} (\rho^{(0)} u_i)_{,i} = \frac{\kappa}{\rho^{(0)}} \rho^{(\Delta)}. \quad (2.56)$$

Die Gleichung zeigt, daß im Fall lokaler Inkompressibilität⁴

$$(\rho^{(0)} u_i)_{,i} = -\rho^{(\Delta)} = 0 \quad (2.57)$$

gilt. Aus (2.57) folgt, daß ein verschobenes Teilchen dem anfänglichen Dichtegradienten so folgt, daß die lokale inkrementielle Dichte verschwindet.

Im hydrostatischen Anfangszustand müssen die Poisson-Gleichung (2.32) und die Adams-Williamson-Gleichung (2.55) erfüllt sein, damit Druck, Dichte und Gravitationsbeschleunigung in einer gegebenen Tiefe miteinander konsistent sind. Da die Adams-Williamson-Gleichung eine nichtlineare Differentialgleichung ist, wird diese durch geeignete Wahl von

$$\kappa = r\rho(r)g(r)\beta^{-1}, \quad (2.58)$$

wobei r den Radialabstand bezeichnet und β ein beliebiger Parameter ist, zum einen von der Poisson-Gleichung entkoppelt und zum anderen zu der linearen Differentialgleichung

$$\rho_{,r}^{(0)} + \frac{\beta\rho^{(0)}}{r} = 0 \quad (2.59)$$

umgeformt. Deren Lösung lautet

$$\rho^{(0)} = \alpha r^{-\beta}, \quad (2.60)$$

wobei α ein beliebiger Parameter, eine sphärische Geometrie vorausgesetzt und die Beziehung

$$g_i = -n_r g \quad (2.61)$$

verwendet worden ist. (2.60) wird in der Literatur als Darwinsches Gesetz bezeichnet (Darwin, 1884; Bullen, 1975). Für $\beta = 0$ erhält man Inkompressibilität, für $\beta = 3$ wird die Gravitationsbeschleunigung singular (vgl. Abschnitt 2.1.6), und für $\beta > 3$ ergibt sich eine Dichteinversion (Bullen, 1975). Da für $r = 0$ und $\beta \neq 0$ die Dichte divergiert, ergibt sich eine numerische Einschränkung des Darwinschen Gesetzes für den Erdkern, der hier inkompressibel modelliert wird.

2.1.6 Gravitationsbeschleunigung im Anfangszustand

Im hydrostatischen Anfangszustand lautet die Potentialgleichung (2.32) in Kugelkoordinaten (vgl. (A.1))

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \phi_{,r}^{(0)})_{,r} = 4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.62)$$

⁴Die lokale Inkompressibilität ist durch $\rho^{(\Delta)} = 0$, die materielle Inkompressibilität durch $\rho^{(\delta)} = 0$ definiert (vgl. Abschnitt 2.1.7).

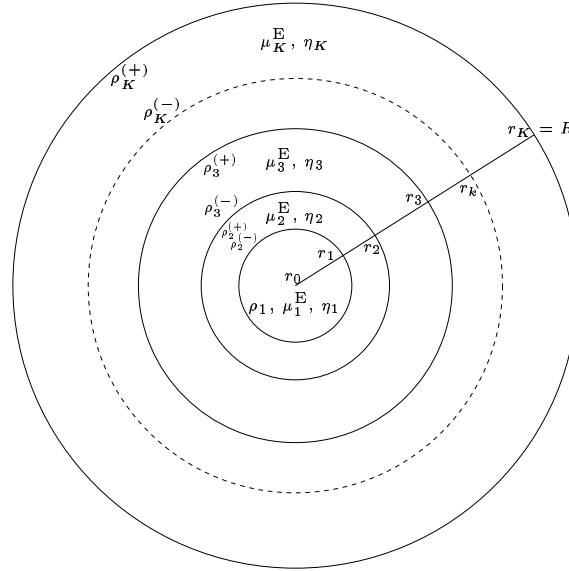


Abb. 2.1: Schematische Darstellung einer K -schichtigen Kugel.

woraus sich in Verbindung mit (2.31) und (2.61)

$$(r^2 g^{(0)})_{,r} = 4\pi\gamma \rho^{(0)} r^2 \quad (2.63)$$

ergibt. Integration von (2.63) erlaubt es, einen Ausdruck für $g^{(0)}(r)$ zu erhalten. Für Kugelschalen konstanter Dichte ergeben sich die Gleichungen (z.B. Grafarend, 1989; Martinec & Wolf, 1998; Wieczerkowski, 1999)⁵

$$g^{(0)}(r) = \frac{4\pi\gamma}{3} \rho_1 r, \quad r < r_1, \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} g^{(0)}(r) &= \frac{4\pi\gamma}{3r^2} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i (r_i^3 - r_{i-1}^3) + \rho_k (r^3 - r_{k-1}^3) \right] \\ &= \frac{4\pi\gamma}{3} \left[\rho_k r + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{k-1} r_i^3 (\rho_i - \rho_{i+1}) \right], \quad r_{k-1} < r < r_k, \quad k = 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Eine Verallgemeinerung von (2.64) für den lokal inkompressiblen Fall mit einer Dichte, die dem Darwinschen Gesetz (2.60) mit $0 < \beta < 3$ genügt, scheidet, da die Dichte für $r = 0$ singularär wird. Daher muß in der inneren Kugel $\beta = 0$ gelten. (2.65) hingegen läßt sich verallgemeinern und man erhält

$$g^{(0)}(r) = \frac{4\pi\gamma}{r^2} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{3 - \beta_i} (r_i^{3-\beta_i} - r_{i-1}^{3-\beta_i}) + \frac{\alpha_k}{3 - \beta_k} (r^{3-\beta_k} - r_{k-1}^{3-\beta_k}) \right], \quad (2.66)$$

$$r_{k-1} < r < r_k, \quad k = 2, \dots, K.$$

Es ist anzumerken, daß lokale Inkompressibilität im Anfangszustand der Kompressibilität, materielle Inkompressibilität in jedem Zustand der Inkompressibilität im konventionellen Sinne (2.75) entspricht.

⁵Zur Benennung der Indizes siehe Abb. 2.1; im materiell inkompressiblen Fall gilt $\rho_k^{(+)} = \rho_k^{(-)}$.

2.1.7 Vereinfachte inkrementielle Feldgleichungen

In diesem Abschnitt werden die inkrementiellen Feldgleichungen so weit vereinfacht, daß eine analytische Lösung möglich ist. Dabei wird unterschieden zwischen dem Fall lokaler Inkompresibilität, der eine Dichteänderung nach Maßgabe der Dichtezunahme mit der Tiefe im Anfangszustand aufgrund der Selbstkompression gestattet (Wolf, 1997), und dem „klassischen“ Fall der materiellen Inkompresibilität.

Lokale Inkompresibilität

Ein Material ist lokal inkompressibel, wenn

$$\rho^{(\Delta)} = 0 \quad (2.67)$$

gilt. Mit dieser Bedingung vereinfachen sich die Kontinuitätsgleichung (2.39) und die Bewegungsgleichung (2.40). Die Materialgleichung (2.41) gilt unverändert; aus der Poisson-Gleichung (2.42) wird die Laplace-Gleichung:

$$(\rho^{(0)} \tilde{u}_i)_{,i} = 0, \quad (2.68)$$

$$\tilde{t}_{ij,j}^{(\delta)} - (\rho^{(0)} g_j^{(0)} \tilde{u}_j)_{,i} - \rho^{(0)} \tilde{g}_i^{(\Delta)} = 0, \quad (2.69)$$

$$\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} = (\kappa - \frac{2}{3} s \tilde{\mu}) \delta_{ij} \tilde{u}_{k,k} + s \tilde{\mu} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad (2.70)$$

$$\tilde{\phi}_{,ii}^{(\Delta)} = 0. \quad (2.71)$$

Mit (2.60) folgt aus (2.68)

$$\tilde{u}_{i,i} = -\frac{\rho_{,i}^{(0)}}{\rho^{(0)}} \tilde{u}_i = \frac{\beta}{r} \tilde{u}_r, \quad (2.72)$$

wobei u_r die radiale Verschiebung ist.

Materielle Inkompresibilität

Ein Material ist materiell inkompressibel, wenn

$$\rho^{(\delta)} = 0 \quad (2.73)$$

gilt. Aus (2.4) und (2.39) folgt damit

$$\rho^{(0)} \tilde{u}_{i,i} = -\tilde{\rho}^{(\delta)} = 0. \quad (2.74)$$

Daraus ergibt sich als nicht-triviale Lösung

$$\tilde{u}_{i,i} = 0, \quad (2.75)$$

was als Inkompresibilitätsbedingung bekannt ist.

Damit in einem materiell inkompressiblen Material $\tilde{p}^{(\delta)}$ endlich bleibt muß $\kappa \rightarrow \infty$ gelten:

$$\lim_{\substack{\kappa \rightarrow \infty \\ u_{i,i} \rightarrow 0}} [(\kappa - \frac{2}{3} s \tilde{\mu}) \tilde{u}_{i,i}] = -\tilde{p}^{(\delta)} \quad (2.76)$$

Wolf (1997) zeigt, daß p die physikalische Bedeutung des mechanischen Druckes hat. Zusätzlich zu der vereinfachten Bewegungsgleichung (2.69) und Potentialgleichung (2.71), die weiterhin gültig bleiben, vereinfacht sich die Materialgleichung (2.41) zu

$$\tilde{t}_{ij}^{(\delta)} = -\tilde{p}^{(\delta)} \delta_{ij} + s \tilde{\mu} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}). \quad (2.77)$$

2.1.8 Aufstellung des Differentialgleichungssystems

Durch Kugelflächenfunktionsentwicklung ist es möglich, aus den Gleichungen (2.69), (2.70) und (2.71) ein System aus sechs gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung zu erzeugen. Die in Anhang A.1.4 hergeleiteten Gleichungen (A.35), (A.36), (A.44), (A.45), (A.48) und (A.49) lassen sich wie folgt in Matrixschreibweise darstellen:

$$\tilde{Y}_{i,r}^{nm} = A_{ij}^n \tilde{Y}_j^{nm}. \quad (2.78)$$

Der Lösungsvektor hat die Gestalt $\tilde{Y}_i^{nm} = (\tilde{U}^{nm}, \tilde{V}^{nm}, \tilde{T}_{rr}^{nm}, \tilde{T}_{r\theta}^{nm}, \tilde{\Phi}^{nm}, \tilde{Q}^{nm})^\top$, und die Koeffizientenmatrix lautet

$$A_{ij}^n := \begin{pmatrix} \frac{\beta-2}{r} & \frac{N}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{s\tilde{\mu}} & 0 & 0 \\ \frac{4s\tilde{\mu}}{r^2}(3-\beta) - \frac{4\rho^{(0)}g^{(0)}}{r} - \frac{6s\tilde{\mu}N}{r^2} + \frac{\rho^{(0)}g^{(0)}N}{r} & 0 & \frac{N}{r} & -\frac{\rho^{(0)}(n+1)}{r} & \rho^{(0)} & 0 \\ \frac{\rho^{(0)}g^{(0)}}{r} - \frac{2s\tilde{\mu}}{r^2}(3-\beta) & \frac{2s\tilde{\mu}(2N-1)}{r^2} & -\frac{1}{r} & -\frac{3}{r} & \frac{\rho^{(0)}}{r} & 0 \\ -4\pi\gamma\rho^{(0)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{n+1}{r} & 1 \\ -\frac{4\pi\gamma\rho^{(0)}(n+1)}{r} & \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)}N}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{r} \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Dabei gilt $N = n(n+1)$, \tilde{U}^{nm} und \tilde{V}^{nm} sind die Amplituden der Radial- bzw. Tangentialverschiebung, \tilde{T}_{rr}^{nm} und $\tilde{T}_{r\theta}^{nm}$ die Amplituden der Spannung in radialer bzw. tangentialer Richtung, $\tilde{\Phi}^{nm}$ ist die Amplitude der Potentialstörung und \tilde{Q}^{nm} ist eine Amplitude, in die die Potentialstörung, die Gravitationsstörung und die Radialverschiebung eingehen und die so gewählt ist, daß die Größe an den Grenzflächen stetig bleibt. Im Spezialfall $\beta = 0$ ist diese Koeffizientenmatrix identisch mit der, die den materiell inkompressiblen Fall beschreibt (z.B. Martinec & Wolf, 1998). Die zugehörigen Grenzflächenbedingungen sind

$$[\tilde{U}^{nm}]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.80)$$

$$[\tilde{V}^{nm}]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.81)$$

$$[\tilde{\Phi}^{nm}]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.82)$$

$$[\tilde{T}_{rr}^{nm}]_{\pm}^+ = g^{(0)}\tilde{\Sigma}^{nm}, \quad (2.83)$$

$$[\tilde{T}_{r\theta}^{nm}]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.84)$$

$$[\tilde{Q}^{nm}]_{\pm}^+ = 4\pi\gamma\tilde{\Sigma}^{nm}, \quad (2.85)$$

wobei die Definition $g^{(0)} := -n_r g_r^{(0)}$ verwendet ist.

2.2 Lösung des Differentialgleichungssystems

2.2.1 Lokale Inkompressibilität

Die Lösung der Laplace-Gleichung (2.71) nach Entwicklung in Kugelflächenfunktionen lautet (vgl. Anhang A.2.1)

$$\tilde{\Phi}^{nm} = Z_3^{nm} r^n + Z_6^{nm} r^{-n-1}. \quad (2.86)$$

Die Integrationskonstanten Z_3^{nm} und Z_6^{nm} werden im folgenden durch die Lösung der Bewegungsgleichung bestimmt. Dazu wird zunächst (2.70) in (2.69) eingesetzt, und man erhält die Gleichung

$$s\tilde{\mu}\tilde{u}_{i,jj} + [(\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\frac{\beta}{r}\tilde{u}_r + s\tilde{\mu}\frac{\beta}{r}\tilde{u}_r - \rho^{(0)}g_j^{(0)}\tilde{u}_{j,i}]_i - \rho^{(0)}\tilde{g}^{(\Delta)} = 0. \quad (2.87)$$

Durch Anwenden des Rotationsoperators vereinfacht sich diese zu⁶

$$\begin{aligned} s\tilde{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} &= \operatorname{rot} (\rho^{(0)} \operatorname{grad} \tilde{\phi}^{(\Delta)}) \\ &= \operatorname{grad} \rho^{(0)} \times \operatorname{grad} \tilde{\phi}^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Die Verwendung des Darwinschen Gesetzes (2.60), der Vektoridentität $\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}$, der vektoriellen Kugelflächenfunktionen (A.19) und (A.20) erlaubt eine weitere Vereinfachung:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} &= -\frac{\beta\rho^{(0)}}{rs\tilde{\mu}}(\mathbf{n}_r \times \operatorname{grad} \tilde{\phi}^{(\Delta)}), \\ \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}) &= -\frac{\beta\rho^{(0)}}{rs\tilde{\mu}} \left(\operatorname{grad} \Phi^{nm} \underbrace{\mathbf{n}_r \times \mathbf{S}_{(-1)}^{nm}}_0 + \frac{\Phi^{nm}}{r} \underbrace{\mathbf{n}_r \times \mathbf{S}_{(+1)}^{nm}}_{\mathbf{S}_{(0)}^{nm}} \right), \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{\beta\rho^{(0)}}{r^2s\tilde{\mu}} \Phi^{nm} \mathbf{S}_{(0)}^{nm}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

wobei \mathbf{n}_r für den Einheitsvektor in r -Richtung steht und $\mathbf{S}_{(\pm 1)}^{nm}$ sphäroidale sowie $\mathbf{S}_{(0)}^{nm}$ toroidale Vektor-Kugelflächenfunktionen sind. Aus (2.68) folgt, daß ein Vektorpotential \mathbf{v} existiert, für das

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \rho^{(0)} \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.90)$$

gilt. Substituieren von (2.86) und (2.90) in (2.89), ergibt eine inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{\rho^{(0)}} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\beta\rho^{(0)}}{r^2s\tilde{\mu}} (Z_3^{nm} r^n + Z_6^{nm} r^{-n-1}) \mathbf{S}_{(0)}^{nm}. \quad (2.91)$$

Mit der Lösung dieser Gleichung (vgl. Anhang A.2.2) kann man durch anschließendes Ableiten und Einsetzen in die Einzelgleichungen des Differentialgleichungssystems (2.78) und (2.79) die Fundamentallösung erhalten. Diese läßt sich als Summe von sechs linear unabhängigen Lösungsvektoren in Matrixschreibweise darstellen:

$$\tilde{Y}_i^{nm}(r, s) = M_{ij}^n(r, s) C_i^{nm}(s), \quad (2.92)$$

wobei C_i^{nm} ein 6×1 Spaltenvektor mit zunächst beliebigen Konstanten ist, die an die Randbedingungen anzupassen sind. Die Matrix M_{ij}^n ist explizit auf Seite 22 angegeben.

⁶Da sich für folgende Gleichungen die Indexschreibweise nicht eignet, wird bis einschließlich (2.91) und in (2.96) und (2.97) die symbolische Schreibweise verwendet, bei der Vektoren durch Fettdruck dargestellt werden.

$$M_{ij}^n := \left(\begin{array}{ccc} r^{n+1} & r^{\tau+\zeta} & \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{n+1} \\ \frac{3-\beta+n}{N} r^{n+1} & \frac{\zeta-\tau-1}{N} r^{\tau+\zeta} & \frac{n-2\beta+3}{Ns\tilde{\mu}} \rho^{(0)} r^{n+1} \\ \rho^{(0)} g r^{n+1} + s\tilde{\mu} \frac{2(n^2-n-3)+\beta(2-n)}{n} r^n & \rho^{(0)} g r^{\tau+\zeta} + s\tilde{\mu} (2\zeta - \beta - 3) r^{\tau+\zeta-1} & \rho^{(0)} \frac{E_1+2(n+1)^2-4\beta(n+1)}{n+1} r^n + \frac{g\rho^{(0)^2}}{s\tilde{\mu}} r^{n+1} \\ s\tilde{\mu} \frac{4-\beta+2n}{n+1} r^n & s\tilde{\mu} \left[1 + \frac{1+\zeta^2-2\zeta-\tau^2}{N} \right] r^{\tau+\zeta-1} & \frac{2n^2+4\beta-6+E_1}{N} \rho^{(0)} r^n \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1+2n-\beta)}{N} r^n \\ 4\pi\gamma\rho^{(0)} r^{n+1} & 4\pi\gamma\rho^{(0)} r^{\tau+\zeta} & \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)^2}}{s\tilde{\mu}} r^{n+1} + \frac{2n+1}{N} E_1 (1+2n-\beta) r^{n-1} \\ \\ r^{-n} & r^{\tau-\zeta} & \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{-n} \\ \frac{2-\beta-n}{N} r^{-n} & \frac{-\zeta-\tau-1}{N} r^{\tau-\zeta} & \frac{2-n-2\beta}{Ns\tilde{\mu}} \rho^{(0)} r^{-n} \\ \rho^{(0)} g r^{-n} - s\tilde{\mu} \frac{2(n^2+3n-1)+\beta(n+3)}{n+1} r^{-n-1} & \rho^{(0)} g r^{\tau-\zeta} - s\tilde{\mu} (2\zeta + \beta + 3) r^{\tau-\zeta-1} & \rho^{(0)} \frac{E_2+4\beta n+2n^2}{n} r^{-n-1} + \frac{g\rho^{(0)^2}}{s\tilde{\mu}} r^{-n} \\ s\tilde{\mu} \frac{\beta+2n-2}{n} r^{-n-1} & s\tilde{\mu} \left[1 + \frac{1+\zeta^2+2\zeta-\tau^2}{N} \right] r^{\tau-\zeta-1} & \frac{2n^2+4\beta+4n-4+E_2}{N} \rho^{(0)} r^{-n-1} \\ 0 & 0 & -\frac{E_2(\beta+2n+1)}{N} r^{-n-1} \\ 4\pi\gamma\rho^{(0)} r^{-n} & 4\pi\gamma\rho^{(0)} r^{\tau-\zeta} & \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)^2}}{s\tilde{\mu}} r^{-n} \end{array} \right), \quad (2.93)$$

$$\tau := \frac{\beta-3}{2}, \quad \zeta := \frac{1}{2} \sqrt{(\beta-1)^2 + 4N}, \quad N := n(n+1), \quad (2.94)$$

$$E_1 := 2(\beta-1)^2 + (4-3\beta)(n+1), \quad E_2 := 2(\beta-1)^2 - (4-3\beta)n. \quad (2.95)$$

2.2.2 Materielle Inkompressibilität

Falls $\rho^{(0)}$ konstant ist, vereinfacht sich (2.88) zu der homogenen Differentialgleichung

$$\text{rot div grad } \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (2.96)$$

Die Differentialgleichung vierter Ordnung (2.91) hat dann die wesentlich einfachere Form

$$\text{rot rot rot rot } \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.97)$$

und kann ebenfalls mit einem Exponentialansatz (vgl. Anhang A.2.2) gelöst werden. Die Lösungsmatrix M_{ij}^n in (2.92) für das Differentialgleichungssystem (2.78) und (2.79) mit $\beta = 0$ lautet (z.B. Wu, 1990; Martinec & Wolf, 1998)

$$M_{ij}^n(r, s) = {}^{(0)}M_{ij}^n(r) + s\tilde{\mu} {}^{(1)}M_{ij}^n(r) \quad (2.98)$$

mit

$${}^{(0)}M_{ij}^n := \begin{pmatrix} \frac{nr^{n+1}}{2(2n+3)} & r^{n-1} & 0 & \frac{(n+1)r^{-n}}{2(2n-1)} & r^{-n-2} & 0 \\ \frac{(n+3)r^{n+1}}{2(2n+3)(n+1)} & \frac{r^{n-1}}{n} & 0 & \frac{-(n-2)r^{-n}}{2n(2n-1)} & \frac{-r^{-n-2}}{n+1} & 0 \\ \frac{n\rho^{(0)}gr^{n+1}}{2(2n+3)} & \rho^{(0)}gr^{n-1} & \rho r^n & \frac{(n+1)\rho^{(0)}gr^{-n}}{2(2n-1)} & \rho^{(0)}gr^{-n-2} & \rho r^{-n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^n & 0 & 0 & r^{-n-1} \\ \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)}nr^{n+1}}{2(2n+3)} & 4\pi\gamma\rho^{(0)}r^{n-1} & (2n+1)r^{n-1} & \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)}(n+1)r^{-n}}{2(2n-1)} & 4\pi\gamma\rho^{(0)}r^{-n-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

$${}^{(1)}M_{ij}^n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(n^2-n-3)r^n}{2n+3} & 2(n-1)r^{n-2} & 0 & \frac{(1-n^2-3n)r^{-n-1}}{2n-1} & -2(n+2)r^{-n-3} & 0 \\ \frac{n(n+2)r^n}{(2n+3)(n+1)} & \frac{2(n-1)r^{n-2}}{n} & 0 & \frac{(n^2-1)r^{-n-1}}{n(2n-1)} & \frac{2(n+2)r^{-n-3}}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

2.2.3 Kugel mit K Schichten

Nachdem die Fundamentallösung M_{ij}^n des Differentialgleichungssystems (2.78) und (2.79) gefunden ist,⁷ kann daraus die Lösung für eine K -schichtige Kugel (Abb. 2.1) konstruiert werden. Zunächst muß der Schichtpropagator bestimmt werden. Dieser ergibt sich für die k -te Schicht ($k > 1$) nach Gilbert & Backus (1966) durch

$$P_{ij}^n(r_k, r_{k-1}, s) = M_{ik}^n(r_k, s)[M_{kj}^n(r_{k-1}, s)]^{-1}. \quad (2.101)$$

Die Inverse der Fundamentalmatrix und der Propagator sind in Anhang A.2.3 gelistet. Die Lösung an der Oberseite der k -ten Schicht ist somit durch

$$\tilde{Y}_i^{nm}(r_k, s) = P_{ij}^n(r_k, r_{k-1}, s)\tilde{Y}_j^{nm}(r_{k-1}, s) \quad (2.102)$$

⁷Die Lösung für den materiell inkompressiblen Fall wird als Spezialfall betrachtet.

gegeben. Sofern keine Massenbelegung an den Grenzschichten auftritt ($\tilde{\Sigma}^{nm} = 0$), sind alle Feldgrößen stetig, und die Lösung an einer beliebigen Grenzschicht kann durch

$$\tilde{Y}_i^{nm}(r_k, s) = \prod_{ij} P_{ij}^n(r_k, r_1, s) \tilde{Y}_j^{nm}(r_1, s) \quad (2.103)$$

berechnet werden, wobei die Definition

$$\prod_{ij} P_{ij}^n(r_k, r_1, s) := \prod_{\hat{k}=2}^k P_{ij}^n(r_{\hat{k}}, r_{\hat{k}-1}, s) \quad (2.104)$$

gilt. Die Lösung $\tilde{Y}_i^{nm}(r_1, s)$ an der Grenzschicht der inneren Kugel kann direkt aus der Fundamentallösung gewonnen werden. Da die Feldgrößen an der Stelle $r_0 = 0$ stetig sein müssen, wird die 6×3 Matrix $Z_{ij}^n(r, s)$ definiert, die aus den ersten drei Spalten der Fundamentallösung $M_{ij}^n(r, s)$ besteht. Somit ergibt sich

$$\tilde{Y}_i^{nm}(r_1, s) = Z_{ij}^n(r_1, s) K_j(s), \quad (2.105)$$

wobei $K_j(s)$ ein dreispaltiger Vektor mit Konstanten ist, die durch drei Grenzflächenbedingungen an der Oberfläche festgelegt werden müssen. Definiert man den Laplace-transformierten Lastdruck durch

$$\mathfrak{g}_{\tilde{\sigma}} := -g^{(0)}(R) \tilde{\sigma}, \quad (2.106)$$

so erhält man mit

$$\tilde{\Sigma}^{nm} = \frac{\mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}}{-g^{(0)}(R)} \quad (2.107)$$

aus den Grenzflächenbedingungen (2.83)–(2.85)

$$B_i \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s) := \begin{pmatrix} \tilde{T}_{rr}^{nm}(R) \\ \tilde{T}_{r\theta}^{nm}(R) \\ \tilde{Q}^{nm}(R) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4\pi\gamma}{g^{(0)}(R)} \end{pmatrix} \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s), \quad (2.108)$$

wobei R der Erdradius ist. Substituiert man (2.105) in (2.103), erhält man mit (2.108)

$$B_i \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s) = T_{ij}^n(s) K_j(s), \quad (2.109)$$

wobei die Definition

$$T_{ij}^n(s) := \prod_{ik} P_{ik}^n(R, r_1, s) Z_{kj}^n(r_1, s) \quad (2.110)$$

verwendet ist. Dabei werden für die 3×3 Matrix T_{ij}^n nur die den Feldgrößen \tilde{T}_{rr}^{nm} , $\tilde{T}_{r\theta}^{nm}$ und \tilde{Q}^{nm} entsprechenden Zeilen 3, 4 und 6 verwendet. Die Konstanten des Vektors K_i können nun durch Inversion der Matrix T_{ij}^n bestimmt werden, und es ergibt sich

$$\tilde{Y}_i^{nm}(r_k, s) = \prod_{ij} P_{ij}^n(r_k, r_1, s) Z_{jk}^n(r_1, s) [T_{kl}^n(s)]^{-1} B_l \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s). \quad (2.111)$$

Die Inversion der Matrix T_{ij}^n kann durch Division ihrer Adjungierten ${}^*T_{ij}^n$ durch ihre Determinante erreicht werden, so daß man schließlich die Formel

$$\tilde{Y}_i^{nm}(r_k, s) = \frac{W_i^n(r_k, s)}{\det T_{ij}^n(s)} \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s) := \frac{\prod_{ij} P_{ij}^n(r_k, r_1, s) Z_{jk}^n(r_1, s) {}^*T_{kl}^n(s) B_l}{\det T_{ij}^n(s)} \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s) \quad (2.112)$$

erhält.

2.2.4 Spezialfälle $n = 0$ und $n = 1$

Spezialfall $n = 0$

Im Spezialfall $n = 0$ verändert sich die Koeffizientenmatrix A_{ij} des Differentialgleichungssystems (2.78) und (2.79); insbesondere wegen $P_\theta^0 = 0$ ist die Tangentialverschiebung $\tilde{V}^0 = 0$ (vgl. A.28). Aufgrund der damit verbundenen Änderung des Ranges der Koeffizientenmatrix A_{ij} ist (2.93) (bzw. (2.98) im inkompressiblen Fall) nicht mehr die Lösungsmatrix des Differentialgleichungssystems. Bei der Betrachtung glazial-isostatischer Auflastprobleme spielen Terme des Grades $n = 0$, die einer Änderung der Gesamtmasse entsprechen, jedoch keine Rolle, da die Masse nur umverteilt wird; daher wird auf diesen Fall hier nicht näher eingegangen.

Spezialfall $n = 1$

Im Spezialfall $n = 1$ sind die Grenzflächenbedingungen und die Spaltenvektoren der Lösungsmatrix (2.98) nicht mehr linear unabhängig, und es wird eine weitere Grenzflächenbedingung benötigt, um eine vollständige Lösung des Gleichungssystems zu erhalten. Diese ergibt sich aus der Überlegung, daß für Auflastprobleme der gemeinsame Schwerpunkt von Last und Erde raumfest bleibt (Cathles, 1975; Greff-Lefftz & Legros, 1997). Formal bedeutet dies für die Potentialstörung $\tilde{\Phi}^{1m} = 0$, was die Grenzflächenbedingung (2.85) ersetzt. Somit lautet (2.108) im Fall $n = 1$

$$B_i \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{1m}}(s) := \begin{pmatrix} \tilde{T}_{rr}^{1m}(R) \\ \tilde{T}_{r\theta}^{1m}(R) \\ \tilde{\Phi}^{1m}(R) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{1m}}(s), \quad (2.113)$$

und von der Matrix T_{ij}^n in (2.110) müssen dann die den Feldgrößen \tilde{T}_{rr}^{1m} , $\tilde{T}_{r\theta}^{1m}$ und $\tilde{\Phi}^{1m}$ entsprechenden Zeilen 3, 4 und 5 verwendet werden.

2.3 Rücktransformation in den Raum-Zeitbereich

Um eine analytische Rücktransformation in den Zeitbereich durchführen zu können, ist es nötig, für den Lastdruck einen Separationsansatz zu wählen:

$$\mathfrak{g}_\sigma(\theta, \varphi, t) = g^{(0)}(R) \rho_L d(\theta, \varphi) h(t), \quad (2.114)$$

wobei ρ_L die Lastdichte, $d(\theta, \varphi)$ die Lastverteilung und $h(t)$ die Lastgeschichte bezeichnen. Laplace-Transformation und Kugelflächenfunktionsentwicklung von (2.114) ergeben

$$\mathfrak{g}_{\tilde{\Sigma}^{nm}}(s) = g^{(0)}(R) \rho_L D^{nm} \tilde{h}(s) \quad (2.115)$$

mit

$$d(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.116)$$

Außerdem muß die Laplace-Transformierte der Scherrelaxationsfunktion $\tilde{\mu}_k$ angegeben werden. In dieser Arbeit wird Maxwell-Viskoelastizität verwendet. Die Scherrelaxationsfunktion hat dann die Form (z.B. Wieczerkowski, 1999)

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k^E}{s + \frac{\mu_k^E}{\eta_k}}, \quad (2.117)$$

wobei μ_k^E der (elastische) Schermodul und η_k die Viskosität der k -ten Schicht sind.

2.3.1 Lösung im Spektralbereich

Mit (2.115) lautet die inverse Laplace-Transformation von (2.112)

$$Y_i^{nm}(r_k, t) = g(R) \rho_L D^{nm} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W_i^n(r_k, s) \tilde{h}(s)}{\det T_{ij}^n(s)} \right], \quad (2.118)$$

wobei \mathcal{L}^{-1} die inverse Laplace-Transformation bezeichnet.⁸ Werden die elastische und die viskosen Amplituden⁹

$${}^E A_i^n(r_k) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{W_i^n(r_k, s)}{\det T_{ij}^n(s)}, \quad {}^V A_i^n(r_k) := \frac{W_i^n(r_k, s_p^n)}{-s_p^n [\det T_{ij}^n(s)]_{s=s_p^n}} \quad (2.119)$$

eingeführt, so kann die inverse Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes durch

$$Y_i^{nm}(r_k, t) = \underbrace{\left\{ {}^E A_i^n(r_k) h(t) + \left[\sum_{p=1}^P -s_p^n {}^V A_i^n(r_k) e^{s_p^n t} \right] * h(t) \right\}}_{\mathcal{A}_i^n(r_k, t)} g(R) \rho_L D^{nm} \quad (2.120)$$

ausgedrückt werden (z.B. Wolf, 1985b; Wu, 1990; Thoma, 1997; Martinec & Wolf, 1998), wobei der Stern die Konvolution symbolisiert.¹⁰ ${}^E A_i^n(r_k)$ wird als elastische Mode, ${}^V A_i^n(r_k) e^{s_p^n t}$ als viskose Mode eines Körpers bezeichnet.

Werden die Amplituden mit dem Faktor $g(R) \rho_K^{(+)}$ multipliziert, so gilt für die Radialverschiebung an der Oberfläche

$$U^{nm} = -{}^E A_1^n(R) - \sum_{p=1}^P {}^V A_1^n(R) \approx 1. \quad (2.121)$$

Das Ergebnis beträgt exakt eins, wenn der Körper materiell inkompressibel und die oberste Schicht viskoelastisch ist; dies entspricht dem „Schwimmgleichgewicht“. Ist die äußere Schicht elastisch, so wird die Summe der Amplituden für größere Legendre-Grade deutlich kleiner als eins; dies ergibt sich aus der Filterwirkung der elastischen Lithosphäre für Auflasten mit kürzerer Wellenlänge. Ist der Körper lokal inkompressibel, so ist der Wert bei kleinen Legendre-Graden etwas größer als eins; bei einer viskoelastischen äußeren Schicht tritt bei größeren Legendre-Graden derselbe Effekt auf wie bei einem materiell inkompressiblen Körper.

Die Anzahl der Moden eines Erdmodelles mit Maxwell-Viskoelastizität ergeben sich für $n \geq 2$ durch die folgenden drei empirischen Regeln (z.B. Wu & Ni, 1996; Vermeersen & Sabadini, 1998):

1. Eine Grenzfläche zwischen zwei viskoelastischen Schichten erzeugt eine Mode, wenn ein Dichtesprung vorliegt, und zwei Moden, wenn sich die Viskosität und/oder der Schermodul ändern.

⁸Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird ab hier $g(R) = g^{(0)}(R)$ verwendet.

⁹Der Koeffizient $-1/s_p^n$ in der Definition der viskosen Amplitude sorgt dafür, daß alle Amplituden dieselbe Dimension und dasselbe Vorzeichen haben. Die Anzahl der viskosen Amplituden entspricht der Anzahl P der Nullstellen s_p^n von $\det T_{ij}^n(s)$.

¹⁰In Thoma (1997) wird das Konvolutionsintegral für eine stückweise lineare Lastgeschichte ausführlich behandelt; die Ergebnisse sind hier nur knapp in Anhang A.3 zusammengefaßt.

2. Eine Grenzfläche zwischen einer elastischen und einer viskoelastischen Schicht erzeugt unabhängig von der Dichteänderung eine Mode.
3. Eine Grenzfläche zwischen einer viskoelastischen und fluiden Schicht erzeugt eine Mode, wenn ein Dichtesprung vorliegt.

Im Fall $n = 1$ ist die Anzahl der Moden reduziert: Die Mantelmode (M0, vgl. Seite 35) verschwindet und eine Änderung der Viskosität und/oder des Schermoduls zwischen zwei viskoelastischen Schichten erzeugt nur eine Mode (Greff-Lefftz & Legros, 1997).

2.3.2 Lovesche Zahlen

Eine weitere Möglichkeit, das viskoelastische Relaxationsverhalten im Spektralbereich darzustellen, sind die dimensionslosen Loveschen Zahlen, mit denen sich die Radialverschiebung, Tangentialverschiebung und Potentialstörung, angeregt durch externe Störungen, beschreiben lassen (z.B. Munk & MacDonald, 1960; Merriam, 1985; Wiecezkowski, 1999). Es ist möglich, Lovesche Zahlen für verschiedene Quellen zu definieren (z.B. Gezeiten, Scherspannungen, Normalspannungen (z.B. Sun & Okubo, 1993)). In dieser Arbeit werden nur Auflasten behandelt, die zu Normalspannungen führen. Die Definition der Loveschen Zahlen lautet in diesem Falle (z.B. Munk & MacDonald, 1960; Sun & Sjöberg, 1998)

$$\begin{pmatrix} h^n(r) \\ l^n(r) \\ k^n(r) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} U^{nm}(r)g(R) \\ V^{nm}(r)g(R) \\ \Phi^{nm}(r) - \left(\frac{r}{R}\right)^n \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

Damit erhält man aus (2.120) und der Kugelflächenfunktionsentwicklung für eine punktförmige Auflast (z.B. Farrell, 1972) gemäß

$$D^n := D^{n0} = \frac{2n+1}{4\pi\gamma R} \quad (2.123)$$

die elastische und die viskosen Loveschen Zahlen für die Radial- und die Tangentialverschiebung bzw. die Potentialstörung an der Oberfläche:¹¹

$$Y_1^{nm}(r_k, t) = \frac{\rho_L}{g(R)} \left\{ \underbrace{\frac{2n+1}{4\pi\gamma R} g^2(R) {}^E A_1^n(r_k) \delta(t)}_{Eh^n(r_k)} + \sum_{p=1}^P \underbrace{-s_p^n \frac{2n+1}{4\pi\gamma R} g^2(R) {}^V A_1^n(r_k) e^{s_p^n t}}_{V_p h^n(r_k)} \right\} * h(t), \quad (2.124)$$

$$Y_2^{nm}(r_k, t) = \frac{\rho_L}{g(R)} \left\{ \underbrace{\frac{2n+1}{4\pi\gamma R} g^2(R) {}^E A_2^n(r_k) \delta(t)}_{El^n(r_k)} + \sum_{p=1}^P \underbrace{-s_p^n \frac{2n+1}{4\pi\gamma R} g^2(R) {}^V A_2^n(r_k) e^{s_p^n t}}_{V_p l^n(r_k)} \right\} * h(t), \quad (2.125)$$

$$Y_5^{nm}(R, t) = \frac{\rho_L}{g(R)} \left\{ \underbrace{\left[\frac{2n+1}{4\pi\gamma R} g(R) {}^E A_5^n(R) - 1 \right] \delta(t)}_{Ek^n(R)} + \sum_{p=1}^P \underbrace{-s_p^n \frac{2n+1}{4\pi\gamma R} g(R) {}^V A_5^n(R) e^{s_p^n t}}_{V_p k^n(R)} \right\} * h(t). \quad (2.126)$$

¹¹Es gilt: $s_p^n < 0$.

2.3.3 Lösung im Raumbereich

Die Rücktransformation in den Raumbereich kann mittels (A.26) und (A.28) durchgeführt werden. Mit der Definition

$$Y^{nm}(\theta, \varphi) := P^{n|m|}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(m\varphi), & m \geq 0 \\ \sin(|m|\varphi), & m < 0 \end{cases} \quad (2.127)$$

ergeben sich die Radial- und die Tangentialverschiebung zu

$$u_r(r_k, \theta, \varphi, t) = g(R) \rho_L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_1^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi), \quad (2.128)$$

$$u_\theta(r_k, \theta, \varphi, t) = g(R) \rho_L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_2^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y_{,\theta}^{nm}(\theta, \varphi), \quad (2.129)$$

$$u_\varphi(r_k, \theta, \varphi, t) = g(R) \rho_L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_2^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D^{nm} \frac{Y_{,\varphi}^{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta}. \quad (2.130)$$

Das lokale Inkrement des Potentials lautet

$$\phi^{(\Delta)}(r_k, \theta, \varphi, t) = g(R) \rho_L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.131)$$

Die Geoidhöhe läßt sich nach der Formel von Bruns gemäß

$$e_r(\theta, \varphi, t) = -\frac{\phi^{(\Delta)}(R, \theta, \varphi, t)}{g(R)} \quad (2.132)$$

berechnen (z.B. Officer, 1974; Heiskanen & Moritz, 1993; Wolf, 1997). Mit (2.127) und (A.16) ergeben sich für die Ableitungen in (2.129) und (2.130)

$$Y_{,\theta}^{nm}(\theta, \varphi) = \frac{(n-m+1)P^{n+1|m|}(\cos \theta) - (n+1)\cos \theta P^{n|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} \begin{cases} \cos(m\varphi), & m \geq 0 \\ \sin(|m|\varphi), & m < 0 \end{cases}, \quad (2.133)$$

$$Y_{,\varphi}^{nm}(\theta, \varphi) = |m|P^{n|m|}(\cos \theta) \begin{cases} -\sin(m\varphi), & m \geq 0 \\ \cos(|m|\varphi), & m < 0 \end{cases}. \quad (2.134)$$

Das lokale Inkrement der Gravitationsbeschleunigung wird mit Hilfe der Potentialstörung berechnet. Im Außenraum $r \leq R$ lautet die Formel (vgl. (A.58))

$$\phi^{(\Delta)}(r, \theta, \varphi, t) = g(R) \rho_L \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{nm} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.135)$$

Da das Potential an der Erdoberfläche $r = R$ stetig ist, gilt

$$\Phi^{nm}(t) = \mathcal{A}_5^n(R, t), \quad (2.136)$$

und es ergibt sich für den Außenraum

$$\phi^{(\Delta)}(r, \theta, \varphi, t) = g(R) \rho_L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_5^n(R, t) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.137)$$

Da das lokale Inkrement der Gravitationsbeschleunigung durch

$$g^{(\Delta)}(r, \theta, \varphi, t) = -\phi_{,r}^{(\Delta)}(r, \theta, \varphi, t) - \frac{2}{R}\phi^{(\Delta)}(r, \theta, \varphi, t) \quad (2.138)$$

gegeben ist (z.B. Heiskanen & Moritz, 1993), erhält man schließlich

$$g^{(\Delta)}(R, \theta, \varphi, t) = \frac{g(R)\rho_L}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \mathcal{A}_5^n(R, t) \sum_{m=-n}^n D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.139)$$

Das materielle Inkrement der Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche ergibt sich mit (2.4) und $g_{,r}^{(0)} = -2g^{(0)}/R$ (z.B. Heiskanen & Moritz, 1993):

$$\begin{aligned} g^{(\delta)}(R, \theta, \varphi, t) &= g^{(\Delta)}(R, \theta, \varphi, t) + g_{,r}(R) u_r(R, \theta, \varphi, t) \\ &= g^{(\Delta)}(R, \theta, \varphi, t) - \frac{2g(R)}{R} u_r(R, \theta, \varphi, t). \end{aligned} \quad (2.140)$$

2.4 Kugelflächenfunktionsentwicklung der Lastverteilung

Für die explizite Lösung werden in (2.128)–(2.139) noch die Kugelflächenfunktionsentwicklungskoeffizienten D^{nm} der Last benötigt. Um diese zu erhalten, wird (2.116) mit $Y^{n'm'}$ multipliziert und anschließend über die Kugeloberfläche integriert, so daß sich

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d(\theta, \varphi) Y^{n'm'}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D^{nm} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta Y^{nm}(\theta, \varphi) Y^{n'm'}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \quad (2.141)$$

ergibt. Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (A.18) und Umbenennung der Indizes folgt

$$D^{nm} = \frac{2n+1}{2\pi(1+\delta_{m0})} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d(\theta, \varphi) Y^{nm}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (2.142)$$

Wird die Variablentransformation $y := \cos \theta$ durchgeführt und die Definition (2.127) benutzt, ergibt sich

$$D^{nm} = \frac{2n+1}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_{-1}^1 P^{n|m|}(y) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\arccos y, \varphi) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin |m|\varphi \end{Bmatrix}}_{I^m(y)} d\varphi dy, \quad \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 0 \end{cases}. \quad (2.143)$$

Für spezielle Lastverteilungen $d(\theta, \varphi)$ sind weitere Vereinfachungen möglich. Dazu ist es erforderlich, daß die Lastverteilung eindeutig in einen tangentialen (Grundfläche) und einen radialen (Querschnitt) Anteil zerlegt werden kann. Werden speziell kreisförmige oder elliptische Grundflächen betrachtet, deren Mittelpunkt bei $\theta = 0$ (Nordpol) liegt, so lassen diese sich durch¹²

$$\begin{aligned} r_0(\varphi) &= r_0 = a = b, && \text{kreisförmige Grundfläche} \\ r_0(\varphi) &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, && \text{elliptische Grundfläche} \end{aligned} \quad (2.144)$$

¹²Die Formel für die elliptische Last erhält man aus dem Kosinussatz und der Bedingung, daß die Summe der Abstände r_1 und r_2 zu den beiden Brennpunkten der Ellipse konstant ist: $2a = r_1 + r_2$.

beschreiben, wobei a und b die große bzw. kleine Halbachse der Ellipse sind. Damit ergibt sich der Winkel θ_0 , innerhalb dessen die Last eine nichtverschwindende Höhe hat, zu

$$\theta_0(\varphi) = \frac{r_0(\varphi)}{R}. \quad (2.145)$$

Mit $y_0 := \cos \theta_0$ und $y := \cos \theta$ läßt sich der radiale Anteil dann schreiben als

$$d(\arccos y, \varphi) = \begin{cases} f(y), & 1 \geq y > y_0(\varphi) \\ 0, & y_0(\varphi) > y \geq -1 \end{cases}, \quad (2.146)$$

wobei $f(y)$ je nach Wahl des Lastquerschnitts unterschiedlich ausfällt:

$$\begin{array}{l} \text{rechteckig:} \\ \text{parabolisch (stehend):} \end{array} \quad f(y) = 1, \quad (2.147)$$

$$f(y) = \frac{y^2 - y_0^2}{1 - y_0}, \quad (2.148)$$

$$\text{elliptisch:} \quad f(y) = \sqrt{\frac{y^2 - y_0^2}{1 - y_0}}, \quad (2.149)$$

$$\text{glockenförmig:} \quad f(y) = \left(\frac{y^2 - y_0}{1 - y_0} \right)^2, \quad (2.150)$$

$$\text{parabolisch (liegend):} \quad f(y) = \sqrt{1 - \frac{\sin \arccos y}{\sin \arccos y_0}}. \quad (2.151)$$

2.4.1 Kreisförmige Lastverteilung

In diesem Fall ergeben sich mit $m = 0$ und $d(\theta, \varphi) = d(\theta)$ die Vereinfachungen

$$D^{nm} \rightarrow D^n,$$

$$P^{nm} \rightarrow P^n, \quad (2.152)$$

$$I^0(y) = 1,$$

$$D^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P^n(y) d(\arccos y) dy. \quad (2.153)$$

In (2.127) und damit auf den *rechten* Seiten von (2.128)–(2.139) bezeichnet θ dann den Winkelabstand zwischen dem Beobachtungsort mit den Koordinaten (θ_b, φ_b) und dem Lastzentrum mit den Koordinaten (θ_d, φ_d) . Auf den *linken* Seiten von (2.128)–(2.139) stehen die Koordinaten des Beobachtungsortes (θ_b, φ_b) . Nach dem Kosinussatz der sphärischen Geometrie (hier für geographische Koordinaten angegeben) gilt

$$\cos \theta = \sin \theta_d \sin \theta_b + \cos \theta_d \cos \theta_b \cos(\varphi_d - \varphi_b). \quad (2.154)$$

Orte auf der Südhalbkugel werden durch negative Vorzeichen der Latitude θ unterschieden.

Je nach Wahl von $d(\arccos y)$ ist eine analytische¹³ oder numerische Lösung von (2.153) angezeigt. Für die numerische Integration bietet sich die Gauß-Legendre-Quadratur an (z.B.

¹³In Anhang A.4 sind hierfür Beispiele gegeben.

Press *et al.*, 1980; Bronstein & Semendjajew, 1991):

$$\int_{-1}^1 P^n(y) d(\arccos y) dy \approx \sum_{i=1}^{i_{\max}} w_i P^n(y_i) d(\arccos y_i), \quad (2.155)$$

bei der die Gewichte w_i und die Stützstellen y_i durch die Wahl von i_{\max} vorgegeben sind.

2.4.2 Elliptische Lastverteilungen

Für beliebige Lastverteilungen ist das Integral

$$D^{nm} = \frac{2n+1}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_{-1}^1 P^{n|m|}(y) I^m(y) dy \quad (2.156)$$

mit $I^m(y)$ gemäß (2.143) zu lösen. Mit der Gauß-Legendre-Quadratur ergibt sich

$$\int_{-1}^1 P^{nm}(y) I^m(y) dy \approx \sum_{i=1}^{i_{\max}} w_i P^{nm}(y_i) I^m(y_i). \quad (2.157)$$

Diskretisiert man für $I^m(y)$ die Longitude φ entlang der vorgegebenen Latitude $y_i = \arccos \theta_i$, so ergibt sich mit $d\varphi = 2\pi/j_{\max}$ die Beziehung

$$I^m(y_i) \approx \frac{1}{j_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} d(\arccos y_i, \varphi_j) \begin{cases} \cos(m\varphi_j), & m \geq 0 \\ \sin(|m|\varphi_j), & m < 0 \end{cases}. \quad (2.158)$$

Zusätzlich zum Abstand θ zwischen dem Mittelpunkt der Last und dem durch (2.154) gegebenen Beobachtungsort wird in (2.127) bei einer elliptischen Lastverteilung der Winkel φ zwischen dem Beobachtungsort und der großen Halbachse der Last benötigt (Abb. 2.2). Dieser ergibt sich mit Hilfe des Sinussatzes der sphärischen Geometrie zu

$$\varphi = \arcsin \frac{\sin|\theta_b - \theta_d|}{\sin\theta} + \delta, \quad (2.159)$$

wobei die Definition

$$\delta := \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \chi & \text{für } \theta \geq \theta_d \wedge \varphi \geq \varphi_d \vee \theta < \theta_d \wedge \varphi < \varphi_d \\ \chi - \frac{\pi}{2} & \text{für } \theta \geq \theta_d \wedge \varphi < \varphi_d \vee \theta < \theta_d \wedge \varphi \geq \varphi_d \end{cases} \quad (2.160)$$

gilt; χ ist dabei der Winkel zwischen der großen Halbachse der Last und der Nord-Süd-Achse. In Worten ausgedrückt: Befindet sich der Beobachtungsort nord-östlich oder süd-westlich der Last, gilt der erste Fall, sonst der zweite.

Zum Ende dieses Abschnittes soll noch kurz auf die numerische Implementierung eingegangen werden: Zunächst muß festgelegt werden, bis zu welchem Grad n_{\max} die Kugelflächenfunktionen der Lastgeometrie $d(\theta, \varphi)$ entwickelt werden müssen. Üblicherweise wird angenommen, daß eine Struktur der Länge L gerade dann noch aufgelöst wird, wenn die Entwicklung bis zum Grad $n_{\max} = 2\pi R/L$ läuft. Da jedoch nicht nur die Last als Ganzes erfaßt werden soll, sondern auch die Einzelheiten ihres Querschnitts aufgelöst werden müssen, ist es notwendig, bis zu deutlich höheren Graden zu entwickeln. Das heißt außer dem Lastradius hängt es vom Lastquerschnitt ab, wie weit die Entwicklung ausgeführt werden muß.¹⁴

¹⁴Bei parabolischem Querschnitt sollte die Entwicklung einer axialsymmetrischen Last mit dem Radius $r_0^1 =$

Nachdem n_{\max} festgelegt worden ist, sind die Parameter i_{\max} und j_{\max} zu bestimmen. Nach Sneeuw (1994) wird der Gitterabstand π/n_{\max} benötigt, um alle Koeffizienten zu bestimmen. Dies wird erreicht, indem entlang der Latitude $i_{\max} = 2n_{\max} + 1$ und entlang der Longitude $j_{\max} = 2n_{\max} - 1$ äquidistante Stützstellen verteilt werden. Verzichtet man entlang der Latitude auf äquidistante Stützstellen und verwendet stattdessen die Gauß-Legendre-Quadratur, so läßt sich die Anzahl der Stützstellen auf $i_{\max} = n_{\max} + 1$ reduzieren. Das im Anschluß an die theoretischen Vorüberlegungen im Rahmen der Arbeit erstellte Programm zur Berechnung der Kugelflächenfunktionen eines Lastmodells ist in Anhang A.4 beschrieben.

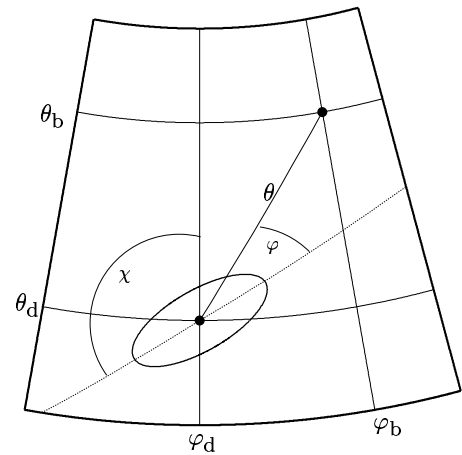


Abb. 2.2: Bestimmung des Winkels φ zwischen dem Beobachtungspunkt und der großen Halbachse bezogen auf den Mittelpunkt der Ellipse.

1000 km ($r_0^2 = 500$ km, $r_0^3 = 100$ km) bis zum Grad $n_{\max}^1 = 200$ ($n_{\max}^2 = 400$, $n_{\max}^3 = 1000$) ausgeführt werden. Im Anhang zeigen Abb. A.6 und A.7 zwei Beispiele dafür, wie der Radius und der Querschnitt einer Last den benötigten Entwicklungsgrad bestimmen.

3. Relaxationsverhalten ebener und sphärischer Erdmodelle

In diesem Kapitel wird das Relaxationsverhalten ebener und sphärischer, materiell inkompressibler Erdmodelle verglichen. Ebene Modelle sind häufig zur Interpretation des glazial-isostatischen Ausgleichs in Fennoskandien, Spitzbergen, Schottland oder Island herangezogen worden (Wolf, 1986, 1987; Fjeldskaar & Cathles, 1991; Sigmundsson & Einarsson, 1992; Fjeldskaar, 1994; Breuer & Wolf, 1995; Kaufmann & Wolf, 1996; Thoma, 1997; Wolf *et al.*, 1997a). Gemessen am Erdumfang sind diese Gebiete klein, daher ist diese Vereinfachung möglich. Sphärische Erdmodelle werden zur Interpretation der entsprechenden Vorgänge in Kanada und in globalen Modellen verwendet (Peltier, 1985; Lambeck, 1990; Lambeck *et al.*, 1990). Der Unterschied im Relaxationsverhalten zwischen ebenen und sphärischen Erdmodellen wurde bereits von Wolf (1984) behandelt. Er beschränkte sich jedoch zum einen auf homogene und zweischichtige Erdmodelle mit Mantel und Lithosphäre, zum anderen ist das sphärische Modell extern gravitierend und nicht wie hier selbstgravitierend. Einen weiteren Vergleich zwischen einfachen ebenen und sphärischen Erdmodellen präsentierten Amelung & Wolf (1994). Sie kamen zu dem Schluß, daß die Fehler, die sich zum einen durch die Vernachlässigung der Sphärizität und zum anderen durch die Vernachlässigung der Selbstgravitation ergeben, sich teilweise kompensieren.

Die hier verwendete Theorie für homogene, ebene, geschichtete, extern gravitierende Erdmodelle stammt im wesentlichen von Wolf (1985b,c) und Wolf (1991) und wird ausführlich in Thoma & Wolf (1999) beschrieben.¹

In Abschnitt 3.1 werden zunächst die in diesem Kapitel verwendeten Erd- und Lastmodelle beschrieben, bevor in Abschnitt 3.2 untersucht wird, wie sich unterschiedliche Parametrisierungen der Erdmodelle auf den Unterschied im Relaxationsverhalten zwischen ebenen und sphärischen Erdmodellen auswirken.

3.1 Erd- und Lastmodelle

3.1.1 Erdmodelle

Wolf (1985b) vergleicht in seiner Arbeit das viskoelastische Verhalten verschiedener ebener Erdmodelle. Diese Berechnungen werden in der vorliegenden Arbeit zum Teil wiederholt, da sie für den Vergleich mit sphärischen Modellen benötigt werden. Der Unterschied bei der Wahl der Modellparameter liegt darin, daß bei ebenen, extern gravitierenden Erdmodellen die Dichte frei wählbar ist, bei sphärischen, selbstgravitierenden Erdmodellen die Dichte jedoch so gewählt sein muß, daß sich die Masse der Erde ergibt. Dies kann z.B. dadurch erreicht werden, daß die Gravitationsbeschleunigung an den Schichtgrenzen festgelegt ist (hier werden für die Gravitationsbeschleunigung die in PREM angegebenen Werte nach Stacey (1992) verwendet). Aus (2.64)

¹Der numerische Code für ebene Erdmodelle wird in Thoma (1997) beschrieben.

erhält man für die Dichte der inneren Kugel

$$\rho_1 = \frac{3g^{(0)}(r_1)}{4\pi\gamma r_1}. \quad (3.1)$$

Sukzessive kann dann mit (2.65) die Dichte der darüberliegenden Schichten bestimmt werden:

$$\rho_k = \frac{\frac{3r_k^2 g^{(0)}(r_k)}{4\pi\gamma} - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i (r_i^3 - r_{i-1}^3)}{r_k^3 - r_{k-1}^3}. \quad (3.2)$$

Die Dichte, die man auf diese Weise für die einzelnen Schichten bestimmt, ist jeweils eine mittlere Volumendichte. Nach Vermeersen & Sabadini (1997) ergeben sich für Erdmodelle mit wenigen Schichten konstanter Dichte bessere Resultate, wenn mittlere Volumendichten verwendet werden als wenn die Dichtesprünge vorgegeben werden, die entweder zu einer zu hohen Dichte an der Oberfläche der Erde oder zu einer zu niedrigen Dichte im Erdkern führen. Die Parameter der drei hier verwendeten Erdmodelle sind in Tab. 3.1 zusammengestellt. Erdmodell H bezeichnet ein homogenes Erdmodell ohne Schichtung und Erdmodell CML ein Modell mit Kern (Core), Mantel und Lithosphäre. Erdmodell CMdL stimmt in seinen viskoelastischen Parametern mit Erdmodell CML überein, besitzt aber zusätzlich noch Dichtesprünge im Mantel.

Schicht	\hat{h} (km)	r (km)	ρ (kg/m ³)	μ (Pa)	η (Pa s)
Erdmodell H					
1	∞	6371	5515	1.45×10^{11}	1.0×10^{21}
Erdmodell CML					
3	\hat{h}_3	6371	4447	0.67×10^{11}	∞
2	$2891 - \hat{h}_3$	$6371 - \hat{h}_3$	4447	1.45×10^{11}	1.0×10^{21}
1	∞	3480	10982	0	0
Erdmodell CMdL					
5	100	6371	3153	0.67×10^{11}	∞
4	300	6271	3439	1.45×10^{11}	1.0×10^{21}
3	270	5971	3881	1.45×10^{11}	1.0×10^{21}
2	2221	5701	4902	1.45×10^{11}	1.0×10^{21}
1	∞	3480	10982	0	0

Tab. 3.1: Parameterwerte der verwendeten Erdmodelle. Die Angaben in den Spalten zwei und drei beziehen sich auf die Mächtigkeit \hat{h}_k (ebene Erdmodelle) bzw. den äußeren Radius r_k (sphärische Erdmodelle) einer Schicht. Die Mächtigkeit der Lithosphäre \hat{h}_3 bei Erdmodell CML ist ein freier Parameter.

3.1.2 Lastmodell

Um den Unterschied zwischen ebenen und sphärischen Erdmodellen zu untersuchen, wird eine Heaviside-Entlastungsgeschichte verwendet, für die die Last zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet. Als Lastprofil wird eine stehende Parabel verwendet. Die analytische Kugelflächenfunktionsentwicklung dieses Querschnittes ist in Anhang A.4, die Hankel-Transformation² in Sneddon (1995) und Thoma & Wolf (1999) zu finden. Die axiale Lastmächtigkeit beträgt $h_0 = 3000$ m, die Lastdichte ist $\rho_L = 910$ kg/m³, der Lastradius ist ein freier Parameter.

²Die Hankel-Transformierte des Lastprofils wird für ebene Erdmodelle benötigt.

3.2 Relaxationsverhalten im Spektral- und Raumbereich

In den folgenden Abschnitten wird das Relaxationsverhalten der drei Erdmodelle im Spektral- und Raumbereich untersucht. Zunächst wird das homogene Modell (Erdmodell H) betrachtet, da an diesem Beispiel prinzipielle Unterschiede zwischen ebenen und sphärischen Erdmodellen deutlich werden. Anschließend wird anhand eines dreischichtigen Modells mit Kern, Mantel und Lithosphäre (Erdmodell CML) der Einfluß eines flüssigen Kerns und einer Lithosphäre mit variabler Mächtigkeit untersucht. Abschließend wird der Einfluß von Dichtesprüngen im Mantel diskutiert (Erdmodell CMdL), da diese bei der Berücksichtigung mehrerer glazialer Zyklen von Bedeutung sind.

Für die einzelnen Moden wird konventionell folgende Notation verwendet (Peltier *et al.*, 1978; Peltier & Wu, 1982; Wolf, 1984; Peltier, 1985; Wolf, 1985b; Mitrovica & Peltier, 1989): M0 = Mantelmode; L0 = Lithosphärenmode; C0 = Kernmode; M1 und M2 = Moden, die auf Dichtediskontinuitäten im Mantel zurückzuführen sind; T1 und T2 = Moden, die durch eine Änderung der Viskosität und/oder des Schermoduls entstehen (vgl. S. 26). Die viskosen Moden haben die Relaxationszeit $-1/s_p^n$ und die Amplitude ${}^vA_i^n$. Die elastische Amplitude ${}^eA_i^n$ (mit der Relaxationszeit $-1/s_p^n = 0$) wird im folgenden mit E und die Summe aller Amplituden mit T bezeichnet. Dargestellt werden die Amplituden der Radialverschiebung an der Oberfläche. Zur Unterscheidung werden die Moden des ebenen und die Moden des sphärischen Erdmodells durch die zusätzlichen Symbole e bzw. s gekennzeichnet.

n bezeichnet im sphärischen Fall den Grad der Kugelflächenfunktionsentwicklung, im ebenen Fall die Wellenzahl $n := kR$, wobei k die Hankeltransformationsvariable ist. Zur besseren Lesbarkeit wird in diesem Kapitel nur der Begriff Wellenzahl verwendet.

3.2.1 Homogenes Erdmodell

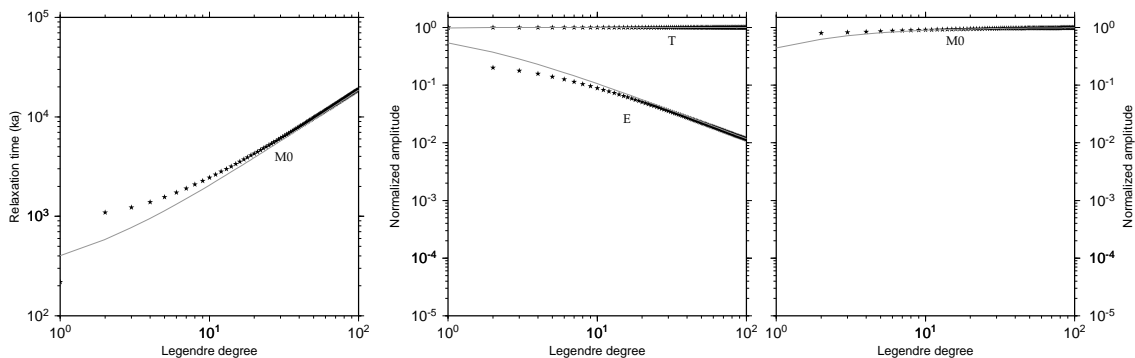


Abb. 3.1: Relaxationszeiten und Amplituden der Radialverschiebung an der Oberfläche für Erdmodell H. Schwarze Sterne bezeichnen das diskrete Spektrum des sphärischen Modells, graue Linien das kontinuierliche Spektrum des ebenen Modells.

Das homogene Erdmodell H erzeugt nur die M0-Mode. Abb. 3.1 zeigt, daß bei niedrigen Wellenzahlen ($n \lesssim 30$) die M0e-Mode eine wesentlich kürzere Relaxationszeit hat als die M0s-Mode. Zudem ist die viskose Amplitude der M0e-Mode bei Wellenzahlen $n \lesssim 10$ deutlich kleiner als die der M0s-Mode. Für die elastischen Amplituden sind die Verhältnisse umgekehrt, da die Summe der Amplituden jeweils eins ergeben muß. Für größere Wellenzahlen sind die Relaxationszeiten und Amplituden des ebenen und sphärischen Erdmodells nahezu identisch. Eine weitere, in Abb.

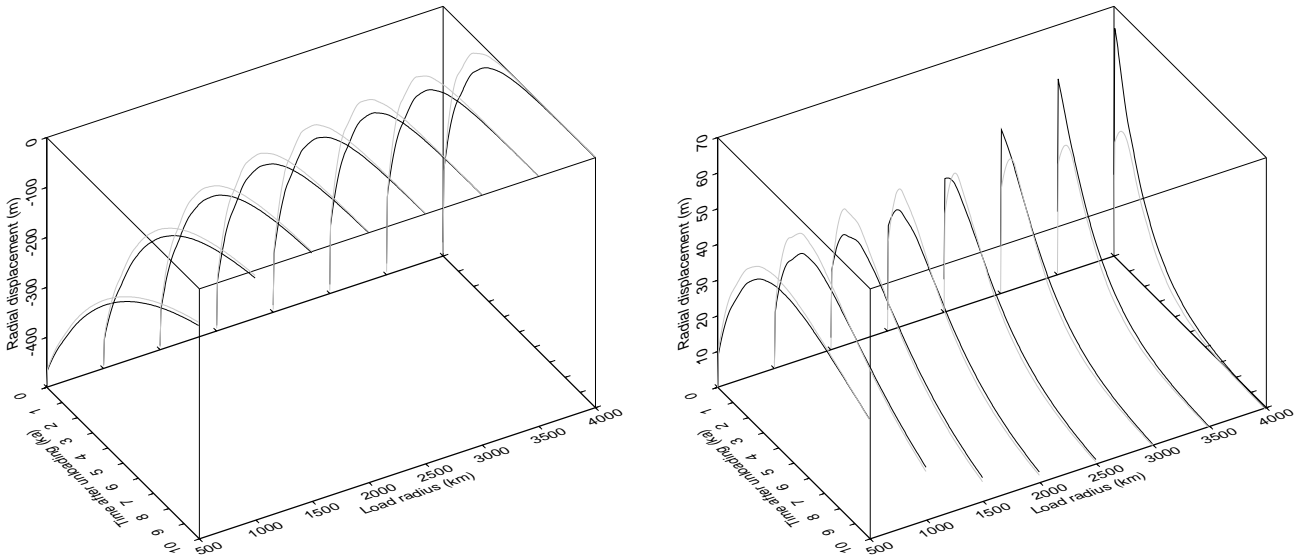


Abb. 3.2: Zeitabhängige Radialverschiebung an der Oberfläche für Erdmodell H und verschiedene Lastradien im Lastzentrum (links) und außerhalb des Lastrand (Lastradius plus 10%, rechts). Die Werte für das sphärische Erdmodell werden durch schwarze Linien, die des ebenen Erdmodells durch graue Linien gekennzeichnet.

3.1 nicht erkennbare Besonderheit ist, daß bei dem ebenen Erdmodell auch für die Wellenzahl $n = 0$ die elastische Amplitude einen Beitrag zu der Verschiebung leistet, während die Amplitude des sphärischen Modells für den Legendregrad $n = 0$ aufgrund der Massenerhaltung Null ist (vgl. Abschnitt 2.2.4).

Im Raumbereich (Abb. 3.2) zeigen sich die Unterschiede im Spektralbereich in mehrfacher Weise. Zunächst erkennt man, daß das ebene Erdmodell schneller relaxiert als das sphärische, wobei die Unterschiede mit zunehmendem Lastradius größer werden. Gleichzeitig nimmt bei beiden Erdmodellen die Relaxationszeit mit zunehmendem Lastradius ab. Ein weiterer grundsätzlicher Unterschied ist die Radialverschiebung im hydrostatischen Gleichgewicht: Während bei dem ebenen Erdmodell außerhalb der Last die Radialverschiebung verschwindet, bleibt bei dem sphärischen Erdmodell eine positive Radialverschiebung. Um das Gesamtvolumen zu erhalten, muß die negative Verschiebung unterhalb der Last durch eine positive Verschiebung außerhalb ausgeglichen werden.

Für kleine Lastradien ist ein ebenes Erdmodell offenbar eine akzeptable Näherung, wenn die Verschiebung unterhalb der Last berechnet wird. Außerhalb der Last beträgt jedoch auch bei geringen Lastradien der Unterschied in der Radialverschiebung zwischen dem ebenen und dem sphärischen Erdmodell über 10%.

3.2.2 Dreischichtige Erdmodelle mit Lithosphäre

Einfache Erdmodelle bestehen oft nur aus einer elastischen Platte über einem viskoelastischen Halbraum (ebene Erdmodelle) bzw. aus einem flüssigen Kern und einem viskoelastischen Mantel (sphärische Erdmodelle). Das dreischichtige Erdmodell CML vereinigt diese Eigenschaften. Abb. 3.3 und 3.4 zeigen die Relaxationszeiten und Amplituden für Erdmodell CML mit einer 50 km bzw. 200 km mächtigen Lithosphäre. Die auffälligste Eigenschaft der Lithosphäre ist die Dämpfung der Gesamtamplitude für größere Wellenzahlen. Der Übergangswert dieses Tiefpasses

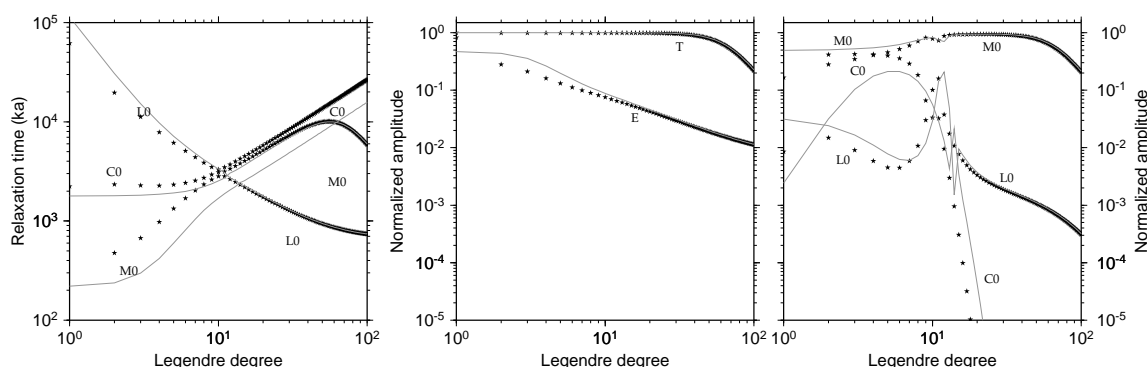


Abb. 3.3: Wie Abb. 3.1 jedoch für Erdmodell CML mit $h_3 = 50$ km.

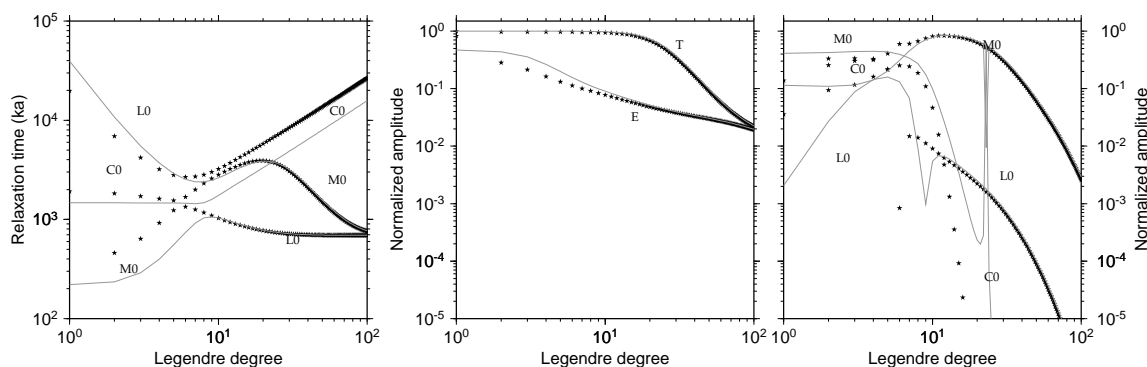


Abb. 3.4: Wie Abb. 3.1 jedoch für Erdmodell CML mit $h_3 = 200$ km.

wird durch die Lithosphärenmächtigkeit bestimmt (z.B. $n \approx 40$ für $h_3 = 50$ km, $n \approx 20$ für $h_3 = 200$ km). Bei niedrigen Wellenzahlen unterscheiden sich die Relaxationszeiten der M0e- und der M0s-Mode deutlich. Die Relaxationszeit der C0e-Mode ist für alle Wellenlängen geringer als die der C0s-Mode (Abb. 3.3 und 3.4). Die Relaxationszeiten der L0e- und L0s-Mode unterscheiden sich nur bei niedrigen Wellenzahlen, wobei das ebene Modell geringfügig größere Werte aufweist.

Die Amplitude der C0-Mode ist für das sphärische Erdmodell nur bei niedrigen Wellenzahlen ($n \lesssim 9$) von Bedeutung, für das ebene Erdmodell nur in dem Wellenzahlbereich $3 \lesssim n \lesssim 9$. Auch die Amplitude der L0-Mode ist nur bei niedrigen Wellenzahlen von Bedeutung, wobei der Übergangswert um so größer ist, je dicker die Lithosphäre ist.

Abb. 3.5 zeigt die Radialverschiebung für verschiedene Lithosphärenmächtigkeiten im Lastzentrum und außerhalb des Lastrand. Es zeigt sich, daß im Lastzentrum der Unterschied zwischen ebenen und sphärischen Erdmodellen nur gering ist. Insbesondere bei großer Lithosphärenmächtigkeit verringert sich dieser Unterschied noch weiter. In der Nähe des Lastrand sind ebene Erdmodelle zwar akzeptable Näherungen, jedoch kann man über das Vorzeichen des Fehlers, der sich aus der Vernachlässigung der Sphärizität ergibt, allgemein nichts aussagen, da dieses von der Lithosphärenmächtigkeit und dem Lastradius abhängt.

3.2.3 Erdmodelle mit Dichtesprüngen im Mantel

Erdmodell CMdL unterscheidet sich von Erdmodell CML dadurch, daß sich in Tiefen von 400 km und 670 km Dichtesprünge befinden. Diese erzeugen jeweils eine Mode³ mit vergleichsweise großer

³Die mit M1 bzw. M2 bezeichnete Mode hat ihren Ursprung in dem Dichtesprung in 670 km bzw. 400 km Tiefe, vgl. hierzu Wolf (1985b).

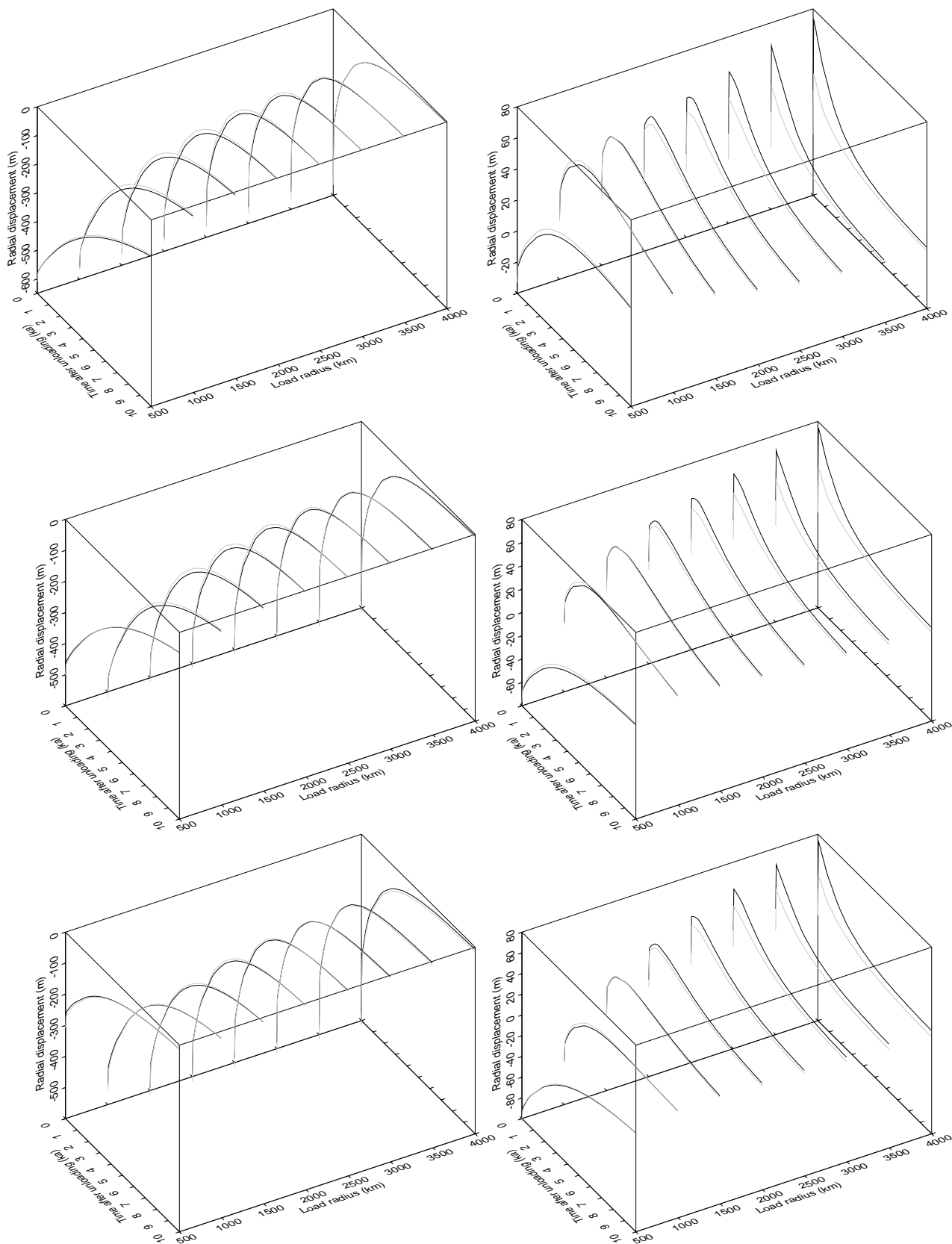


Abb. 3.5: Wie Abb. 3.2 jedoch für Erdmodell CML mit $\hat{h}_3 = 50$ km (oben), $\hat{h}_3 = 100$ km (Mitte) und $\hat{h}_3 = 200$ km (unten).

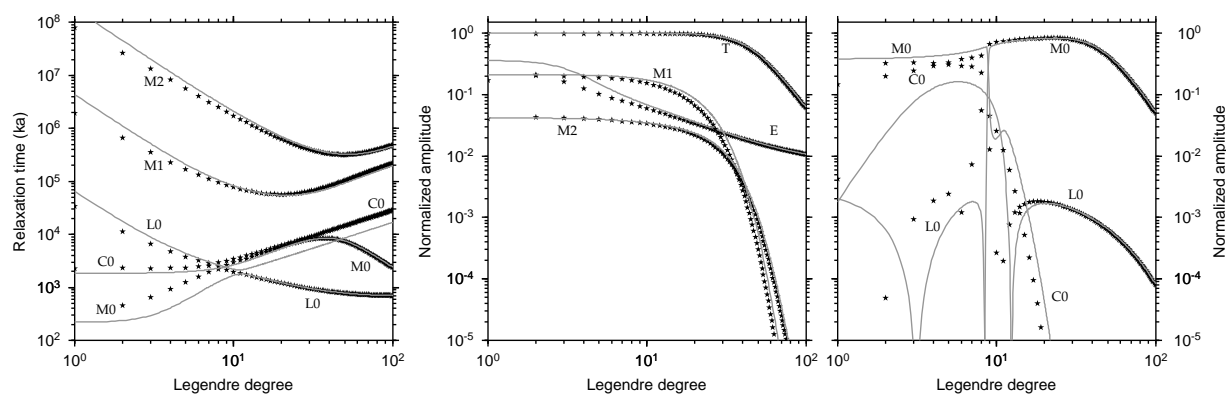


Abb. 3.6: Wie Abb. 3.1 jedoch für Erdmodell CMdL.

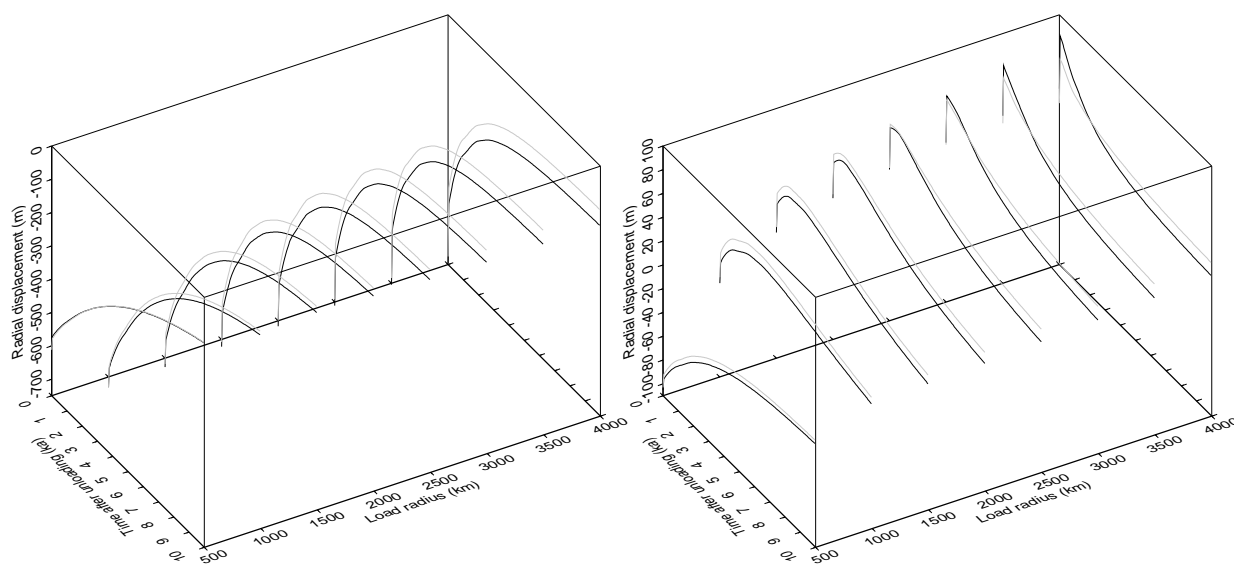


Abb. 3.7: Wie Abb. 3.2 jedoch für Erdmodell CMdL mit $\hat{h}_3 = 100$ km.

Relaxationszeit (Abb. 3.6). Die Relaxationszeiten der C0-, M0- und L0-Moden werden von den zusätzlichen Moden kaum beeinflusst. Die Relaxationszeiten der M1e- und M1s-Mode bzw. der M2e- und M2s-Mode unterscheiden sich nur geringfügig; bei niedrigen Wellenzahlen sind die Relaxationszeiten für das ebene Erdmodell etwas länger, bei großen Wellenzahlen die für das sphärische Modell. Die Amplituden der von den inneren Dichtesprüngen erzeugten Moden sind für das ebene und das sphärische Modell bei allen Wellenzahlen nahezu identisch. Bis zur Wellenzahl $n \approx 10$ haben die Amplituden der M2- und vor allem der M1-Mode die gleiche Größenordnung wie die der dominierenden M0-Mode. Bei höheren Wellenzahlen ($n \gtrsim 20$) nehmen die Intensitäten der M1- und M2-Mode rapide ab, und das Amplitudenspektrum unterscheidet sich nicht mehr wesentlich von dem des Erdmodells CML.

Im Zeitbereich (Abb. 3.7) machen sich die Dichtesprünge durch eine deutlich langsamere Relaxation bemerkbar. Der Unterschied in der Radialverschiebung zwischen ebenem und sphärischem Erdmodell ist durch die Dichtesprünge im Mantel bereits bei kleinen Lastradien (≈ 1000 km) deutlich ausgeprägt.

3.3 Zusammenfassung

Die Untersuchungen dieses Kapitels haben gezeigt, daß

- die Relaxationszeiten sphärischer Modelle größer sind als die entsprechender ebener Modelle,
- in größerer Entfernung vom Lastzentrum die Radialverschiebungen der sphärischen Modelle größer sind als die entsprechender ebener Modelle,
- im Lastzentrum die Radialverschiebungen der sphärischen Modelle kleiner sind als die entsprechender ebener Modelle,
- die zuvor genannten Effekte mit zunehmendem Lastradius größer werden,
- eine Lithosphäre die Unterschiede geringfügig verringert,
- Dichtesprünge im Mantel die Relaxation bedeutend verlangsamen und den Unterschied in der Radialverschiebung zwischen ebenen und sphärischen Modellen deutlich vergrößern.

Weitere, hier nicht behandelte Untersuchungen haben ergeben, daß eine zusätzliche Asthenosphäre keinen signifikanten Einfluß auf die Unterschiede zwischen entsprechenden ebenen und sphärischen Erdmodellen hat.

Aus diesen Ergebnissen kann man schließen, daß bei der Interpretation glazial-isostatischer Vertikalbewegungen die Verwendung eines ebenen Erdmodelles nur dann zulässig ist, wenn mehrere Voraussetzungen gleichzeitig erfüllt sind:

- Das Modell hat eine Lithosphäre.
- Der Lastradius ist kleiner als etwa 1500 km.
- Die Beobachtungsorte sind in der Nähe des Lastzentrums.

4. Landhebung in Island

Aufgrund seiner Lage auf dem mittelatlantischen Rücken hat Island eine junge, und damit dünne Lithosphäre, die über einer niederviskosen Asthenosphäre liegt. Damit heben sich die rheologischen Parameter deutlich von denen der älteren, kontinentalen Gebiete Kanada und Fennoskandien ab. Aufgrund der niederviskosen Asthenosphäre und den damit verbundenen kurzen Relaxationszeiten ist die postglaziale Landhebung der Weichsel-Eiszeit, wie sie heute noch in Kanada und Fennoskandien beobachtet werden kann, in Island schon lange abgeschlossen (Sigmundsson, 1991; Gudmundsson, 1997). Andererseits gestatten die kurzen Relaxationszeiten Beobachtungen von erst kurz zurückliegenden, isostatisch relevanten Ereignissen.

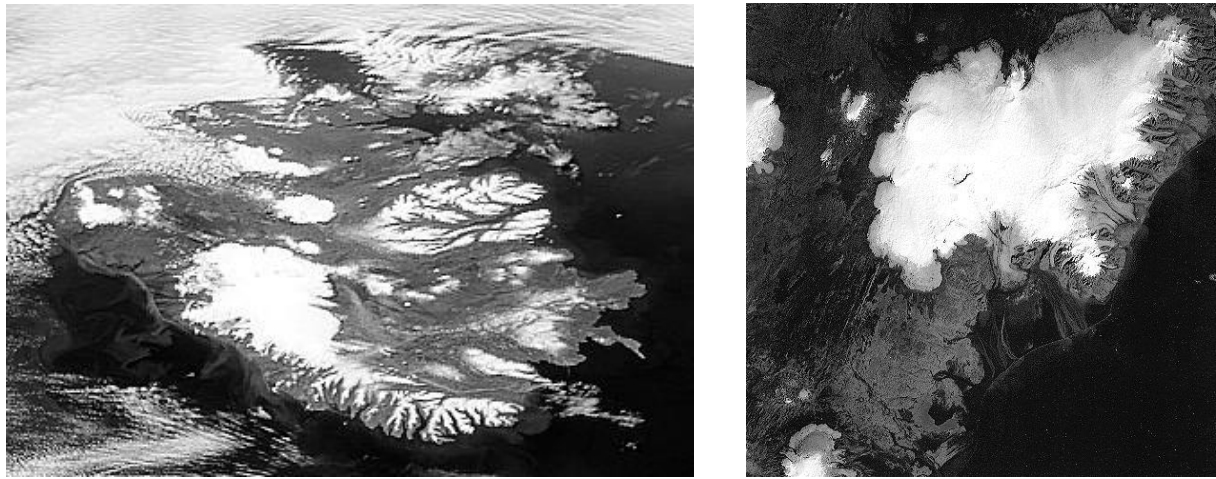


Abb. 4.1: Island und die Vatnajökull-Eiskappe.

Die jüngste Klimaerwärmung hat zu einem Rückzug der größten isländischen Eiskappe, des Vatnajökulls (Abb. 4.1), zwischen 1890 und 1980 geführt (z.B. Sigmundsson & Einarsson, 1992). Auf diese Massenumverteilung reagieren die in der Nähe des Gletschers gelegenen Gebiete mit einer meßbaren Landhebung. Modellierungen mit einer radialsymmetrischen Last wurden z.B. von Sigmundsson & Einarsson (1992) und Wolf *et al.* (1997a,b) durchgeführt. Aufgrund der Form des Vatnajökulls ist die Annahme einer radialsymmetrischen Last jedoch eine starke Vereinfachung. Um eine verbesserte Interpretation durchführen zu können, wird in diesem Kapitel der Vatnajökull durch eine Eiskappe mit elliptischer Grundfläche approximiert, und die Beobachtungsdaten werden mit einem vierschichtigen Erdmodell interpretiert.

4.1 Lastmodell

Aus geologischen Beobachtungen, Satellitenbildern und langjährigen Temperaturdaten läßt sich folgern, daß die Fläche des Vatnajökull zwischen 1890 und 1980 von etwa 8600 km^2 auf etwa 8300 km^2 abgenommen hat (Sigmundsson & Einarsson, 1992; Einarsson *et al.*, 1996). Die heutige Grundfläche der Eiskappe, die seit 1980 nahezu unverändert geblieben ist, wird durch eine Ellipse

mit $a_{1980} = 71.40$ km und $b_{1980} = 37.00$ km beschrieben (Abb. 4.2). Geht man davon aus, daß sich die Eiskappe überall gleichmäßig zurückgezogen hat, so ergeben sich für das glaziale Maximum $a_{1890} = 72.68$ km und $b_{1890} = 37.66$ km.

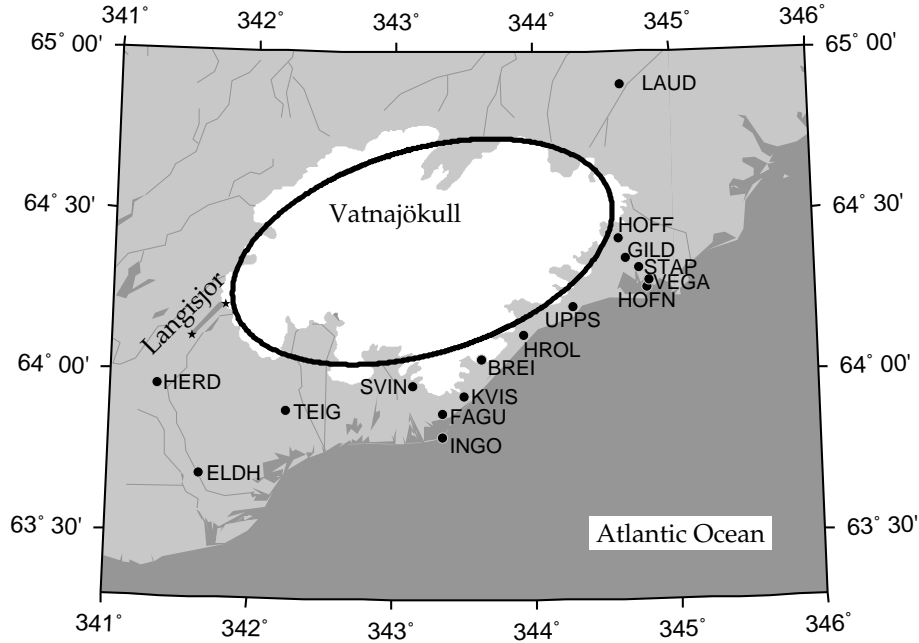


Abb. 4.2: Vatnajökull-Eiskappe, Orte mit GPS-Meßstationen (Kreise) und Orte am Langisjör-See mit Nivellierungsmessungen (Sterne).

Zur Zeit der Besiedelung Islands um 900 waren die Gletscherzungen des Vatnajökull kürzer als während der kleinen Eiszeit. Eine grobe Abschätzung in Sigmundsson & Einarsson (1992) ergibt, daß der Volumenzuwachs bis 1750 etwa 1265 ± 330 km³ betrug. Es wird angenommen, daß die Zunahme der Vereisung um 1200 nach dem mittelalterlichen Klimaoptimum erfolgte (Malberg, 1994; Schönwiese, 1994a,b).

Für die folgende Modellierung werden die beiden Lastmodelle VATNA-1 und VATNA-2 verwendet. Beiden Modellen ist gemein, daß das Zentrum der jeweiligen Lastkappe bei 16.80° W und 64.38° N (Abb. 4.2) liegt. Die großen Halbachsen der Ellipsen sind jeweils um 107° gegen die Nord-Süd-Achse gedreht. Als Querschnitt wird eine liegende Parabel verwendet; diese Form stimmt mit der eines ideal-plastischen Materials im Gleichgewicht überein (Paterson, 1994). Aus der heutigen maximalen Lastmächtigkeit $h_{1980} = 910$ m (Sigmundsson & Einarsson, 1992) folgt mit der Gleichung der Parabel, $h_0^2/r_0 = \text{const.}$, daß $h_{1890} = 918.114$ m bzw. $\Delta h = 8.114$ m. Daraus ergibt sich, daß zwischen den Jahren 1890 und 1980 eine Volumenreduktion von $\Delta V = 182.59$ km³ stattfand.¹ Für Lastkappen mit der hier beschriebenen Geometrie ergibt sich, daß die größten Amplituden der Kugelflächenfunktionsentwicklung im Interval $200 \lesssim n \lesssim 300$ liegen (vgl. Abb. 4.5).

¹Das Volumen der Eiskappe läßt sich nur numerisch berechnen durch Lösen des Integrals

$$V = \int_R^{R+h_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d(\theta, \varphi) d\theta d\varphi dr = \frac{(R+h_0)^3 - R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0(\varphi)} \sin \theta \sqrt{1 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0(\varphi)}} d\theta d\varphi.$$

Dabei ist $\theta_0(\varphi) := r_0(\varphi)/R$ mit r_0 dem Lastradius.

Um den Abschmelzprozeß möglichst gut zu simulieren, besteht Lastmodell VATNA-1 aus insgesamt neun Lastkappen mit abnehmenden Halbachsen und geringeren Lastmächtigkeiten. Im Anhang sind die Parameter von Lastmodells VATNA-1 in Tab. C.1 zusammengestellt. Lastmodell

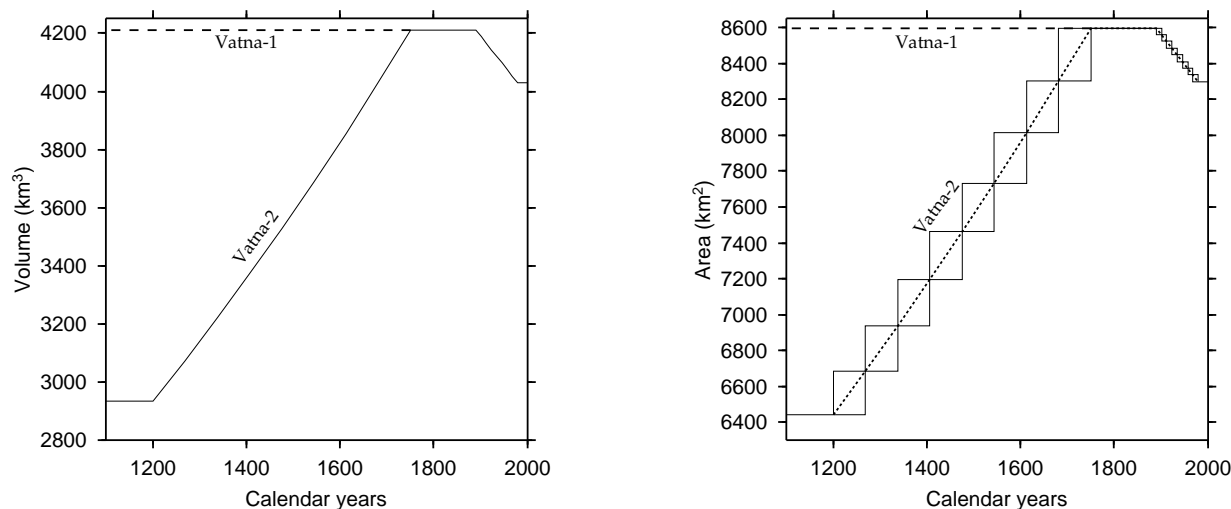


Abb. 4.3: Volumen (links) und Fläche (rechts) der Lastmodelle VATNA-1 und VATNA-2. Der Abschmelzvorgang ist bei beiden Lastmodellen identisch. In der rechten Abbildung zeigt die gestrichelte Linie den idealen Verlauf, die beiden durchgezogenen den realisierten.

VATNA-2 simuliert zusätzlich zum Abschmelzprozeß den Vereisungsvorgang. Hierfür werden acht weitere Lastkappen verwendet. In Abb. 4.3 sind die zeitliche Entwicklung des Volumens und der Grundfläche für Lastmodelle VATNA-1 und VATNA-2 gezeigt.²

4.2 Erdmodelle

Im Gegensatz zu früheren Modellierungen mit ebenen Erdmodellen (z.B. Sigmundsson & Einarsson, 1992; Wolf *et al.*, 1997a,b) wird in dieser Arbeit ein sphärisches Erdmodell verwendet. Aufgrund der geringen Ausdehnung der Last beeinflusst dies die Ergebnisse jedoch nur geringfügig (Kap. 3). Ein gravierender Unterschied zwischen beiden Modellen betrifft die Dichte: Bei einem ebenen Erdmodell kann die Dichte frei gewählt werden (Wolf *et al.* (1997a,b) wählten für alle Schichten $\rho_L = 3380 \text{ kg/m}^3$); in einem sphärischen, selbstgravitativen Erdmodell ist die Dichte jedoch so zu wählen, daß die sich daraus ergebende Gravitationskraft an der Erdoberfläche den korrekten Wert hat. In dem hier verwendeten Erdmodell (Tab. 4.1) wird dies durch eine Anpassung der Dichte des Mantels an die Lithosphärenmächtigkeit erreicht.³ Das verwendete Erdmodell besteht aus vier Schichten (Kern, Mantel, Asthenosphäre, Lithosphäre). Der Wahl von Dichte und Schermodul in den oberflächennahen Schichten liegen seismische Untersuchungen zugrunde (Pollitz & Sacks, 1996), die Asthenosphärenunterseite wird in 100 km Tiefe angenommen. Als freie Parameter des Erdmodells fungieren die Lithosphärenmächtigkeit h_4 und die Asthenosphärenviskosität η_3 (Tab. 4.1).

²Da zu bestimmten Zeiten zwei Lastkappen mit verschiedenen Grundflächen gleichzeitig eine nichtverschwindende Mächtigkeit haben, ergibt sich in Abb. 4.3 (rechts) die doppelte Treppenfunktion.

³Dichte des Mantels als Funktion der Lithosphärenmächtigkeit:

h_4 (km)	5	10	15	20	25	30	40	50
$\rho_2(h_4)$ (kg/m ³)	4524	4525	4526	4527	4528	4530	4532	4534

Schicht	r (km)	ρ (kg/m ³)	μ (Pa)	η (Pa.s)
Kern	3480	10982	0	0
Mantel	6271	$\rho_2(\hat{h}_4)$	1.45×10^{11}	1.0×10^{21}
Asthenosphäre	$6371 - \hat{h}_4$	3200	0.65×10^{11}	η_3
Lithosphäre	6371	2800	0.38×10^{11}	∞

Tab. 4.1: Parameterwerte des verwendeten Erdmodells.

Die Kompressibilität kann vernachlässigt werden, da die Last klein ist und hier nur Landhebungsgeschwindigkeiten betrachtet werden. Dies wird in Abschnitt 4.5 gezeigt.

Aufgrund des Dichtesprungs zwischen Mantel und Asthenosphäre sowie zwischen Kern und Mantel treten gegenüber den von Wolf *et al.* (1997a) untersuchten Erdmodellen zwei zusätzliche Moden (M1 und C0) auf. Abb. 4.4 zeigt die Relaxationszeiten und Amplituden exemplarisch für das Erdmodell mit $\hat{h}_4 = 5$ km und $\eta_3 = 1 \times 10^{18}$ Pa.s. Die Modenbezeichnung erfolgt wie auf Seite 35 eingeführt. Bei der extrem dünnen Lithosphäre ist die Amplitude der Radialverschiebung

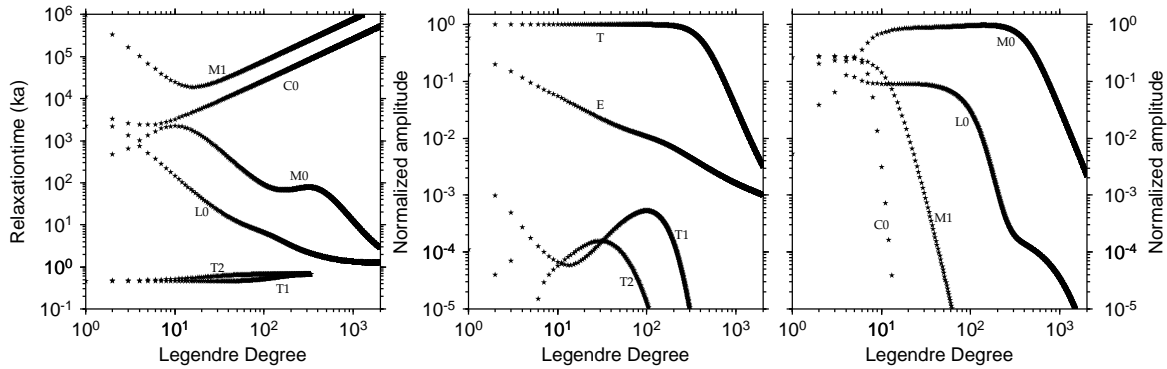


Abb. 4.4: Relaxationszeiten und Amplituden der Radialverschiebung an der Oberfläche für das verwendete Erdmodell mit $\hat{h}_4 = 5$ km und $\eta_3 = 1 \times 10^{18}$ Pa.s.

an der Oberfläche der dominierenden M0-Mode erst bei Grad $n \approx 1500$ auf 1% abgeklungen. In dem Bereich, in dem die größten Amplituden der Last liegen (200–300, siehe Abb. 4.5), nimmt die Amplitude der M0-Mode Werte zwischen 0.8 und 1.0 an, die anderen Moden (einschließlich der elastischen Amplitude) spielen hier nur eine untergeordnete Rolle. Die Relaxationszeit der M0-Mode ist in diesem Bereich kleiner als 100 Jahre, so daß eine meßbare Landhebungsgeschwindigkeit zu erwarten ist.

4.3 Anpassung an die Beobachtungsdaten

Im folgenden werden zwei voneinander unabhängige Beobachtungsdatensätze mit den Berechnungen verglichen. Zum einen die zwischen 1992 und 1996 an verschiedenen Beobachtungsorten mit GPS-Messungen bestimmten Landhebungsgeschwindigkeiten (Sjöberg *et al.*, 2000)⁴, zum anderen die am Langisjór-See beobachtete Differenz der Landhebung zwischen dem südwestlichen und nordöstlichen Ufer (Abb. 4.2). Zwischen den Jahren 1959 und 1991 hat sich das an der Eis-

⁴Die Daten der hier verwendeten GPS-Messungen sind in Anhang C zusammengestellt.

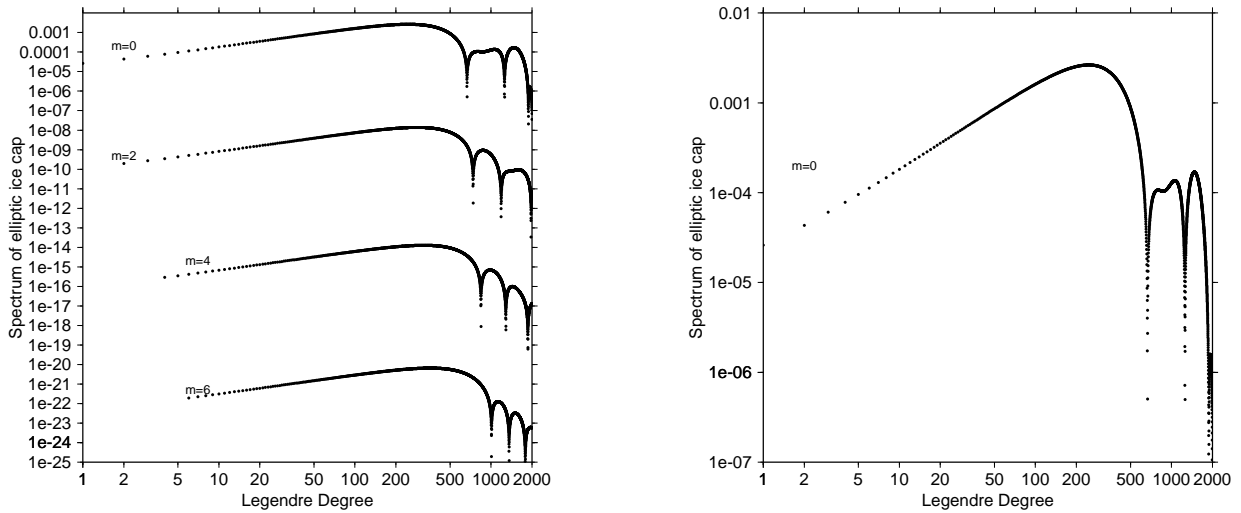


Abb. 4.5: Spektrum der Kugelflächenfunktionsentwicklung der Vatnajökull-Eiskappe im Jahr 1980; links für verschiedene Ordnungen, rechts ist das Spektrum für die 0-te Ordnung vergrößert dargestellt. (Um eine logarithmische Darstellung zu ermöglichen wird nur der Betrag gezeigt.)

kappe befindliche Nordostende um $\delta u_r = 12.4 \pm 3$ cm gegenüber dem Südwestende Ufer gehoben (Sigmundsson & Einarsson, 1992). Dies entspricht einer durchschnittlichen relativen Landhebungsgeschwindigkeit von $\delta \dot{u}_r = 3.9 \pm 0.9$ mm/a zwischen 1959 und 1991. In Abb. 4.6 sind die Parameterbereiche des Erdmodells grau schattiert, die dieser Landhebungsgeschwindigkeit entsprechen. Es wird dabei unterschieden, ob die Zunahme der Vereisung vor 1750 berücksichtigt ist (Lastmodell VATNA-2) oder nicht (Lastmodell VATNA-1).

Karten der vulkanischen Aktivität auf Island (z.B. Hofton & Foulger, 1996a; Pollitz & Sacks, 1996) zeigen, daß die GPS-Stationen HERD und ELDH sich auf bzw. in unmittelbarer Nähe der „Neovolcanic Zone“ befinden. Entlang dieser Zone driften die Lithosphärenplatten mit einer Geschwindigkeit von etwa 2 mm/a auseinander (Foulger *et al.*, 1992). Daher ist zu vermuten, daß die in HERD und ELDH gemessene Landhebungsgeschwindigkeiten auch tektonische Ursachen haben. Somit werden diese Stationen in den folgenden Modellierungen nicht berücksichtigt.

Da es sich bei den GPS-Messungen nur um Relativwerte handelt, muß für Absolutwerte ein Referenzort (hier HÖFN) gewählt werden, an dem die absolute Landhebungsgeschwindigkeit durch den freien Parameter $\dot{u}_{\text{HÖFN}}$ (Offset) vorgegeben wird. Als Maß für die Güte einer Anpassung wird dann der Anpassungsparameter ε durch

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\dot{u}_i^{\text{obs}} - \dot{u}_i^{\text{cal}}}{\delta \dot{u}_i} \right)^2} \quad (4.1)$$

eingeführt. Dabei bezeichnet I die Gesamtzahl der berücksichtigten Orte, u_i^{obs} und u_i^{cal} die beobachtete bzw. berechnete Landhebungsgeschwindigkeit des i -ten Ortes und $\delta \dot{u}_i$ die Meßunsicherheit für den i -ten Ort. Der Parameter ε ist ein Maß für die Güte der Anpassung: je größer ε , um so schlechter ist die Anpassung. Der Bereich, in dem eine Anpassung noch als gut gilt, wird hier durch die Bedingung $\varepsilon \leq 1$ eingeschränkt. Dieser Bereich ist in Abb. 4.7–4.9 durch die schraffierten Flächen gekennzeichnet. Der Bereich, der innerhalb der Meßgenauigkeit für die Beobachtungen am Langisjór-See liegt ($\delta \dot{u}_r = 0.9$ mm/a zwischen 1959 und 1991), ist jeweils

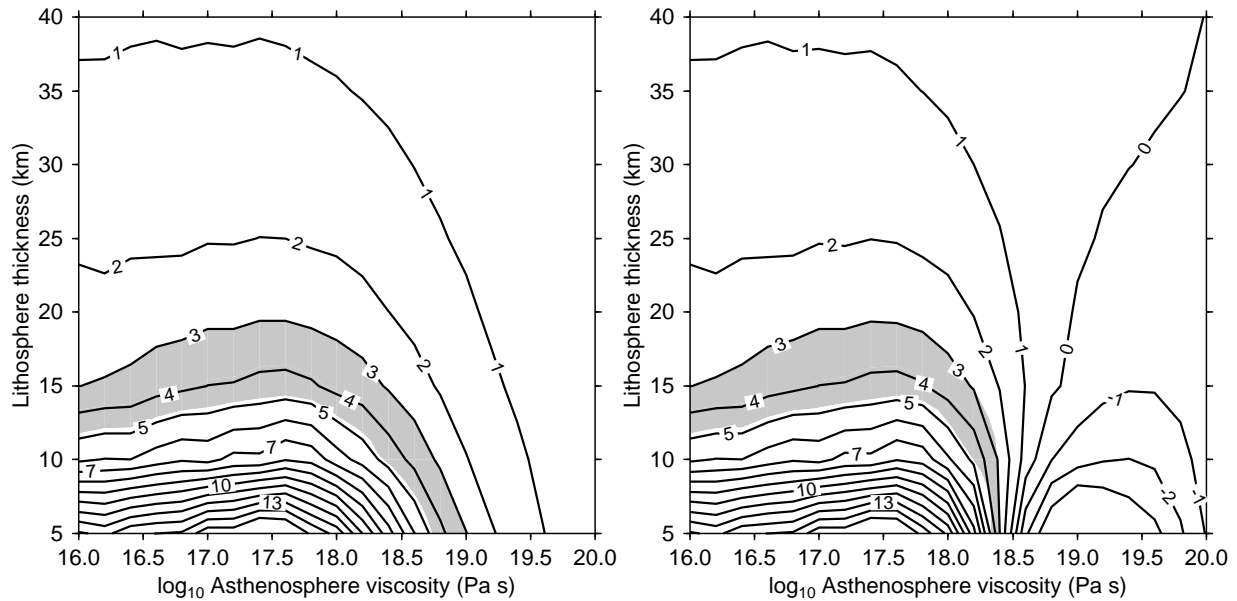


Abb. 4.6: Relative Landhebungsgeschwindigkeit in mm/a am Langisjór-See zwischen nordöstlichem und südwestlichem Ufer für die Lastmodelle VATNA-1 (links) und VATNA-2 (rechts). Der Parameterbereich, für den Berechnungen innerhalb des beobachteten Wertes von $\delta\dot{u}_r = 3.9 \pm 0.9$ mm/a liegen, ist grau schattiert.

grau schattiert. Aus der Schnittmenge der beiden Bereiche ergibt sich der Parameterbereich des Erdmodells, der beide Beobachtungsdatensätze erklären kann. In den Abb. 4.7–4.9 sind jeweils die Ergebnisse für verschiedene Offsets $\dot{u}_{\text{HÖFN}}$ und die Lastmodelle VATNA-1 (nur Abschmelzvorgang) bzw. VATNA-2 (Vereisungs- und Abschmelzvorgang) gegenübergestellt.

4.4 Vergleich mit früheren Interpretationen

Durch die Verwendung eines sowohl räumlich als auch zeitlich realistischen Lastmodells und eines vierschichtigen, sphärischen Erdmodells ist es möglich, die zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten zu interpretieren und den möglichen Bereich der Lithosphärenmächtigkeit und der Asthenosphärenviskosität einzuschränken. Als untere Grenzwerte können $\hat{h}_4^{\min} = 10$ km und $\eta_3^{\min} = 5 \times 10^{16}$ Pa s angegeben werden, der obere Grenzwert für die Lithosphärenmächtigkeit beträgt $\hat{h}_4^{\max} = 20$ km. Dies stimmt mit den Beobachtungen von Einarsson (1991) überein, nach denen in Südwestisland Erdbebenhypozentren nur in Ausnahmefällen tiefer als 15 km liegen. Der von Sjöberg *et al.* (2000) auf der Grundlage der Modellierungen von Wolf *et al.* (1997a,b) angegebene Minimalwert von 30 km für die Lithosphärenmächtigkeit muß daher angezweifelt werden.

Der obere Grenzwert für die Asthenosphärenviskosität ist davon abhängig, ob der Vereisungsvorgang berücksichtigt wird ($\eta_3^{\max} = 1 \times 10^{18}$ Pa s) oder nicht ($\eta_3^{\max} = 3 \times 10^{18}$ Pa s). In beiden Fällen liegt die Asthenosphärenviskosität zum Teil deutlich unter den von anderen Autoren angegebenen Werten für Island (Tab. 4.2) (Einarsson, 1966; Sigmundsson, 1991; Sigmundsson & Einarsson, 1992; Foulger *et al.*, 1992; Einarsson *et al.*, 1996; Hofton & Foulger, 1996a,b; Pollitz & Sacks, 1996; Wolf *et al.*, 1997b; Sjöberg *et al.*, 2000), was vermutlich auf deren einfachere Erd- und Lastmodelle zurückzuführen ist. Insbesondere die Arbeiten, die tektonische Plattenbewegungen zur Bestimmung der Viskosität verwenden, benutzen nur einen viskosen Halbraum, der zu einer höheren Viskosität führt als eine dünne Asthenosphäre über einem höherviskosen Mantel.

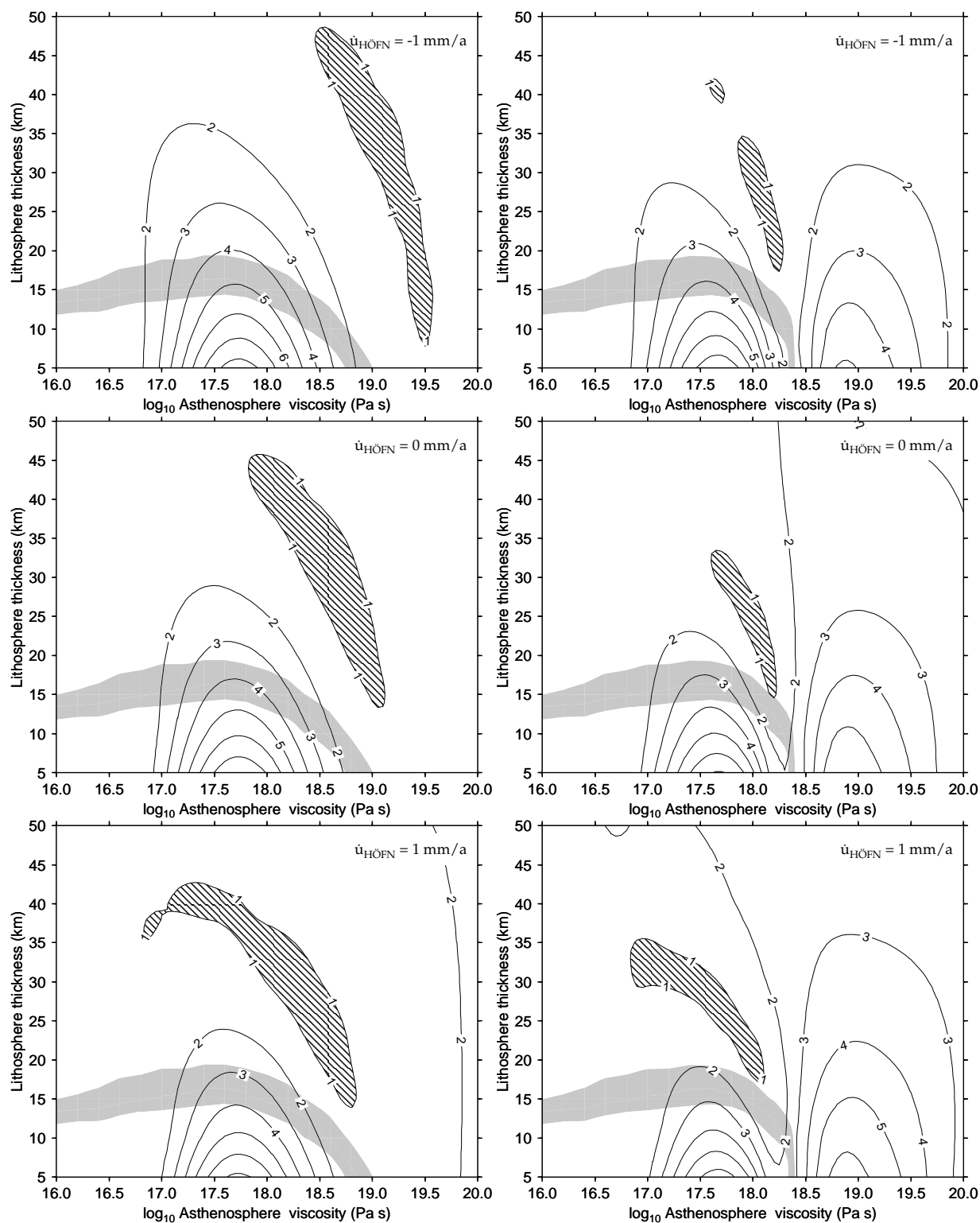


Abb. 4.7: Parameterbereiche, die die für 1991–1996 mit GPS bestimmten Landhebungsgeschwindigkeit (schraffiert) bzw. die für 1959–1991 mit Nivellement bestimmte Neigungsänderung am Langisjór-See (grau) bei Verwendung des Lastmodells VATNA-1 (links) bzw. VATNA-2 (rechts) erklären. Oben rechts ist jeweils das angenommene Offset $\dot{u}_{HÖFN}$ für die Station HÖFN angegeben.

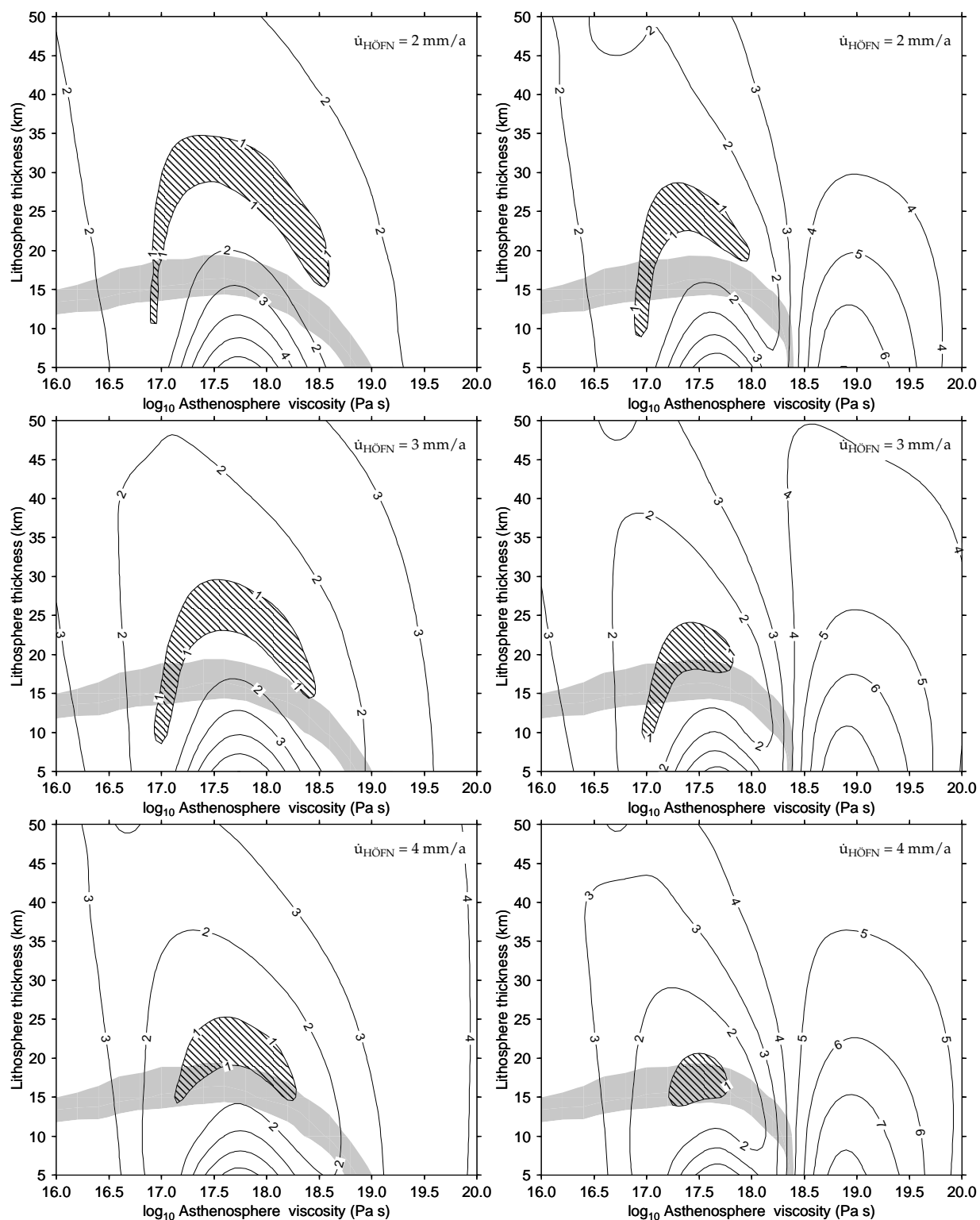


Abb. 4.8: Wie Abb. 4.7 jedoch für unterschiedliche Offsets.

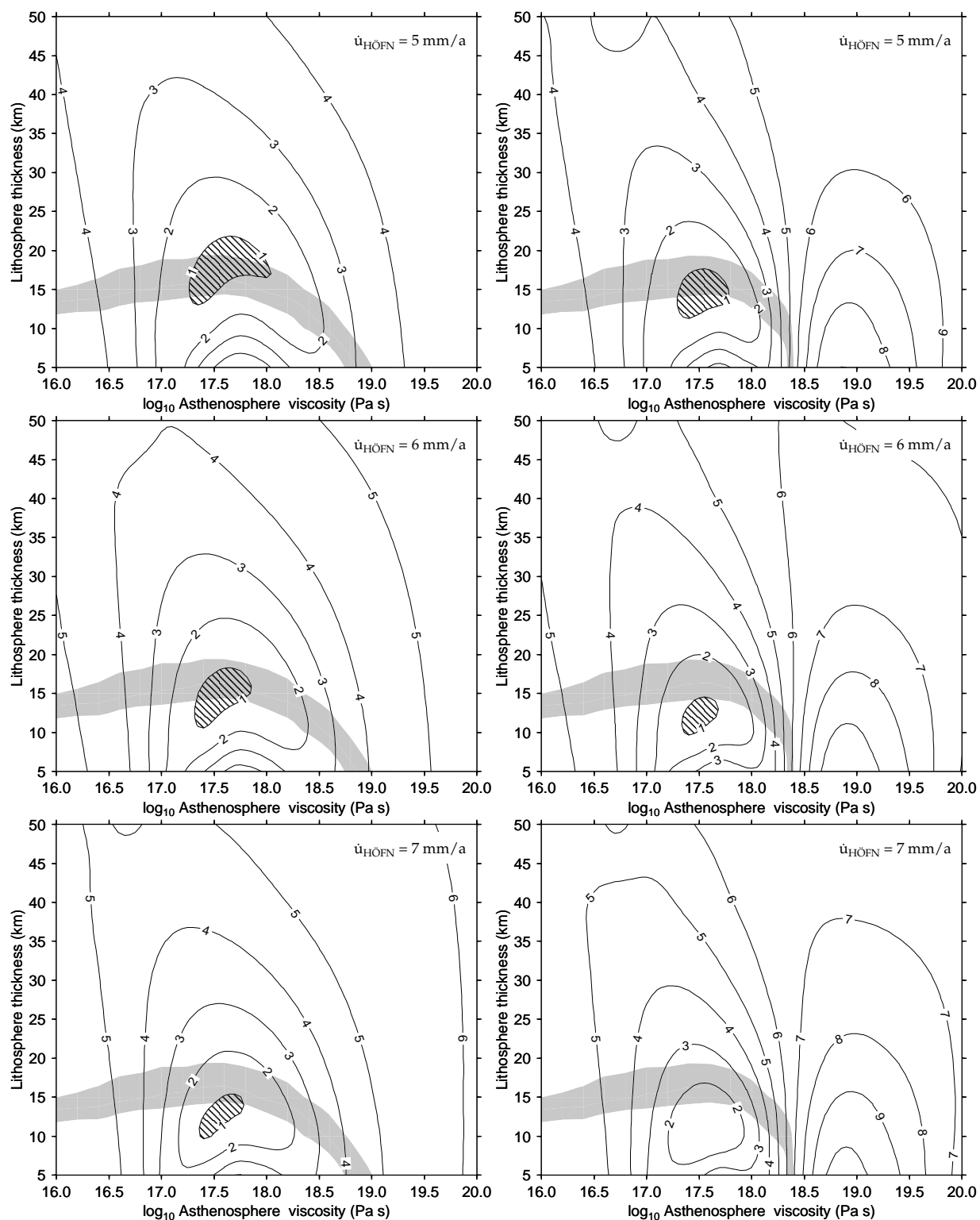


Abb. 4.9: Wie Abb. 4.7 jedoch für unterschiedliche Offsets.

Autor	Lithosphären- mächtigkeit (km)	Asthenosphären- viskosität (Pa.s)
Einarsson (1966)		$\approx 10^{18}$
Sigmundsson (1991)	10	$< 5 \times 10^{18}$
Sigmundsson & Einarsson (1992)	10 bis 20	1×10^{18} bis 5×10^{19}
Einarsson <i>et al.</i> (1996)	10 bis 20	$\approx 1 \times 10^{19}$
Hofton & Foulger (1996a)	10	1.1×10^{18}
Pollitz & Sacks (1996)	10	3×10^{18}
Sjöberg <i>et al.</i> (2000)	30	5×10^{18}
Diese Arbeit	10 bis 20	5×10^{16} bis 1×10^{18}

Tab. 4.2: Lithosphärenmächtigkeit und Asthenosphärenviskosität für Island nach Angaben verschiedener Autoren. Es ist zu beachten, daß die Arbeiten von Hofton & Foulger (1996a) und Pollitz & Sacks (1996) nicht die Landhebung, sondern die Tektonik als Untersuchungsgrundlage verwenden.

Die Parameterraumstudien legen ein Offset (dies entspricht der absolute Landhebungsgeschwindigkeit) in HÖFN von $\dot{u}_{\text{HÖFN}} \approx 4.5 \pm 1.5$ mm/a nahe. Aufgrund der vielen Unsicherheiten muß dieser Wert jedoch mit Vorsicht betrachtet werden und muß in zukünftigen Studien überprüft werden.

4.5 Verwendung eines kompressiblen Erdmodells

Das bisher für die Interpretation verwendete Erdmodell ist materiell inkompressibel. Dieser Abschnitt zeigt anhand eines Beispiels, daß diese Vereinfachung bei der Interpretation von Landhebungsgeschwindigkeiten gerechtfertigt ist. Dazu werden für die verwendeten GPS-Beobachtungsorte die Ergebnisse für zwei Erdmodelle gegenübergestellt. Beide Erdmodelle haben eine 10 km mächtige Lithosphäre und eine Asthenosphärenviskosität von 10^{18} Pa.s; sie unterscheiden sich nur darin, daß das eine Erdmodell materiell inkompressibel, das zweite lokal inkompressibel ist (Tab. 4.3). Als Lastmodell wird VATNA-2 verwendet.

Schicht	Radius (km)	Schermodul (Pa)	Viskosität (Pa.s)	Mat. Ink.		Lok. Ink.	
				Dichte (kg/m ³)	β	Dichte (kg/m ³)	β
Lithospäre	6371	0.40×10^{11}	∞	2800	0	2789 bis 2800	2.50
Asthenosphäre	6361	0.70×10^{11}	10^{18}	3200	0	3319 bis 3400	1.70
Mantel	6271	1.45×10^{11}	10^{21}	4525	0	3499 bis 6808	1.13
Kern	3480	0	0	10982	0	10982	0

Tab. 4.3: Parameter des materiell inkompressiblen und des lokal inkompressiblen Erdmodells.

Abb. 4.10 stellt die berechneten Radialverschiebungsgeschwindigkeiten zum heutigen Zeitpunkt für die beiden Erdmodelle gegenüber. Es ist zu erkennen, daß die Unterschiede sehr gering sind und somit vernachlässigt werden können (Abb. 4.10).

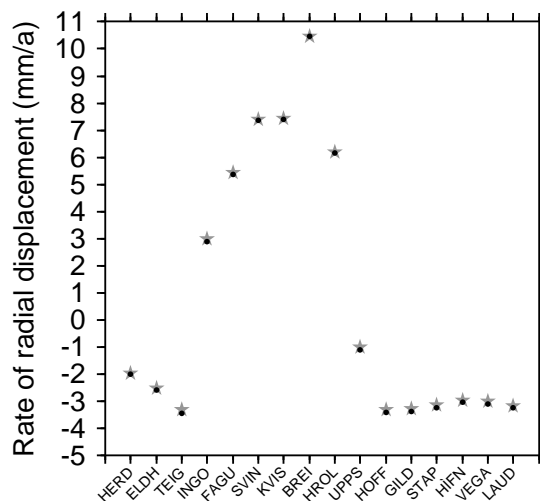


Abb. 4.10: Radialverschiebungsgeschwindigkeit für ein materiell inkompressibles (schwarzer Punkt) und ein lokal inkompressibles (grauer Stern) Erdmodell.

4.6 Zusammenfassung

Die gemessene Landhebungsgeschwindigkeit im Südosten Islands kann als Folge des Zurückweichens der Vatnajökull-Eiskappe interpretiert werden. Bei Verwendung eines vierschichtigen, selbstgravitierenden, sphärischen Erdmodells mit Maxwellviskoelastizität zeigt sich, daß die Lithosphäre in Island zwischen 10 und 20 km mächtig ist und die Viskosität der Asthenosphäre zwischen 5×10^{16} und 1×10^{18} Pas liegt. Weil die Last klein ist und nur Landhebungsgeschwindigkeiten untersucht werden, kann ein materiell inkompressibles Erdmodell verwendet werden.

5. Berücksichtigung der Ozeanlast

Bei der Berechnung der glazial-isostatischen Radialbewegung, Geoidänderung und Schwereanomalie spielt auch der sich verändernde Meeresspiegel eine Rolle. Der Grund ist, daß sich die Eis- und Wassermassen auf der Erde nur umverteilen. Wegen der für glazial-isostatische Änderungen typischen Relaxationszeiten können die Einflüsse des sich sehr viel langsamer verändernden Meeresspiegels durch Plattentektonik oder die sehr viel schneller wirkenden Gezeiten und jahreszeitlichen Schwankungen vernachlässigt werden. Eine der beiden Hauptursachen der Meeresspiegeländerung ist der Phasenübergang zwischen Eis und Wasser während der Ver- bzw. Enteisungen, der andere liegt in der glazial-isostatischen Radialbewegung.

Bei der Enteisung fließt zunächst Schmelzwasser in die Ozeane ab. Dieses wirkt nun seinerseits als zusätzliche Auflast, die sich allerdings nicht gleichförmig über die Ozeane verteilt, sondern sich entlang einer durch die Massenumverteilung im Ozean und Erdinneren bestimmten Äquipotentialfläche verteilt. Die theoretische Behandlung dieses gekoppelten Problems wird in Abschnitt 5.1 beschrieben, bevor in Abschnitt 5.2 als Beispiel das Verschwinden des antarktischen Eisschildes betrachtet wird. Anhand dieses Beispiels werden unterschiedliche Kopplungsgrade (im folgenden als Szenarien bezeichnet) miteinander verglichen:

Szenario 1: Vernachlässigung der Ozeanlast.

Szenario 2: Ozeanlast, die einer gleichmäßigen Umverteilung der Eismasse entspricht.

Szenario 3: Ozeanlast, die sich dem Geoid und dem relaxierenden Ozeanboden anpaßt jedoch mit unveränderlichen Küstenlinien.

Szenario 4: wie 3, jedoch mit veränderlichen Küstenlinien.

5.1 Theorie

Soll bei Auflastproblemen auch die sich verändernde Ozeanlast berücksichtigt werden, so besteht die Auflast aus den Anteilen Eis und Wasser. Dies muß bei der Berechnung des Lastdrucks (2.114) berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}\xi_{\sigma}(\theta, \varphi, t) &= \xi_{\sigma I}(\theta, \varphi, t) + \xi_{\sigma O}(\theta, \varphi, t) \\ &= g(R)[\rho_I d_I(\theta, \varphi) h_I(t) + \rho_O d_O(\theta, \varphi) h_O(t)] \\ &= g(R)[\rho_{I|O} d_{I|O}(\theta, \varphi) h_{I|O}(t)],\end{aligned}\tag{5.1}$$

wobei $\rho_{I|O}$ die Eis- bzw. Ozeandichte, $d_{I|O}(\theta, \varphi)$ die räumliche Verteilung der Eis- bzw. Ozeanlast und $h_{I|O}$ die zeitliche Variation der Eis- bzw. Ozeanmächtigkeit ist. Als Ozeanlast wird hier nur der Teil des Ozeans bezeichnet, der durch Akkumulation von Landeis aus dem Ozean entfernt oder durch Schmelzwasser hinzugefügt wird.

Für die Radialverschiebung (2.128), das lokale Inkrement des Potentials (2.131) und das lokale

Inkrement der Gravitationsbeschleunigung (2.139) ergeben sich dann die Gleichungen

$$u_r(r_k, \theta, \varphi, t) = g(R) \left[\rho_I \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}A_1^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^I D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi) + \rho_O \sum_{n=0}^{\infty} {}^O \mathcal{A}_1^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^O D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi) \right], \quad (5.2)$$

$$\phi_r^{(\Delta)}(r_k, \theta, \varphi, t) = g(R) \left[\rho_I \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}A_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^I D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi) + \rho_O \sum_{n=0}^{\infty} {}^O \mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^O D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi) \right], \quad (5.3)$$

$$g^{(\Delta)}(R, \theta, \varphi, t) = \frac{g(R)}{R} \left[\rho_I \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \mathcal{I}A_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^I D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi) + \rho_O \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) {}^O \mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^O D^{nm} Y^{nm}(\theta, \varphi) \right], \quad (5.4)$$

wobei die Definition von ${}^I \mathcal{O} \mathcal{A}_i^n$ äquivalent zu (2.120) ist:

$${}^I \mathcal{O} \mathcal{A}_i^n(r_k, t) = {}^E A_i^n(r_k) h_{I|O}(t) + \left(\sum_{p=1}^P -s_p^n v_p A_i^n(r_k) e^{s_p^n t} \right) * h_{I|O}(t). \quad (5.5)$$

Die Kugelflächenfunktionskoeffizienten ${}^I \mathcal{O} D^{nm}$ ergeben sich durch (2.143) zu

$${}^I \mathcal{O} D^{nm} = \frac{2n+1}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi P^{n|m|}(\cos \theta) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d_{I|O}(\theta, \varphi) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin |m|\varphi \end{cases} d\varphi d\theta, \quad \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 0 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Die Ozeanlast folgt aus der Differenz¹ zwischen $e_r(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t)$ und der auflastinduzierten Radialverschiebung u_r an der Oberfläche:

$$d_O(\theta, \varphi) h_O(t) = \frac{\sigma_O(\theta, \varphi, t)}{\rho_O g(R)} = [e_r(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t) - u_r(R, \theta, \varphi, t)] \mathcal{O}(\theta, \varphi, t) = \begin{cases} e_r(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t) - u_r(\theta, \varphi, t), & \text{Ozean} \\ 0, & \text{Land} \end{cases}, \quad (5.7)$$

wobei bereits der Separationsansatz vorausgesetzt ist. Die Geoidhöhe $e_r(\theta, \varphi, t)$ ergibt sich aus (5.3) und der Formel von Bruns (2.132), der eustatische Meeresspiegelanstieg $e_{eu}(t)$ aus der Massenerhaltung:

$$0 = \rho_I V_I(t) + \rho_O \iint_{\text{Ozean}} [e_r(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t) - u_r(R, \theta, \varphi, t)] d\theta d\varphi \quad (5.8)$$

$$\implies e_{eu}(t) = -\frac{\rho_I V_I(t)}{\rho_O A_O(t)} - \frac{1}{A_O(t)} \iint_{\text{Ozean}} [e_r(\theta, \varphi, t) - u_r(R, \theta, \varphi, t)] d\theta d\varphi \quad (5.9)$$

wobei $V_I(t)$ das Eisvolumen² und $A_O(t)$ die Ozeanfläche bezeichnet. In der Literatur wird (5.7) auch als „sea-level equation“ bezeichnet (z.B. Johnston, 1993; Milne, 1998; Peltier, 1998).

Substituiert man (5.9) in (5.7), führt den Separationsansatz für die Ozeanlast durch, setzt $h_O(t)$ und $d_O(\theta, \varphi)$ in (5.5) und (5.6) ein und diese dann wieder in (5.2)–(5.4), so erhält man Integralgleichungen, mit denen sich alle relevanten Größen berechnen lassen.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm zur Berechnung der relevanten Größen (und damit die Lösung der „sea-level equation“) ist in Anhang B.3 beschrieben.

¹ e_{eu} ist negativ.

²Ein negatives Eisvolumen impliziert ein Abschmelzen.

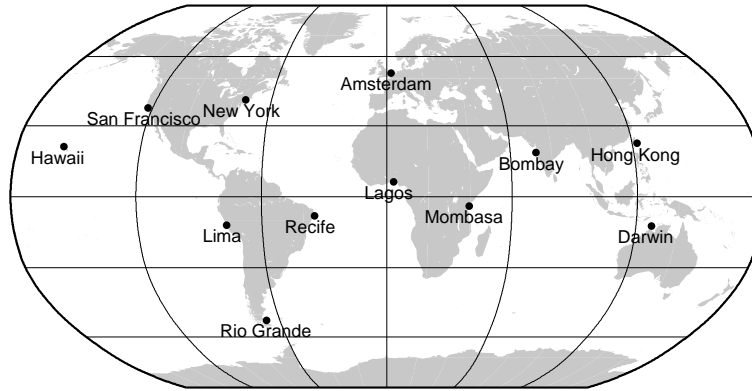


Abb. 5.1: Orte, für die die Meeresspiegeländerung berechnet wird.

5.2 Beispiel: Instantanes Verschwinden des antarktischen Eisschildes

Als Beispiel und einfache Anwendung wird die relative Meeresspiegeländerung

$$h_{\text{RSL}} = e_r + e_{\text{eu}} - u_r \quad (5.10)$$

berechnet, der sich durch das instantane Verschwinden des antarktischen Eisschildes ergibt. Als Eislast dient das thermomechanische Eismodell für die Antarktis von Bamber & Huybrechts (1996). Das verwendete Erdmodell hat sieben Schichten und ist lokal inkompressibel.³ Berechnet wird die Meeresspiegeländerung für die in Abb. 5.1 gezeigten Orte.

Um zu verdeutlichen, welchen Einfluß die Berücksichtigung des Ozeans als Auflast und gravitierende Masse hat, werden vier verschiedene Szenarien betrachtet: Zunächst wird eine Berechnung der relativen Meeresspiegeländerung vorgenommen, bei der als Last nur das Eis berücksichtigt, die Ozeanlast jedoch vernachlässigt wird, d.h. in (5.1)–(5.6) werden nur die Anteile der Eislast berücksichtigt (Szenario 1). Anschließend wird eine Berechnung durchgeführt, bei der angenommen wird, daß sich das gesamte Eis nach dem Abschmelzen gleichmäßig in das als zeitunabhängig angenommene Ozeanbecken verteilt hat (Szenario 2). Der eustatische Meeresspiegelanstieg berechnet sich dabei vereinfacht nach der Formel

$$e_{\text{eu}} = -\frac{\rho_{\text{I}} V_{\text{I}}}{\rho_{\text{O}} A_{\text{O}}}, \quad (5.11)$$

d.h. das Integral in (5.9) wird vernachlässigt. Dabei gelten $\rho_{\text{I}} = 910 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{O}} = 1020 \text{ kg/m}^3$, $A_{\text{O}} = 3.61408 \times 10^{14} \text{ m}^2$ und $\Delta V_{\text{I}} = -2.49537 \times 10^{16} \text{ m}^3$. Daraus ergibt sich ein eustatischer Meeresspiegelanstieg von $e_{\text{eu}} = 61.6 \text{ m}$. Der Wert für das Eisvolumen basiert auf dem Ergebnis von Bamber & Huybrechts (1996); der Wert für die Ozeanfläche auf der Datenbasis des Programmpaketes GMT (Wessel & Smith, 1995). Das Eisvolumen liegt an der unteren Grenze dessen, was in der Literatur für die Antarktis angegeben wird (z.B. Suetova (1986): $2.55 \pm 0.26 \times 10^{16} \text{ m}^3$, zitiert nach Velichko *et al.* (1997)).

Die Integro-Differentiale „sea-level equation“ wird in diesem Beispiel in zwei Simulationen, jeweils mit einem Gitterabstand von 0.7 Grad berücksichtigt, was einer Auflösung bis zum

³Die Parameter des Erdmodells sind in Tab. 6.1 auf Seite 62 angegeben.

Legendre-Grad $n = 256$ entspricht: In der ersten Simulation wird angenommen, daß die Küstenlinien zeitlich unveränderlich sind und damit unabhängig vom Meeresspiegel. Folglich wird in (5.7) $\mathcal{O}(\theta, \varphi, t)$ zu $\mathcal{O}(\theta, \varphi)$, es wird dabei die Ozeanverteilung angenommen, die vor dem Abschmelzen vorhanden ist (Szenario 3). In der zweiten Simulation wird die „sea-level equation“ vollständig gelöst (Szenario 4). In Abb. 5.2 sind die Gebiete, die in diesem letzten Szenario nach

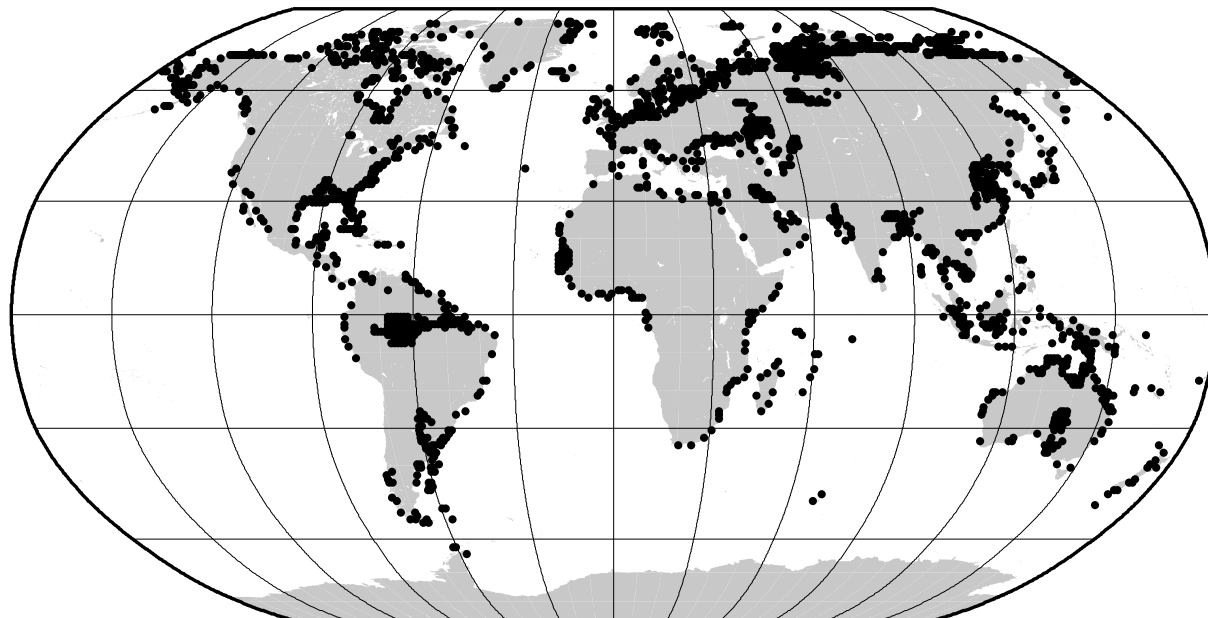


Abb. 5.2: Gebiete, die bei Szenario 4 durch das Abschmelzen des antarktischen Eisschildes überflutet werden. Die schwarzen Scheiben sind in einem Abstand von 0.7° angeordnet.

dem Abschmelzen des antarktischen Eisschildes mit Wasser bedeckt sind, mit schwarzen Scheiben markiert. Dazu gehören z.B. die meisten Küstenregionen aber auch einige Gebiete in der Nähe großer Flüsse (in Südamerika Amazonas und Paranas, in Nordamerika Mississippi und Yukon und in Asien der Ganges) und andere tiefliegende Gebiete (z.B. das westsibirische Tiefland, das chinesische Tiefland, das australische Tiefland, die Westspitze Afrikas und weite Teile Europas. Insgesamt werden etwa 11% der Landfläche mit Wasser überflutet.

Abb. 5.3 zeigt den relativen Meeresspiegelanstieg für die ausgewählten Orte mit jeweils vier Kurven, die den unterschiedlichen Szenarien entsprechen. Die beiden Extrembeispiele sind die Vernachlässigung der Ozeanlast (graue Linie) und die volle Berücksichtigung der Ozeanlast, bei der sich auch die Küstenlinien durch Überflutung verschieben (schwarze Linie). Die Reihenfolge der Graphen entspricht dabei der Verteilung der Orte von Nord nach Süd auf der Erdkugel. Nahezu alle Orte liegen nach dem Abschmelzen des antarktischen Eisschildes unterhalb des Meeresspiegels. Die einzige Ausnahme bildet das in der Nähe des antarktischen Eisschildes gelegene Rio Grande. Im Nahbereich findet nach dem instantanem Abschmelzen zunächst eine Aufwölbung der Erdoberfläche statt, die größer ist als der Anstieg des Meeresspiegels.

Es fällt auf, daß die Relaxation bei vom Eisschild weit entfernten Orten wesentlich schneller zum Stillstand kommt, als bei Orten, die in der Nähe liegen. Wird nur das Abschmelzen des antarktischen Eisschildes berücksichtigt und die Ozeanlast vernachlässigt (graue Linie), so liegen nach Abschluß der Relaxation alle Orte etwa 12 m unter dem Meeresspiegel. Wird das Schmelzwasser gleichmäßig auf die Ozeane verteilt (grau gestrichelte Linie), so ergibt sich ein wesentlich

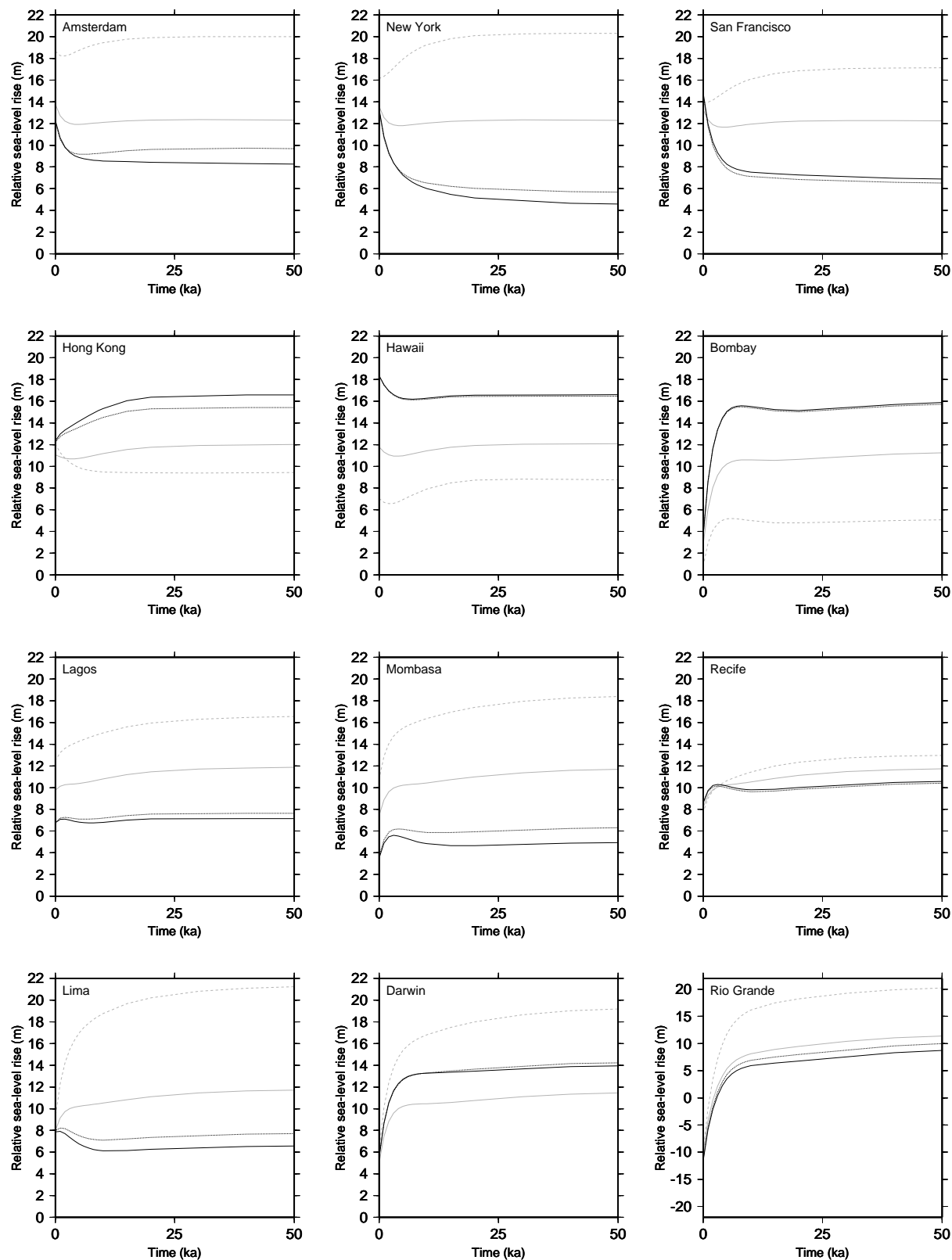


Abb. 5.3: Relativer Meeresspiegelanstieg aufgrund des instantanen Abschmelzens der antarktischen Eislast zum Zeitpunkt $t = 0$. Die verschiedenen Kurven gelten jeweils für Szenario 1: (grau, durchgezogen), Szenario 2: (grau, gestrichelt), Szenario 3: (schwarz, gepunktet), Szenario 4: (schwarz, durchgezogen).

komplexers Bild: Die meisten Orte liegen nach Abschluß der Relaxation deutlich tiefer unter der Meeresoberfläche (16–25 m) als wenn der Ozean nicht berücksichtigt wird. Eine Ausnahme bilden Recife, das nur etwa 2 m tiefer unter der Meeresoberfläche liegt, und vor allem die Orte Hawaii, Bombay und Hong Kong, die sogar weniger stark überflutet werden als in Szenario 1.

Wird die „sea-level equation“ gelöst, so macht der Unterschied, ob variable Küstenlinien berücksichtigt werden (Szenario 4) oder nicht (Szenario 3) maximal 2 m aus. Von den Szenarien 1 und 2 unterscheiden sich die Ergebnisse jedoch zum Teil um mehr als 100%. Ein konkretes Muster in den Ergebnissen zu finden ist schwierig, da das Zusammenspiel zwischen dem Geoid (der Ozeanoberfläche), der relaxierenden Erdoberfläche und dem Küstenlinienverlauf sehr komplex ist. Die weit entfernten Orte Amsterdam, New York und San Francisco liegen bei korrekter Behandlung der „sea-level equation“ 5–10 m unter der Meeresoberfläche, gleiches gilt auch für die wesentlich südlicher gelegenen Orte Lagos, Mombasa, Lima, Recife und Rio Grande. Dabei fällt auf, daß sich die Ergebnisse der verschiedenen Szenarien für Recife nur geringfügig unterscheiden und die Relaxation für Rio Grande auch nach 50 ka noch nicht zum Abschluß gekommen ist und daher eine etwas geringere Überflutung vorliegt. Für alle zuvor genannten Orte gilt, daß sie weniger stark von Wasser bedeckt sind als wenn die Ozeanlast nicht (Szenario 1), oder nur als gleichmäßig (Szenario 2) betrachtet wird. Die Orte Honkong, Hawaii, Mombasa und Lagos werden dagegen stärker überflutet, wenn die „sea-level equation“ gelöst wird.

5.3 Zusammenfassung

Dieses Kapitel erweitert die Theorie aus Kap. 2. Zusätzlich zu einer Eislast wird nun auch die Umverteilung der Wassermassen während der Ver- und Enteisung betrachtet. Man erhält eine Integralgleichung, die numerisch gelöst werden muß. Anhand eines einfachen Beispiels wird gezeigt, daß die Berücksichtigung einer realistischen Ozeanlast bei der Interpretation glazial-isostatischer Ausgleichsvorgänge nicht vernachlässigt werden kann. In dem betrachteten Beispiel beträgt die Differenz der berechneten relativen Meerestiefe je nach Szenario und Beobachtungsort bis zu 16 m.

6. Landhebung in Fennoskandien

Abb. 6.1 zeigt den sogenannten „Rudman stone“, der die älteste schwedische Wasserstandsmarkierung von 1731 aufweist. Der Stein liegt etwa 15 km nordöstlich von Gävle (Abb. 6.17) und zeigt außer der ersten Markierung noch weitere aus den Jahren 1831, 1922 und 1931. Zwischen

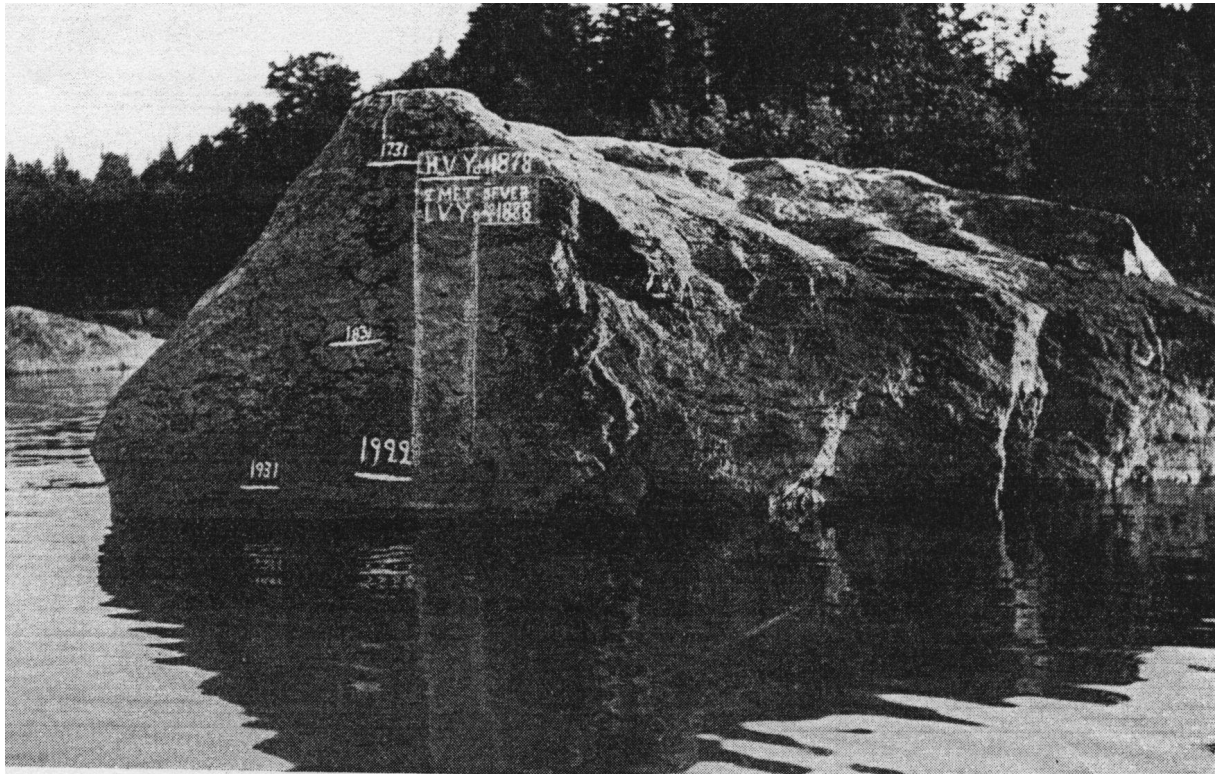


Abb. 6.1: „Rudman stone“ mit datierten Wassermarken (Bergsten, 1954).

1731 und 1946 beträgt der Höhenunterschied des Wassers 1.62 m, was einer durchschnittlichen Landhebungsgeschwindigkeit von 7.5 mm/a entspricht. Dieser Wert liegt etwa 20% über dem mit heutigen Meßmethoden bestimmten Wert.

Daß eine Landhebung die Ursache dieses Phänomens ist, erkannte zuerst Jamieson (1865, 1882), dessen Theorie jedoch zunächst nicht allgemein anerkannt wurde. Erst als der Geologe Gerhard De Geer 1888 für Fennoskandien eine Karte mit Isobasen (Linien gleicher Hebung) anfertigte (De Geer, 1888, 1890), zeichnete sich ab, daß nur eine uneinheitliche Landhebung die Ursache der Beobachtungen sein konnte. Ekman (1991a) faßte die Geschichte der Untersuchungen zur glazialen Isostasie bis 1950 zusammen. Die ersten quantitativen Modellierungen wurden von Haskell (1935) und Van Bemmelen & Berlage (1935) durchgeführt. Haskells Ergebnis einer durchschnittlichen Mantelviskosität von 1×10^{21} Pas wird von Mitrovica (1996) im wesentlichen bestätigt, während die Theorie von Van Bemmelen & Berlage (1935), daß der gesamte Fluß innerhalb einer dünnen Schicht erfolgt, heute nicht mehr für realistisch gehalten wird.

In diesem Kapitel wird die beobachtete Landhebung in Fennoskandien im Hinblick auf Li-

thosphärenmächtigkeit und Viskositäten des Mantels und der Asthenosphäre interpretiert. Im Gegensatz zu verschiedenen früheren Arbeiten (z.B. Wolf, 1986, 1987; Fjeldskaar & Cathles, 1991; Fjeldskaar, 1994; Thoma & Wolf, 1999) wird hierbei neben einem globalen Eismodell auch die Ozeanlast mitberücksichtigt.

Abschnitt 6.1 stellt zunächst die verschiedenen Eismodelle vor, die in dieser Arbeit verwendet werden. Für die Interpretation werden zwei neue Eismodelle verwendet: W-ICE-3 ist ein aus Ellipsen konstruiertes Modell (Abschnitt 6.1.2), W-SCAN-2 eine globale Fortführung des von Lambeck *et al.* (1998b) entwickelten Modells SCAN-2 (Abschnitt 6.1.3). Beide Eismodelle bestehen aus einem hochauflösenden fennoskandischen Eismodell, die mit dem globalen Eismodell ICE-3G kombiniert werden.

Sowohl die Eismodelle SCAN-2 und ICE-3G als auch die Mehrzahl der datierten Landhebungskurven (Abschnitt 6.2.1) orientieren sich an der klassischen ^{14}C -Zeitskala, die auf der Libby-Halbwertszeit von 5568 Jahren basiert. Eine vollständige Interpretation mit ^{14}C korrigierten Zeitskalen, wie sie in dieser Arbeit erfolgen soll, liegt bislang nicht vor. Es sind zwei Korrekturen anzubringen: Zum einen müssen alle Zeiten dem genaueren Wert von 5730 Jahren für die ^{14}C Halbwertszeit angepaßt werden, zum anderen ist bekannt, daß der ^{14}C -Gehalt in der Atmosphäre während der letzten 20 000 Jahre nicht konstant war (z.B. Bard *et al.*, 1990; Eronen, 1992), was bei der ^{14}C Datierung von Kohlenstoff aufnehmenden Organismen jedoch impliziert wird. Daher muß noch eine zweite, nichtlineare Korrektur angebracht werden, die dies berücksichtigt. Beide Korrekturen werden mit Hilfe des Programms CALIB 4.3.1 von Stuiver & Reimer (1993) durchgeführt.¹

Lambeck *et al.* (1998b) haben vor kurzem eine vergleichbare Interpretation der Landhebung in Fennoskandien ohne ^{14}C -Korrekturen vorgenommen. Die Viskositätswerte jener Arbeit sind somit in der Einheit $\text{Pa}^{14}\text{C s}$ gegeben, d.h. die Einheit Sekunde ist zeitabschnittsabhängig; je nach Konzentration des Kohlenstoffs in der Atmosphäre ist eine $^{14}\text{C s}$ Sekunde unterschiedlich lang. Dies widerspricht jedoch der Definition einer Einheit, die systemunabhängig sein soll. Ob eine Erhöhung der Viskositätswerte um 15%, wie Lambeck (1998) vorschlägt, ausreicht, um diese Inkonsistenz zu kompensieren, ist zweifelhaft (vgl. Abschnitt 6.5).

Aus Gründen der Rechnerkapazität ist es nicht möglich, die Integralgleichung, mit denen die Ozeanlast berechnet wird („sea-level equation“, Abschnitt 5.1), für jedes Erd- und Eismodell iterativ zu lösen. Da sich die Ozeanlast durch geringfügige Modifikation des Erdmodells nur unwesentlich ändert, wird dieser Effekt vernachlässigt. In dieser Arbeit wird die Ozeanlast wie folgt berücksichtigt: Zunächst wird mit Eismodell ICE-3G von Tushingham & Peltier (1991) und Erdmodell MF2 von Mitrovica & Forte (1997) eine Ozeanlast durch Lösen der „sea-level equation“ berechnet (Abschnitt 6.1.1), die als feste Randbedingung für die in Abschnitt 6.4 durchgeführte Interpretation der in Abschnitt 6.2 vorgestellten Beobachtungsdaten dient. Diese Interpretation erfolgt mit Hilfe von Vorwärtsrechnungen, bei denen der Raum der freien Parameter systematisch durchsucht wird. Nach Auswertung der Daten erhält man einen Parameterbereich, der in der Lage ist, die Beobachtungsdaten zu erklären. Aus diesem Bereich wird nun ein Erdmodell ausgewählt, für das zusammen mit Eismodell W-SCAN-2 die Ozeanlast durch Lösen der „sea-level equation“ erneut berechnet wird. Mit dieser neuen Ozeanlast werden die Vorwärtsrechnungen erneut durchgeführt. Diese Iteration wird solange wiederholt, bis Konvergenz bezüglich des sich

¹Durch die vorgenommenen Korrekturen erhält man aus ^{14}C -Jahren siderische (Kalender-)Jahre.

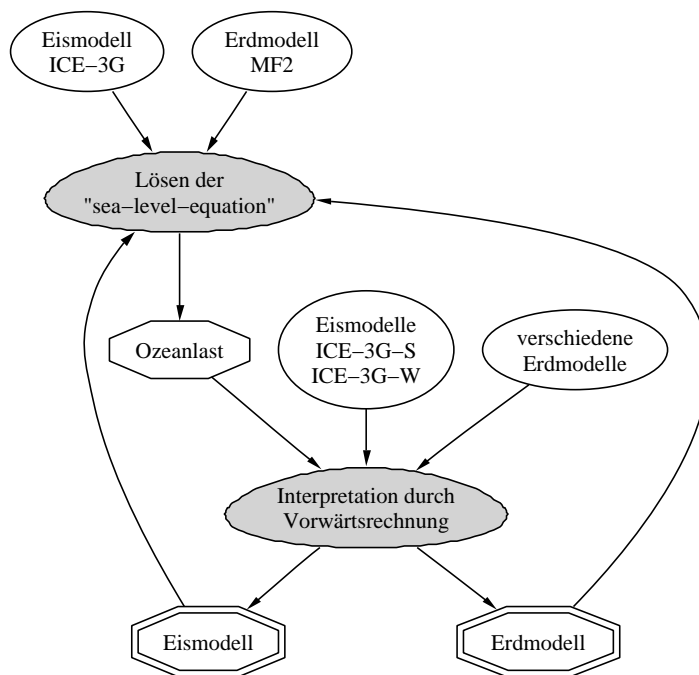


Abb. 6.2: Schematische Darstellung der Eingabeparameter (Oval), der Rechenschritte (Eiförmig, grau hinterlegt) und Ergebnisse (Achteckig). Die Ozeanlast ist sowohl ein Ergebnis, als auch ein Eingabeparameter.

ergebenden Erd- bzw. Eismodells erreicht ist. Abb. 6.2 zeigt den Verlauf des hier beschriebenen Lösungsweges schematisch.

6.1 Pleistozäne Eislasten

6.1.1 Eismodell ICE-3G und Berechnung der Ozeanlast

Eismodell ICE-3G (Tushingham & Peltier, 1991) dient bis heute als Standardmodell für pleistozäne Vereisungen. Als Randbedingungen zur Konstruktion wurden im wesentlichen ^{14}C -datierte Strandlinien und Rückzugsisochronen herangezogen. Das letzte glaziale Maximum von Eismodell ICE-3G liegt 18 ka BP. Zwischen diesem Zeitpunkt und dem heutigen liegt (im Modell) alle 1000 Jahre eine neue Lastverteilung vor. Für die vorliegende Arbeit werden alle Zeitpunkte in siderische Jahre umgerechnet. Abb. 6.10 zeigt den Zusammenhang zwischen ^{14}C - und siderischen Jahren.

Eismodell ICE-3G beschreibt nur den Enteisungsvorgang. Es wird angenommen, daß vor dem letzten glazialen Maximum die Eislast konstant war. Diese Vereinfachung spielt jedoch bei der Berechnung von Strandlinien und Landhebungsgeschwindigkeiten keine Rolle; nur wenn Absolutwerte (Geoid oder Schwere) betrachtet werden, ist eine detailliertere Vereisungsgeschichte von Bedeutung (Thoma & Wolf, 1999).

Das Eismodell ICE-3G benutzt als Anfangszustand eine eisfreie Erde. Da in dem Modell die Antarktis und Grönland zum heutigen Zeitpunkt vereist sind, liegt der Meeresspiegel im eisfreien Anfangszustand höher als heute. Für die Berechnung der Ozeanlast ist es jedoch sinnvoller, die heutige Wasser-Eis-Verteilung als Anfangszustand zu betrachten, da nur die heutigen Küsten-

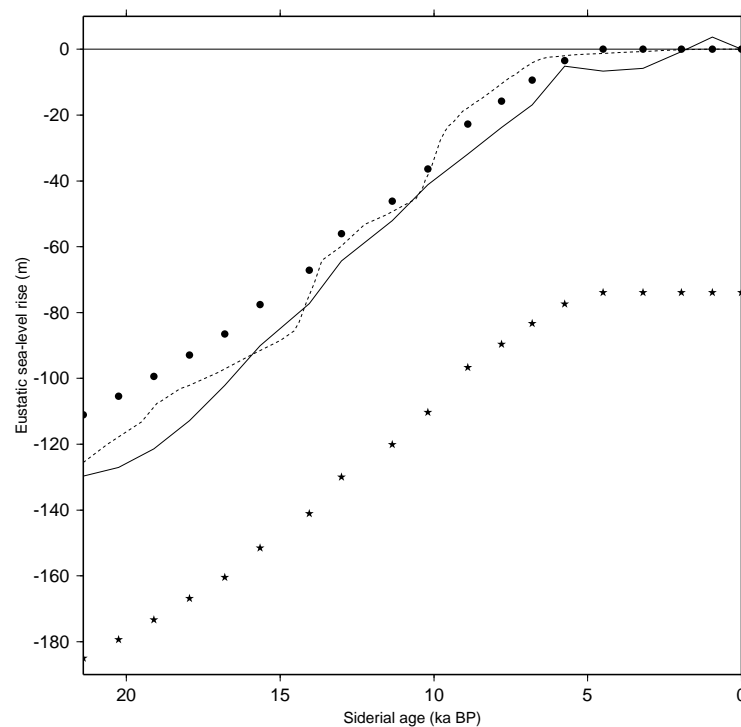


Abb. 6.3: Eustatischer Meeresspiegelanstieg e_{eu} . Dem Eisvolumen entsprechende Meeresspiegeländerung des originalen ICE-3G (Sterne) und des um das heutige Eisvolumen korrigierten ICE-3G (Punkte). Zum Vergleich ist die eustatische Meeresspiegelhöhe nach SPECMAP (durchgezogen) und Fleming *et al.* (1998) (gestrichelt) angegeben.

linien als Datenbasis zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund wird die heutige Eisverteilung von dem Modell ICE-3G subtrahiert. Die Punkte in Abb. 6.3 geben jeweils die dem Eisvolumen entsprechende Meeresspiegeländerung (bei konstanter Ozeanoberfläche) an. Die durchgezogene Kurve basiert auf dem ^{14}C -korrigierten SPECMAP Datensatz `specmap.017` aus dem „SPECMAP No 1 Archive“² des National Geophysical Data Center (NGDC). Er enthält Tiefseebohrkern- $\delta^{18}\text{O}$ -Daten als Funktion des Alters, die mit der Formel $e_{eu} = -34.83(\delta^{18}\text{O} + 1.93)$ m in Meeresspiegellhöhen umgerechnet werden. (Imbrie *et al.*, 1984; Ritz, 1997; Le Meur & Huybrechts, 1998; Greve *et al.*, 1999). Die Parameter in der Formel sind so gewählt, daß die eustatische Meeresspiegelhöhe zum letzten glazialen Maximum -130 m beträgt (Chapell & Shackleton, 1986; Huybrechts, 1992). Die Kurve von Fleming *et al.* (1998) (gestrichelt) beruht auf einer neueren Analyse von Korallenriffen im Fernbereich der holozänen Eisschilde und dient hier nur zum Vergleich.

Mit dem korrigierten Modell ICE-3G wird in Verbindung mit einem kompressiblen sieben-schichtigen Erdmodell die Ozeanverteilung berechnet, die als Randbedingung für die erste Vorwärtsrechnung verwendet wird (vgl. Abb. 6.2). Die Parameter des Erdmodells sind in Tab. 6.1 zusammengestellt. Die Dichte ist so gewählt, daß die Masse der einzelnen Schichten mit der jeweiligen Masse nach PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) übereinstimmt, der Schermodul entspricht dem Volumenmittelwert der in PREM angegebenen Werte. Die Viskositätswerte entsprechen Volumenmittelwerten des Erdmodells MF2 von Mitrovica & Forte (1997).

Abb. 6.4 zeigt die Ozeanverteilung während verschiedener Stadien der Enteisung. Die sich

²www.ngdc.noaa.gov/mgg/geology/specmap.html.

Schicht	r (km)	ρ_{top} (kg/m ³)	ρ_{bottom} (kg/m ³)	β	μ (Pa)	η (Pa s)
7	6371	3196	3261	1.60	0.57×10^{11}	∞
6	6291	3261	3380	1.60	0.67×10^{11}	1.73×10^{21}
5	6151	3422	3556	1.29	0.77×10^{11}	5.68×10^{20}
4	5971	3792	3974	1.01	1.10×10^{11}	1.14×10^{20}
3	5701	4410	5024	0.61	1.98×10^{11}	7.20×10^{21}
2	4600	5023	5581	0.38	2.62×10^{11}	4.53×10^{21}
1	3480	10982	10982	0	0	0

Tab. 6.1: Parameter des siebenschichtigen Erdmodells zur Bestimmung der Ozeanlast.

im 1°-Abstand befindenden schwarzen Punkte kennzeichnen die Stellen, an denen sich zu einem bestimmten Zeitpunkt Wasser befindet.³ Anhand der Ozeanverteilung ist deutlich zu erkennen, wie nach dem Zurückweichen des Eises zunächst Wasser in den baltischen Raum eindringt und anschließend durch das sich hebende Land wieder verdrängt wird, bis die heutige Wasser-Land-Verteilung erreicht ist. Der Baltische Eissees lag um etwa 25–30 m höher als der damalige Meeresspiegel. Dies wird in dieser Simulation vernachlässigt. Den Fehler, der dadurch entsteht, kann man wie folgt abschätzen: Die Radialverschiebung im isostatischen Gleichgewicht hängt von der Dichte der Last, der Dichte des viskosen Materials und der Mächtigkeit der Auflast ab. Für die hier durchgeführte Rechnung bedeutet dies

$$u_r^{(\text{cal})} = \frac{\rho_{\text{O}} h_{\text{O}}}{\rho_{\text{top}}}. \quad (6.1)$$

Realistisch wäre

$$u_r^{(\text{real})} = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}(h_{\text{O}} + 30 \text{ m})}{\rho_{\text{top}}}. \quad (6.2)$$

Mit den Werten $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{O}} = 1020 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{top}} = 3261 \text{ kg/m}^3$ (die Dichte an der Oberseite der Asthenosphäre) und $h_{\text{O}}(t = 10 \text{ ka BP}) = 52 \text{ m}$ (der Wert entstammt dem SPECMAP Datensatz) ergibt sich für u_r eine Differenz von 9 m. Dies entspricht einer Abweichung von 36% gegenüber der realistischen Abschätzung. Das isostatische Gleichgewicht wurde in der kurzen Zeitspanne, in der der Baltische Eissees existierte, jedoch nie erreicht, daher wird diese geringe zusätzliche Last vernachlässigt. Werden jedoch Strandlinien aus dem entsprechenden Zeitabschnitt verwendet, so muß die Differenz von 25–30 m berücksichtigt werden. Dabei muß jedoch auch beachtet werden, wie die Strandlinie datiert wurde. Wenn dies durch Bohrkerne geschah und der Übergang von marinem zu brackischem Milieu als Grundlage der Datierung diente, so stimmt das entsprechende Alter nicht mit dem Trockenfallen der Region überein, sondern deutet lediglich darauf hin, daß sich die Verbindung zwischen dem Baltischen Eissees und dem offenen Meer schloß. In dieser Arbeit werden Strandlinien, die im Baltikum und zwischen 12300 und 8100 aBP liegen, der Einfachheit halber nicht berücksichtigt.

³In Kapitel 5 und Anhang B.3 wird näher auf die entsprechende Gleichung und deren Programmierung eingegangen.

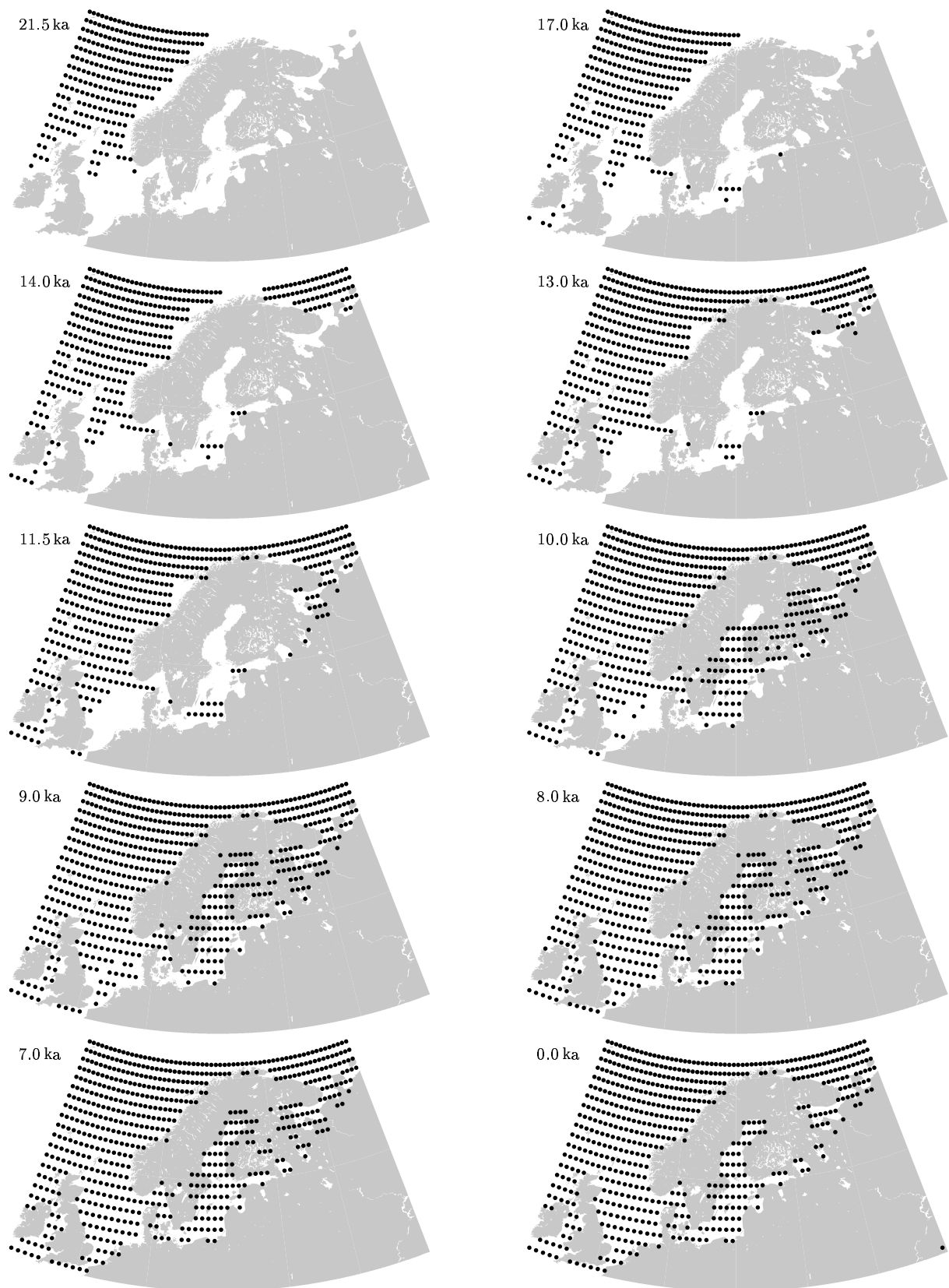


Abb. 6.4: Ozeanverteilung zu verschiedenen Zeiten in der Vergangenheit. Die schwarzen Punkte entsprechen der wasserbedeckten Fläche in 1°-Abständen.

6.1.2 Eismodell WEICHSEL-3 und W-ICE-3

Eismodell WEICHSEL-3 ist eine grundlegende Weiterentwicklung der früheren fennoskandischen Eismodelle WEICHSEL-1 (Wolf, 1987) und WEICHSEL-2 (Thoma & Wolf, 1999). Es besteht nicht wie die früheren Modelle aus einzelnen Kreisscheiben, sondern aus einer Längen- und Breitenabhängigen Mächtigkeit. Zur Konstruktion dieses Modells sind die Rückzugsisochronen durch mehrere ellipsenförmige Eislasten mit unterschiedlichen Querschnitten angenähert. Die Ellipsen werden so gelegt, daß sie die beobachteten Rückzugsisochronen (Andersen, 1981; Flohn, 1985; Lundqvist, 1986) gut annähern, und entsprechend einer angenommenen Mächtigkeit skaliert. Anschließend wird die Topographie subtrahiert. Dies entspricht der Annahme (z.B. Boulton *et al.*, 1985), daß sich die Oberfläche des Eises nicht nach kurzwelligen Unebenheiten des Untergrundes richtet. Gestützt wird diese These auch durch Modellrechnungen (Greve, 1997). Abb. 6.5 zeigt

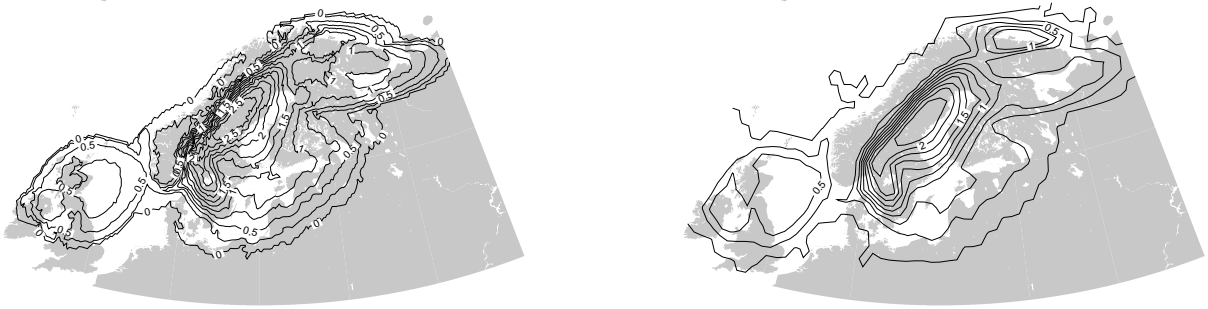


Abb. 6.5: Mächtigkeiten des Eismodells WEICHSEL-3 zum letzten glazialen Maximum vor (links) und nach (rechts) der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen bis zum Grad $n = 180$. Die Konturlinien geben die Höhe in km an.

die räumliche Verteilung und die Mächtigkeit der fennoskandischen Eislast. Die rechte Graphik in Abb. 6.5 zeigt die Last zum letzten glazialen Maximum (LGM) nach Entwicklung bis $n = 180$. Abb. 6.6 zeigt die zeitliche und räumliche Entwicklung vom letzten glazialen Maximum bis zum Verschwinden des Eises.

Das maximale Volumen von WEICHSEL-3 orientiert sich an der Arbeit von Velichko *et al.* (1997), der dieses mit $5.25 \times 10^{15} \text{ m}^3$ angibt. Die sich aus dem Volumen ergebende maximale Eismächtigkeit H_{LGM} wird verwendet, um die Eismächtigkeiten zu späteren Zeitpunkten bestimmen zu können. Dazu wird angenommen, daß die Bedingung $H_i^2 R_i^{-1} = \text{const.}$ erfüllt ist (z.B. Orowan, 1949; Wolf, 1985a; Paterson, 1994). Dabei ist R_i der Radius einer zur Flächenbedeckung A_i äquivalenten Kreisfläche: $R_i = \sqrt{A_i \pi^{-1}}$. Sind $H_0 = H_{\text{LGM}}$ und $A_0 = A_{\text{LGM}}$ die Mächtigkeit und die Fläche des Eisschildes während des letzten glazialen Maximums, so ergibt sich die Mächtigkeit des i -ten Eisschildes durch

$$H_i = \frac{H_{\text{LGM}}}{\sqrt{A_{\text{LGM}}}} \sqrt{A_i}. \quad (6.3)$$

Um das globale Eismodell W-ICE-3 zu erhalten, wird aus ICE-3G von Tushingham & Peltier (1991) der Bereich, der Fennoskandien und die Britischen Inseln bedeckt, durch WEICHSEL-3 ersetzt.

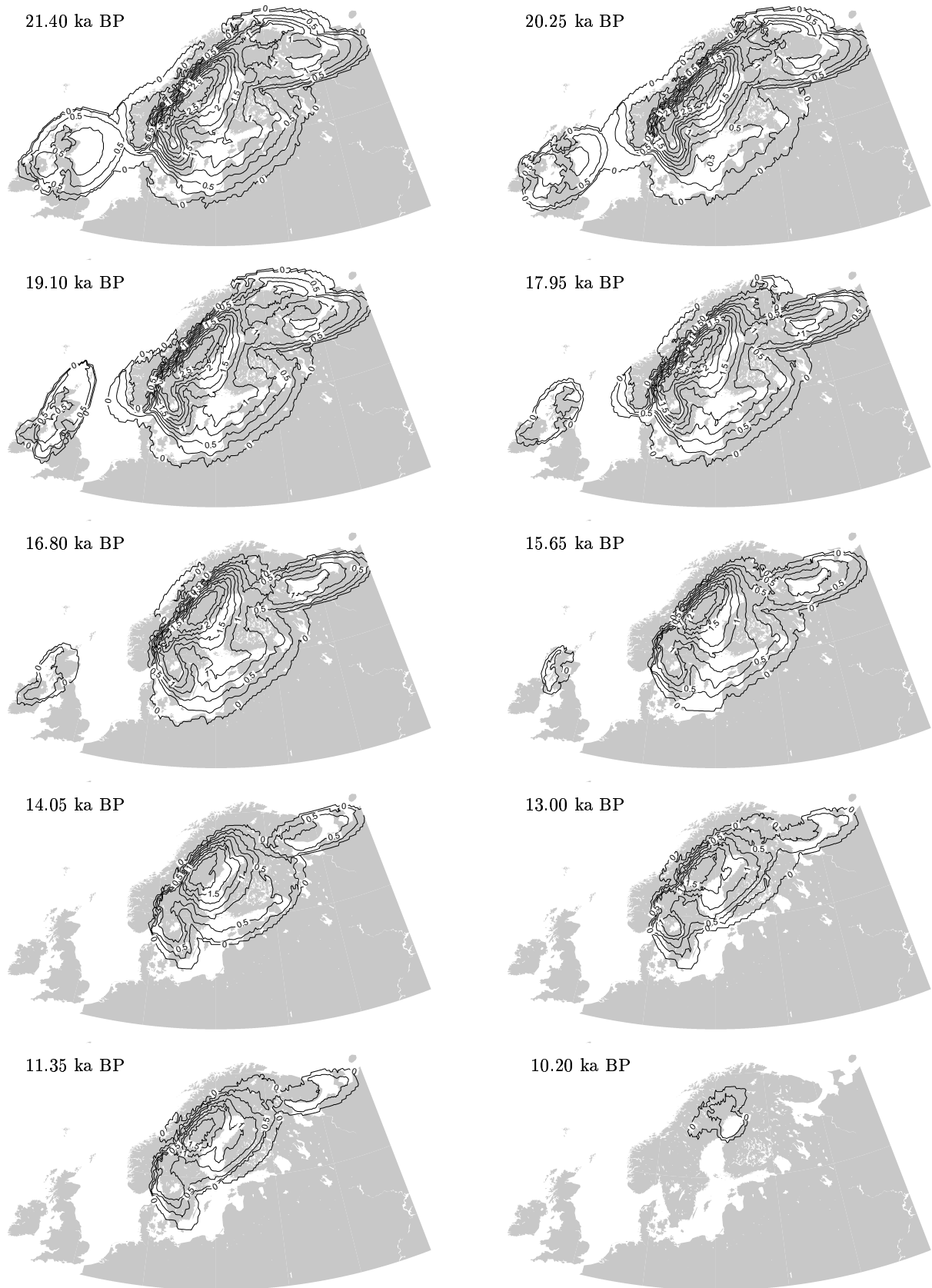


Abb. 6.6: Mächtigkeiten des Eismodells WEICHSEL-3. Die Konturlinien geben die Mächtigkeit in km an.

6.1.3 Eismodell SCAN-2 und W-SCAN-2

Vor kurzem haben Lambeck *et al.* (1998b) anhand von Landhebungskurven das lokale Eismodell SCAN-2 für Fennoskandien entwickelt. Dieses Eismodell wurde auch zur Berechnung von Landhebungsgeschwindigkeiten und Neigungsänderungen entlang von Binnenseen (Lambeck *et al.*, 1998a) und zur Berechnung von Spannungen (Wu *et al.*, 1999) verwendet.

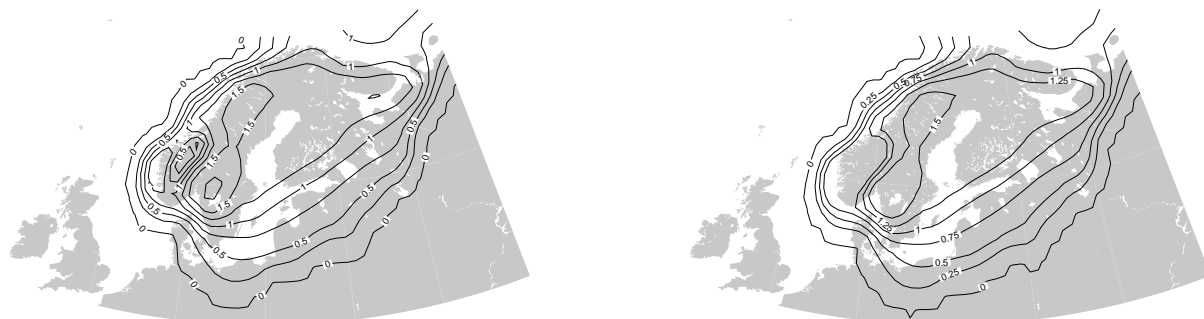


Abb. 6.7: Wie Abb. 6.5, jedoch für W-SCAN-2.

Abb. 6.7 zeigt die Eisverteilung zum letzten glazialen Maximum und ihre Kugelflächenfunktionsentwicklung bis zum Grad $n = 180$. Abb. 6.9 zeigt die räumliche und zeitliche Entwicklung der Eisverteilung. Eismodell SCAN-2 verwendet ^{14}C -Jahre. Um es für die Interpretation verwenden zu können, wird seine Zeitskala entsprechend kalibriert. Außerdem wird es, ebenso wie Eismodell WEICHSEL-3, außerhalb Fennoskandiens durch ICE-3G ergänzt. Dieses globale, ^{14}C -korrigierte Eismodell wird hier mit W-SCAN-2 bezeichnet.

6.1.4 Vergleich der Eismodelle

Um die räumliche Ausdehnung der beiden Eismodelle zum letzten glazialen Maximum zu vergleichen, wird die Mächtigkeit von SCAN-2 von der von WEICHSEL-3 subtrahiert. Abb. 6.8 zeigt den Unterschied in den Mächtigkeiten im Raum- und Spektralbereich bis zum Grad $n = 180$. Der

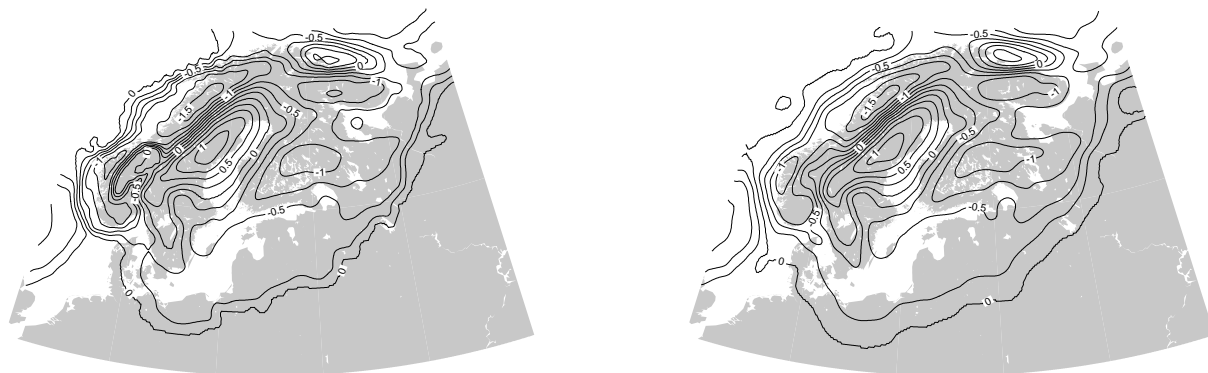


Abb. 6.8: Unterschiede in der Mächtigkeit zwischen den Eismodellen WEICHSEL-3 und SCAN-2 zum letzten glazialen Maximum vor (links) und nach (rechts) der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen bis zum Grad $n = 180$. Die Konturlinien geben die Differenz in km an.

Unterschied ist in beiden Bereichen nahezu identisch, was für die Stabilität der Kugelflächenfunktionsentwicklung spricht. WEICHSEL-3 ist im Zentrum des Eisschildes (Zentralschweden)

um etwa 800 m mächtiger als SCAN-2. Dafür fällt SCAN-2 zu den Rändern hin wesentlich flacher ab, woraus sich an den Eisrändern (Finnland, Kola-Halbinsel, Norwegen) eine größere Mächtigkeit (bis zu 1200 m) von SCAN-2 ergibt. Wie sich dies im Hinblick auf die zu interpretierenden Beobachtungsdaten auswirkt, wird in Abschnitt 6.5 diskutiert.

	WEICHSEL-3	SCAN-2 [‡]	other ice models	
Volume (m ³)	2.56×10^{15}	4.81×10^{15}	6.90×10^{15} 6.11×10^{15} 5.25×10^{15}	Suetova (1986) Tushingham & Peltier (1991) [†] Velichko <i>et al.</i> (1997)
Area (m ²)	3.40×10^{12}	5.10×10^{12}	3.93×10^{12} 3.15×10^{12} 3.87×10^{12}	Suetova (1986) Tushingham & Peltier (1991) [†] Velichko <i>et al.</i> (1997)
Height (m)	3000	1850	3400 2800 2000 3000 1660	Andersen (1981) Boulton <i>et al.</i> (1985) Nesje & Dahl (1990) Tushingham & Peltier (1991) [†] Brook <i>et al.</i> (1996)

Tab. 6.2: Vergleich verschiedener Eismodelle, alle Werte beziehen sich auf das letzte glaziale Maximum.

[†] Nur der fennoskandische Teil des globalen Modells.

[‡] Inklusive der Barentssee.

Tabelle 6.2 vergleicht WEICHSEL-3 und SCAN-2 mit einigen anderen Eismodellen. Die Modelle von Tushingham & Peltier (1991) und Lambeck *et al.* (1998b) (SCAN-2) sind Modelle, die zur Interpretation glazial-isostatischer Ausgleichsvorgänge konstruiert wurden, die anderen Modelle beruhen weitgehend auf geologischen Beobachtungen. Die große Mächtigkeit des Eismodells von Andersen (1981) setzt ein statisches Modell voraus, bei dem das Eis nicht fließt. Andrews (1982) zeigt jedoch, daß Eismodelle, die mit dem eustatischen Meeresspiegelanstieg konsistent sind, deutlich dünner sein müssen. In der Arbeit von Lambeck *et al.* (1998b) wird zunächst mit dem Modell von Andersen (1981) gearbeitet, doch aus ihrer Interpretation folgt ebenfalls, daß ein Eismodell mit einer maximalen Mächtigkeit um 2000 m wahrscheinlicher ist.

Es fällt auf, daß das Volumen von Eismodell WEICHSEL-3 etwas geringer ist, als die Volumina der anderen Modelle. Durch die Subtraktion der Topographie reduziert sich hier das Eisvolumen trotz vergleichbarer Oberfläche und Mächtigkeit. Die Folgen hiervon werden in Abschnitt 6.5 diskutiert.

6.2 Beobachtungsdaten

Es sollen vier verschiedene Typen von Beobachtungsdaten interpretiert werden. Dies sind postglaziale Landhebungen, heutige Landhebungsgeschwindigkeiten, Neigungsänderungen entlang zweier Binnenseen und Schwereänderungen. In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Beobachtungsdaten vorgestellt und gezeigt, wie diese interpretiert werden.

6.2.1 Landhebung

Eine Landhebungskurve zeigt die Höhe des Meeresspiegels an einer bestimmten Position (Longitude und Latitude) zu verschiedenen Zeitpunkten in der Vergangenheit. Um den beobachteten re-

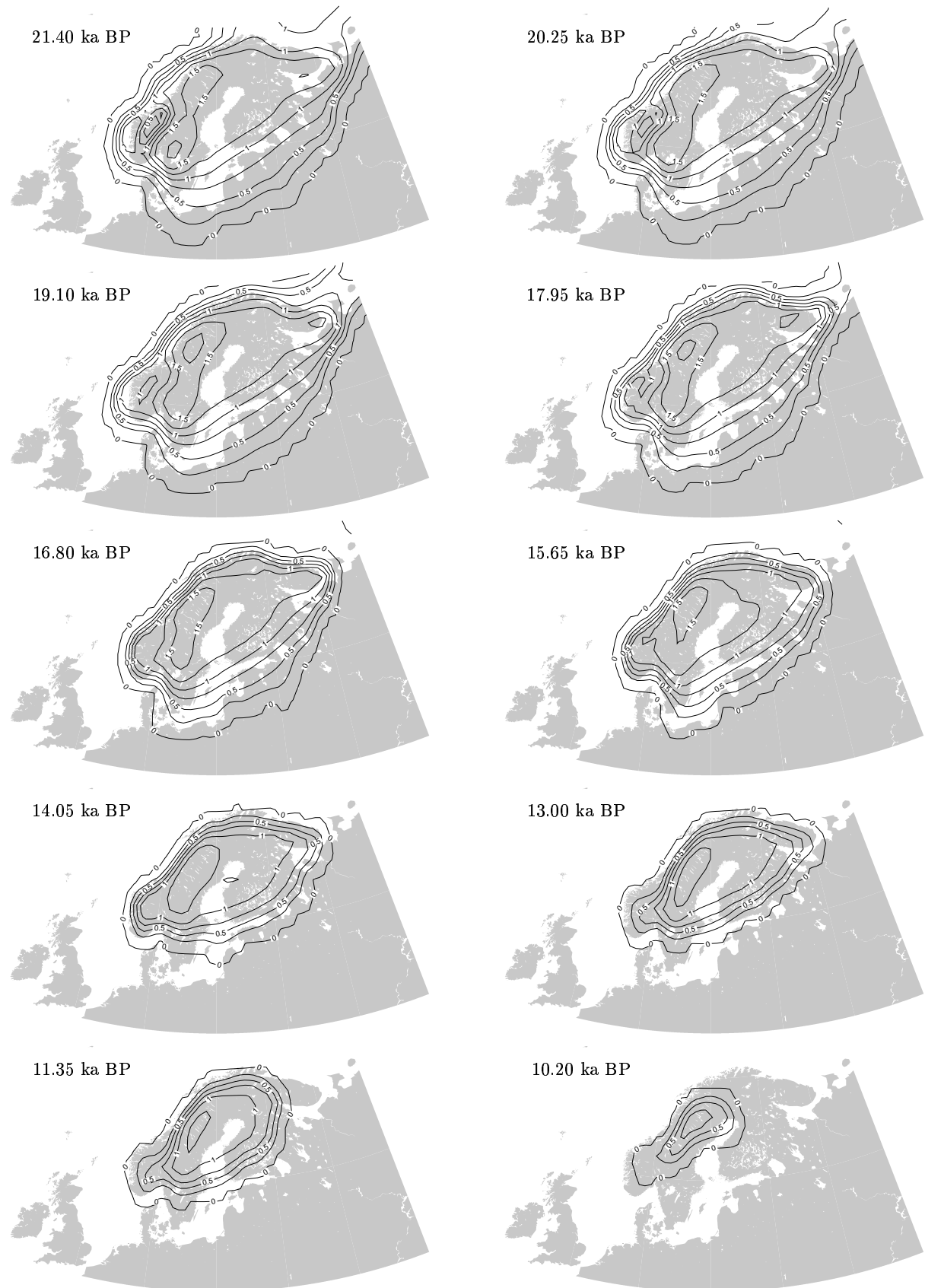


Abb. 6.9: Mächtigkeiten des Eismodells W-SCAN-2. Die Konturlinien geben die Mächtigkeit in km an.

lativen Meeresspiegelanstieg $h_{\text{RSL}}(\theta, \varphi, \Delta t)^4$ mit der berechneten Radialverschiebung $u_r(\theta, \varphi, t)$ vergleichen zu können (Δt ist dabei das Alter der Strandlinie bezüglich 1950 AD), sind die folgenden vier Anpassungen notwendig:

1. Die Zeiten der beobachteten Kurven müssen ^{14}C -korrigiert werden.

Einige Datierungen wurden vorgenommen, bevor die Radiokarbonmethode zur Verfügung stand (Pollen- und/oder Planktonanalysen) oder stammen von marinen Proben. Diese wurden an die terrestrische ^{14}C -Skala angeglichen. Zur Umrechnung der ^{14}C -Skala in siderische Jahre wurde das Programm CALIB 4.3.1 von Stuiver & Reimer (1993) verwendet, Abb. 6.10 zeigt den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zeitskalen.

2. Die Geoid- und die eustatische Korrektur der Meeresspiegelhöhen muß berücksichtigt werden.

Die beobachtete relative Meeresspiegeländerung h_{RSL} gibt immer die Höhe bezüglich des heutigen Meeresspiegels an. In der Vergangenheit ist dieser nicht konstant gewesen. Um berechnete und beobachtete Landhebungen miteinander vergleichen zu können, müssen der eustatische Meeresspiegelanstieg $e_{\text{eu}}(\Delta t)$ und die Geoidhöhe $h_{\text{e}}(\theta, \varphi, \Delta t)$ berücksichtigt werden.

$$\underbrace{h_{\text{RSL}}(\theta, \varphi, \Delta t) - e_{\text{eu}}(\Delta t)}_{h_{\text{obs}}(\theta, \varphi, \Delta t)} = \underbrace{-h_{\text{u}}(\theta, \varphi, \Delta t) + h_{\text{e}}(\theta, \varphi, \Delta t)}_{h_{\text{cal}}(\theta, \varphi, \Delta t)}. \quad (6.4)$$

Die berechneten Werte der Radialverschiebung u_r und Geoidhöhe e_r müssen dabei auf die heutigen (=1950 AD) Werte bezogen werden:

$$h_{\text{u}}(\theta, \varphi, \Delta t) := u_r(\theta, \varphi, t) - u_r(\theta, \varphi, t = 1950 \text{ AD}), \quad (6.5)$$

$$h_{\text{e}}(\theta, \varphi, \Delta t) := e_r(\theta, \varphi, t) - e_r(\theta, \varphi, t = 1950 \text{ AD}). \quad (6.6)$$

Als eustatischer Meeresspiegelanstieg $e_{\text{eu}}(\Delta t)$ wird der SPECMAP-Datensatz (Imbrie *et al.*, 1984; Greve *et al.*, 1999) verwendet. Prinzipiell wäre es auch möglich, die eustatische Meeresspiegeländerung aus der Lösung „sea-level equation“ zu erhalten. Die Lösung dieser Gleichung ist jedoch zeitlich zu aufwendig, als daß sie für jedes Erdmodell und jede (skalierte) Lastmächtigkeit durchgeführt werden könnte. Daher erscheint die Verwendung des SPECMAP-Datensatzes als die bessere Alternative.

3. Den beobachteten relativen Meeresspiegeländerungen $h_{\text{RSL}}(\theta, \varphi, \Delta t)$ muß ein Fehler zugewiesen werden.

Tatsächlich ist die zeitliche Unsicherheit δt deutlich größer als die Höhenunsicherheit δh . Für die folgenden Untersuchungen ist es jedoch einfacher, wenn man die Fehler in der Datierung als Fehler in der Höhe ausdrückt. Es wird angenommen, daß der Fehler um so größer ist, je weiter der Zeitpunkt der Datierung in der Vergangenheit liegt, d.h. $\delta h = 1.5 \times \delta t / 1000$, jedoch mindestens 10 m beträgt (vergleichbare Werte benutzten auch schon Wolf, 1987; Thoma & Wolf, 1999).

4. Zwischen 14290 aBP und 9010 aBP⁵ gab es verschiedene Stadien im Baltikum (Baltischer Eisse, Ancylus See), während derer sich dort ein Süßwassersee ausbildete, der keine Verbindung zum Ozean hatte (z.B. Eronen, 1983; Björck, 1995; Lambeck *et al.*, 1998b). Sind

⁴RSL steht für „relative sea level“.

⁵Dies entspricht 12300 aBP und 8100 aBP in ^{14}C -Jahren.

in diesem Zeitraum Landhebungsdaten gesammelt worden, so sind die hierfür bestimmten Höhen nicht relativ zum Meeresspiegel bestimmt, sondern vielmehr relativ zu dem entsprechenden (höher gelegenen) Süßwassersee, vgl. Seite 62. Aus diesem Grunde werden Strandlinien im Baltikum, die zwischen 14290 BP und 9010 aBP liegen, nicht berücksichtigt.⁶

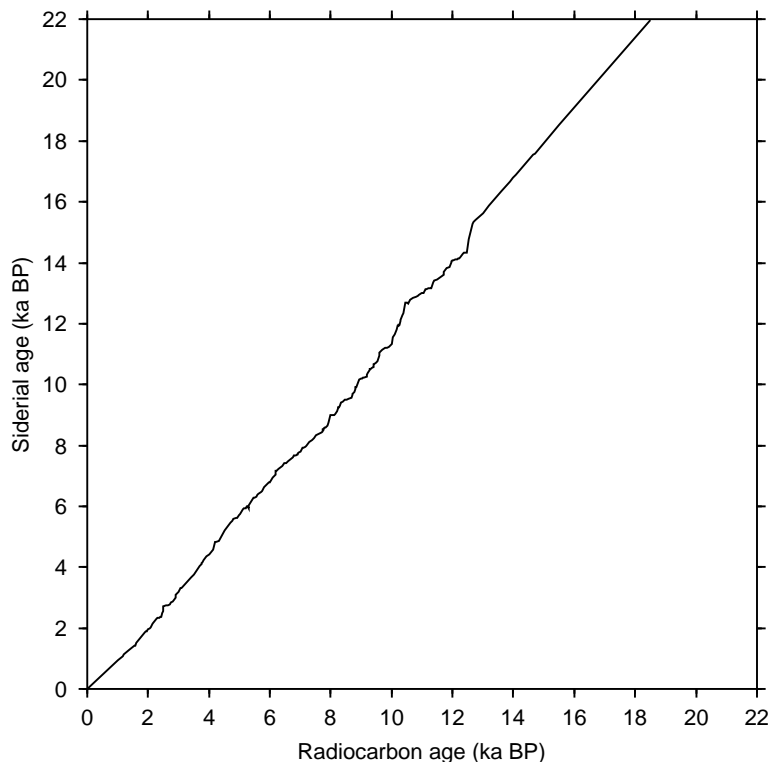


Abb. 6.10: Kalibrierung der ^{14}C -Zeitskala nach Stuiver & Reimer (1993).

Die Punkte einer Landhebungskurve stammen im allgemeinen nicht alle vom selben Ort, sondern von benachbarten Plätzen. Als Beispiel dafür, daß das räumliche Zusammenziehen von an unterschiedlichen Orten gesammelten Proben auf einen Punkt gerechtfertigt ist, dient hier die Landhebungskurve von Ångermanland. Abb. 6.11 zeigt drei Punkte im Mündungsbereich des Ångermanälven. Die beiden äußeren Punkte sind zwei etwa 35 km auseinanderliegende Orte, von denen Proben zur Konstruktion der Landhebungskurve gesammelt wurden (Cato, 1987, 1992). Die mittlere Position ist die in der Modellierung verwendete. Abb. 6.12 zeigt die berechnete Landhebung für die beiden äußeren Orte. Die berechneten Kurven liegen so dicht beieinander, daß die Beobachtungsungenauigkeit eine wesentlich größere Rolle spielt als die Abweichung, die sich aufgrund der vorliegenden Positionsverschiebung ergibt. Ångermanland wurde für dieses Beispiel gewählt, weil dort die beobachtete Hebung (und somit auch der zu erwartende Fehler) groß sind.

Abb. 6.13 zeigt die Position der Orte an, von denen Landhebungskurven zur Interpretation verwendet werden. In Anhang D.1 sind die Landhebungsdaten tabelliert. Die meisten Datierungen sind mit Hilfe der ^{14}C -Methode durchgeführt worden oder auf diese bezogen. Lediglich die Datierungen der Orte Ångermanland (Lidén, 1938; Lliboutry, 1971; Cato, 1987, 1992) und

⁶Dies betrifft alle Orte an der heutigen Ostsee, die östliche von Soborg und Billingen liegen (z.B. Björck, 1995).

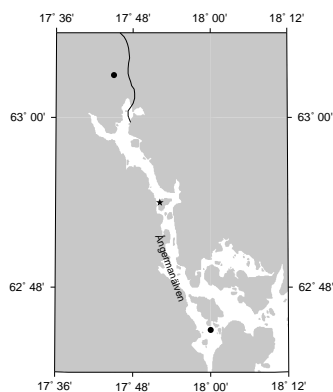


Abb. 6.11: Mündungsgebiet des Ångermanälven mit Beobachtungspunkten (Punkte) und dem Berechnungspunkt (Stern).

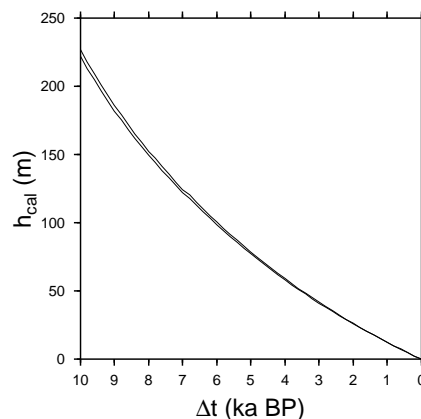


Abb. 6.12: Berechnete Landhebungskurve für Ångermanland für die beiden etwa 35 km auseinander liegenden Beobachtungspunkte

Västerbotten (Renberg & Segerström, 1981) beruhen auf der Warvenmethode (Hörnsten, 1970). Diese ist zwar unabhängig von der ^{14}C -Zeitskala, aber verschiedene Fehler (z.B. verlorengangene Warven) machen auch bei der Warvenchronologie eine Korrektur erforderlich (z.B. Wenner, 1968; Fromm, 1970; Tauber, 1970). Diese wurde für die beiden genannten Orte von Cato (1987, 1992) bzw. (Renberg & Segerström, 1981) vorgenommen. Weil in den Warven Schwedens (für die Warven Nordamerikas gilt dies nicht (Bucha *et al.*, 1970)) zu wenig karbonathaltiges Material enthalten ist, ist es nicht möglich, die Warvenmethode mit der ^{14}C -Methode zu kalibrieren.

Um einen Wert für die Güte einer Anpassung zu erhalten, wird ein Anpassungsparameter ϵ definiert (z.B. Körnig & Müller, 1989):

$$\epsilon(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(\frac{h_{\text{obs}}(\theta, \varphi, \Delta t_i) - h_{\text{cal}}(\theta, \varphi, \Delta t_i)}{\delta h(\Delta t_i)} \right)^2}, \quad (6.7)$$

wobei i den Meßwert (zu einem bestimmten Zeitpunkt) und I die Anzahl der Meßwerte bezeichnet. Die geographische Verteilung der Landhebungskurven ist ungleichmäßig, daher werden die Landhebungskurven in zwölf Regionen zusammengefaßt, für die gemäß (6.8) jeweils ein durchschnittlicher regionaler Anpassungsparameter ϵ_R bestimmt wird. Bei der Einteilung der Regionen werden die die Geometrie des Eisschildes und die geographische Lage berücksichtigt. Jeweils drei Regionen lassen sich einem bestimmten Bereich des Eisschildes zuordnen. Tab. 6.3 beschreibt, für welche Regionen jeweils ein regionaler Anpassungsparameter ϵ_R gebildet wird. In Abb. 6.14 ist die Einteilung graphisch dargestellt.⁷ Nachdem zwölf regionale Anpassungsparameter gebildet sind, wird aus diesen der



Abb. 6.14: Bereichseinteilung der Orte mit Landhebungskurven.

⁷Für die drei Orte Skvarran, Torsburgen und Hangassuo liegen Beobachtungswerte ausschließlich in dem Zeitabschnitt des Baltischen Eissees vor, so daß diese bei der Interpretation nicht berücksichtigt werden.

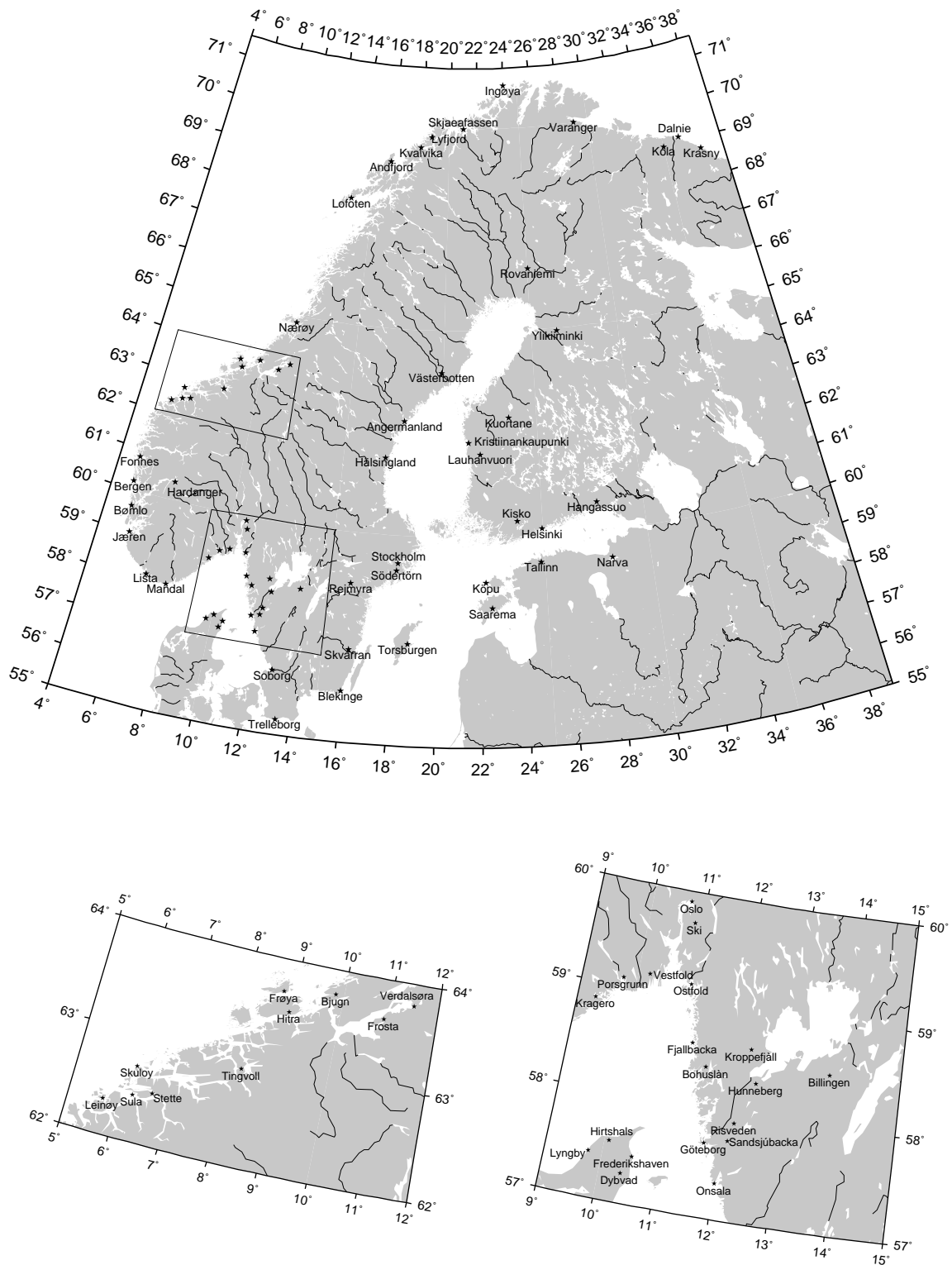


Abb. 6.13: Position von Orten mit Landhebungskurven.

Geometrie des Eisschildes	Region	Geographische Lage
südöstliche Eisrandlage	1	Estland (Tallinn), Südfinnland (Helsinki)
	2	Südschweden (Blekinge)
	3	Dänemark (Frederikshaven)
nordwestliche Eisrandlage	4	südwestliche norwegische Nordseeküste (Jaeren)
	5	zentralnorwegische Nordmeerküste (Tingvoll)
	6	Nord-Norwegen und Kola Halbinsel (Varanger)
nördlicher Eisdom	7	westliches Zentralfinnland (Kristiinankaupunki)
	8	Nordfinnland (Rovaniemi)
	9	Ostschweden (Ångermanland)
südlicher Eisdom	10	südöstliches Schweden (Stockholm)
	11	südwestliches Schweden (Göteborg)
	12	Oslofjord (Oslo)

Tab. 6.3: Bereichseinteilung der Landhebungskurven der Geometrie des Eisschildes und der geographischen Lage; es wird jeweils ein repräsentativer Ort angegeben.

Mittelwert berechnet, um einen ortsunabhängigen Anpassungsparameter $\bar{\epsilon}$ für die Güte der Anpassung der Strandlinien zu erhalten. Formal läßt sich dies schreiben als:

$$\bar{\epsilon} := \frac{1}{12} \sum_{R=1}^{12} \epsilon_R, \quad \epsilon_R := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \epsilon_k(\theta, \varphi), \quad (6.8)$$

wobei K die Anzahl der Landhebungskurven pro Region ist. Je kleiner $\bar{\epsilon}$, um so besser ist die Anpassung.

6.2.2 Landhebungsgeschwindigkeit

Die Landhebungsgeschwindigkeit in Fennoskandien zwischen 1892 AD und 1991 AD beträgt bis zu 9 mm/a. Die Darstellung in Abb. 6.15 beruht auf der Interpolation der in Abb. 6.17 gezeigten Beobachtungsorte; die zugehörigen Daten sind in Anhang D.2 tabelliert (Ekman, 1996, 1998; Pan & Sjöberg, 1999). Für die Interpretation der Daten ist es nötig, die Werte für die in Abb. 6.17 aufgeführten Orte mit den berechneten Werten in dem betrachteten Zeitraum in Beziehung zu setzen:

$$\underbrace{\dot{h}_{\text{RSL}}(\theta, \varphi) + \dot{e}_{\text{eu}}}_{\dot{h}_{\text{obs}}(\theta, \varphi)} = \underbrace{-\dot{h}_{\text{u}}(\theta, \varphi) + \dot{h}_{\text{e}}(\theta, \varphi)}_{\dot{h}_{\text{cal}}(\theta, \varphi)}. \quad (6.9)$$

Die von Ekman (1996) angegebenen Werte für \dot{h}_{RSL} beziehen sich auf den Zeitraum zwischen 1892 AD und 1991 AD, daher gilt:

$$\dot{h}_{\text{u}}(\theta, \varphi) := \frac{u_r(\theta, \varphi, t = 1991 \text{ AD}) - u_r(\theta, \varphi, t = 1892 \text{ AD})}{100 \text{ a}}, \quad (6.10)$$

$$\dot{h}_{\text{e}}(\theta, \varphi) := \frac{e_r(\theta, \varphi, t = 1991 \text{ AD}) - e_r(\theta, \varphi, t = 1892 \text{ AD})}{100 \text{ a}}. \quad (6.11)$$

In dieser Arbeit werden keine absoluten Landhebungsgeschwindigkeiten aus GPS-Kampagnen berücksichtigt, da die Beobachtungsfehler ($\approx \pm 3.70$ mm/a) dieser Messungen noch deutlich größer sind als die aus den hier verwendeten Pegelmessungen ($\approx \pm 0.30$ mm/a) (Pan & Sjöberg,

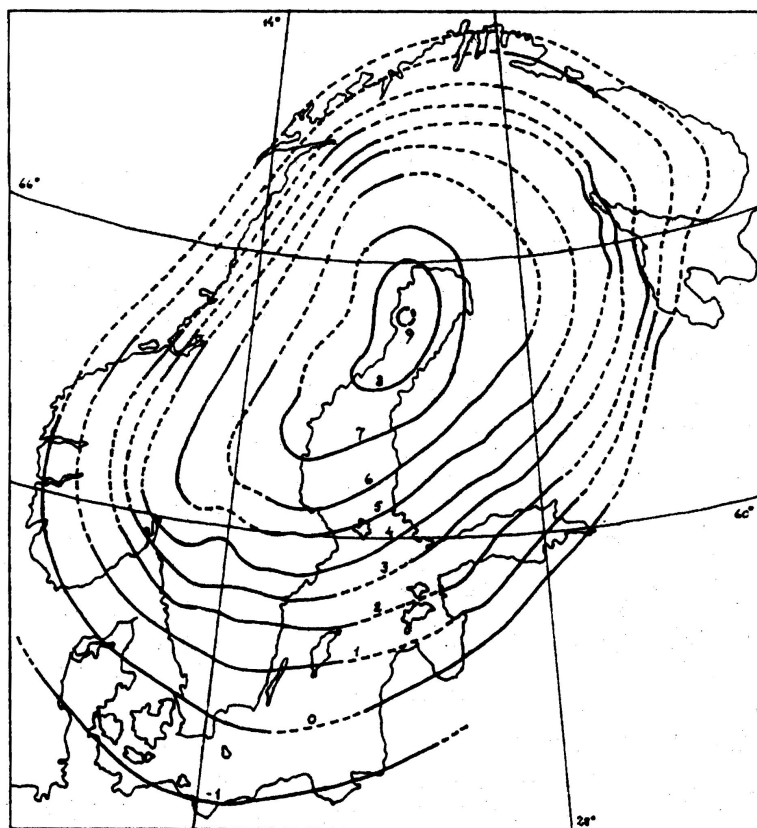


Abb. 6.15: Landhebungsgeschwindigkeit in mm/a für Fennoskandien und den Zeitraum 1892–1991 AD nach Ekman (1996).

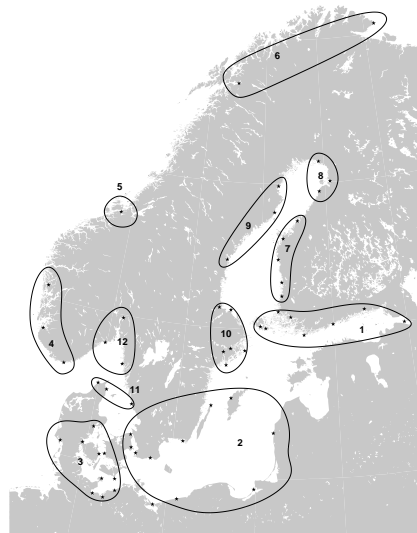


Abb. 6.16: Bereichseinteilung der Orte mit Daten zur Landhebungsgeschwindigkeit.

1999). Landhebungsgeschwindigkeiten, die auf Wiederholungsniveauments in Finnland beruhen (Mäkinen & Saaranen, 1998), werden in dieser Arbeit ebenfalls nicht berücksichtigt, da diese nur die Angaben über die Änderung der Landhebungsgeschwindigkeit zwischen zwei (oder mehr) Orten machen.

Ekman (2000) beschrieb, wie die Geschwindigkeit des eustatischen Meeresspiegelanstiegs \dot{e}_{eu} bestimmt werden kann und verglich die Abschätzungen. Nach Lambeck *et al.* (1998a) beträgt der eustatische Meeresspiegelanstieg 1.05 ± 0.25 mm/a, nach Nakiboglu & Lambeck (1991) 1.15 ± 0.38 mm/a. Der hier verwendete gewichtete Mittelwert dieser beiden Werte beträgt 1.09 ± 0.30 mm/a. Aus den Unsicherheiten für die Pegelmessungen und dem eustatischen Meeresspiegelanstieg ergibt sich die Gesamtunsicherheit für die Landhebungsgeschwindigkeit zu 0.6 mm/a. Die Definition des Anpassungsparameters lautet:

$$\dot{\epsilon}(\theta, \varphi) := \frac{\dot{h}_{obs}(\theta, \varphi) - \dot{h}_{cal}(\theta, \varphi)}{0.6 \text{ mm/a}}. \quad (6.12)$$

Die Verteilung der Orte mit Daten zur Landhebungsgeschwindigkeit ist nicht gleichmäßig. Deswegen wird auch hier eine regionale Mittelung vorgenommen. Wie schon in Abschnitt 6.2.1 werden die Beobachtungsorte in zwölf Regionen zusammengefasst, für die dann ein durchschnittlicher regionaler Anpassungsparameter $\bar{\epsilon}_R$ bestimmt wird. Abb. 6.16 zeigt die vorgenommene Einteilung, die sich an der in Abschnitt 6.2.1 orientiert. Den ortsunabhängigen Anpassungsparameter

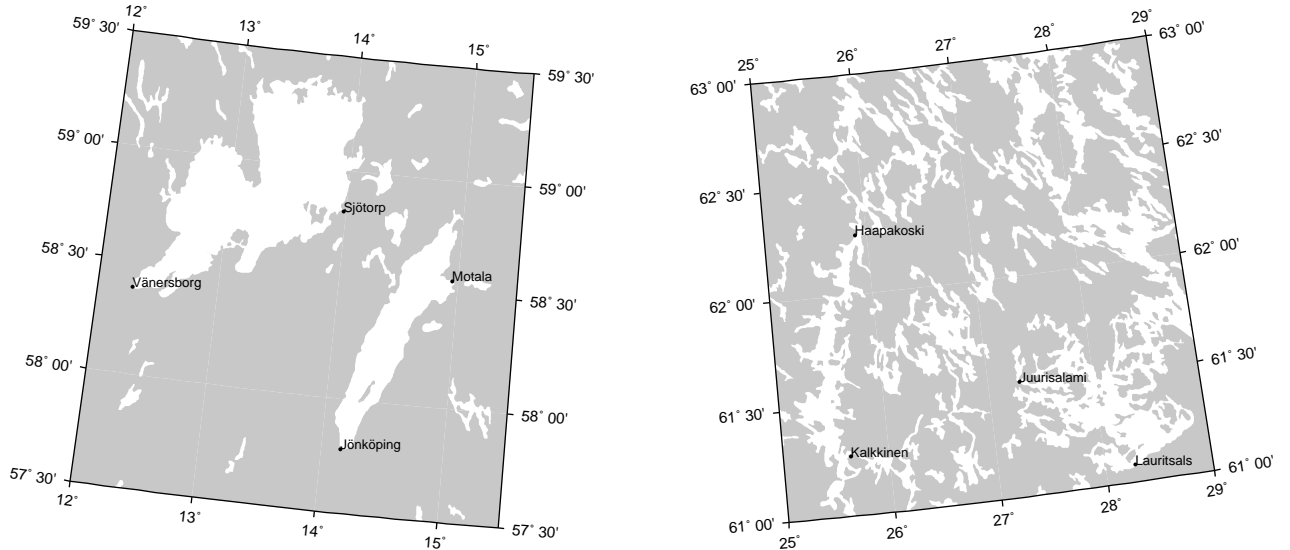


Abb. 6.18: Positionen von Orten für die Messung der Neigungsänderung (vgl. Tab. 6.4).

$\bar{\epsilon}$ erhält man durch erneute Mittelwertbildung:

$$\bar{\epsilon} := \frac{1}{12} \sum_{R=1}^{12} \bar{\epsilon}_R, \quad \bar{\epsilon}_R := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \dot{\epsilon}_k(\theta, \varphi), \quad (6.13)$$

wobei K die Anzahl der Beobachtungsorte pro Region ist.

6.2.3 Neigungsänderung

Zwei Orte, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit heben, neigen sich im Laufe der Zeit zueinander. Um diesen Effekt zu messen, muß zwischen diesen Orten ein hinreichend großer Abstand liegen. Wenn beide Orte an einem Binnensee liegen, so erhält man durch die ebene Wasseroberfläche einen guten Bezugspunkt zur Messung der radialen Verschiebung. Für jeweils zwei Seen in Südschweden und Südfinnland liegen solche Messungen vor (Ekman, 1996). In Tab. 6.4 sind die Namen der Seen, der Beobachtungsstationen, deren Positionen, deren Abstand zueinander und deren relative Landhebung verzeichnet; Abb. 6.17 und 6.18 zeigen die Lage der Seen in Schweden bzw. Finnland. Die gemessene Änderung der Neigungsänderung $\Delta \dot{h}_{\text{obs}}^{\text{lake}}$ wird mit der berechneten⁸

$$\Delta \dot{h}_{\text{cal}}^{\text{lake}} := \frac{[u_r(\theta_N, \varphi_N, t=1991 \text{ AD}) - u_r(\theta_N, \varphi_N, 1892 \text{ AD})] - [u_r(\theta_S, \varphi_S, t=1991 \text{ AD}) - u_r(\theta_S, \varphi_S, 1892 \text{ AD})]}{99 \text{ a}}, \quad (6.14)$$

über den den Anpassungsparameter in Beziehung gesetzt:

$$\dot{\epsilon}^{\text{lake}} := \frac{\Delta \dot{h}_{\text{obs}}^{\text{lake}} - \Delta \dot{h}_{\text{cal}}^{\text{lake}}}{0.1 \text{ mm/a}}, \quad (6.15)$$

Eine regionale Einteilung erfolgt in zwei Bereiche (Südschweden und Südfinnland), der ortsunabhängige Anpassungsparameter $\overline{\epsilon}^{\text{lake}}$ für die Neigungsänderung ist definiert durch:

$$\overline{\epsilon}^{\text{lake}} := \frac{1}{2} \sum_{R=1}^2 \overline{\epsilon}_R^{\text{lake}}, \quad \overline{\epsilon}_R^{\text{lake}} := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \dot{\epsilon}_k^{\text{lake}}. \quad (6.16)$$

⁸Die Indizes N und S jeweils für das nördliche bzw. südliche Ende eines der Seen stehen.

Lake	Station	Distance (km)	Relative uplift rate (mm/a)
Vänern	Sjötorp (58.82°N, 13.98°E)	110	0.74±0.10
	Vänersborg (58.38°N, 12.29°E)		
Vättern	Motala (58.56°N, 14.95°E)	100	1.62±0.10
	Jönköping (57.78°N, 14.16°E)		
Päijänne	Haapakoski (62.27°N, 25.84°E)	110	1.08±0.10
	Kalkkinen (61.27°N, 25.64°E)		
Saimaa	Juurisalami (61.52°N, 27.30°E)	70	0.64±0.10
	Lauritsala (61.08°N, 28.28°E)		

Tab. 6.4: Stationen zur Messung der relativen Landhebung an Binnenseen in Schweden bzw. Finnland.

6.2.4 Schwereänderung

Seit 1966 werden in Fennoskandien relative Schweremessungen entlang von vier Breitengraden durchgeführt (Mäkinen *et al.*, 1986). Jedoch sind nur die Orte entlang 63°N regelmäßig vermessen worden (Ekman *et al.*, 1987; Ekman, 1991b; Ekman & Mäkinen, 1996). Nach der jüngsten Veröffentlichung von Mäkinen *et al.* (2000) beträgt die relative Schwereänderung zwischen Vägstanda und Kramfors $\Delta\dot{g}_{\text{obs}}^{\text{West}} = -1.066 \pm 0.337 \mu\text{gal/a}$ und zwischen Vaasa und Joensuu $\Delta\dot{g}_{\text{obs}}^{\text{East}} = 0.838 \pm 0.117 \mu\text{gal/a}$ (Abb. 6.19). Die berechneten relativen Schwereänderungsraten⁹

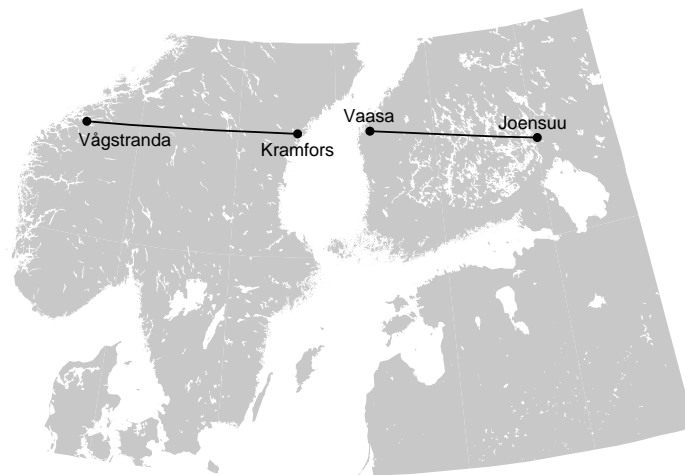


Abb. 6.19: Position der Endpunkte der beiden Abschnitte des 63°N-Schwereprofils.

sind wie folgt definiert:

$$\Delta\dot{g}_{\text{cal}}^{\text{West}} := \frac{[g_{\text{Kra}}^{(\delta)}(t=2000 \text{ AD}) - g_{\text{Kra}}^{(\delta)}(t=1966 \text{ AD})] - [g_{\text{Väg}}^{(\delta)}(t=2000 \text{ AD}) - g_{\text{Väg}}^{(\delta)}(t=1966 \text{ AD})]}{44 \text{ a}}, \quad (6.17)$$

⁹Hier ist anzumerken, daß sich die gemessene Schwerkraft aus der Gravitationsbeschleunigung und der Zentrifugalkraft zusammensetzt. Da die Zentrifugalkraft an den jeweiligen Orten für die Dauer der vorgenommenen Messungen jedoch als konstant angesehen werden kann und nur differenzielle Werte betrachtet werden, kann dieser Unterschied vernachlässigt werden.

$$\Delta \dot{g}_{\text{cal}}^{\text{East}} := \frac{[g_{\text{Joe}}^{(\delta)}(t=2000 \text{ AD}) - g_{\text{Joe}}^{(\delta)}(t=1966 \text{ AD})] - [g_{\text{Vaa}}^{(\delta)}(t=2000 \text{ AD}) - g_{\text{Vaa}}^{(\delta)}(t=1966 \text{ AD})]}{44 \text{ a}}. \quad (6.18)$$

Für den westlichen und östlichen Abschnitt wird je ein Anpassungsparameter definiert:

$$\dot{\epsilon}^{\text{West|East}} := \frac{\Delta \dot{g}_{\text{obs}}^{\text{West|East}} - \Delta \dot{g}_{\text{cal}}^{\text{West|East}}}{\delta g^{\text{West|East}}}, \quad (6.19)$$

wobei $\delta \dot{g}_{\text{obs}}^{\text{West}} = 0.337 \mu\text{gal/a}$ und $\delta \dot{g}_{\text{obs}}^{\text{East}} = 0.117 \mu\text{gal/a}$ ist. Der ortsunabhängige Anpassungsparameter $\overline{\dot{\epsilon}^{\text{grav}}}$ für die relative Schwereänderungsrate ist definiert durch

$$\overline{\dot{\epsilon}^{\text{grav}}} := \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}^{\text{West}} + \dot{\epsilon}^{\text{East}}). \quad (6.20)$$

6.2.5 Tangentialbewegung

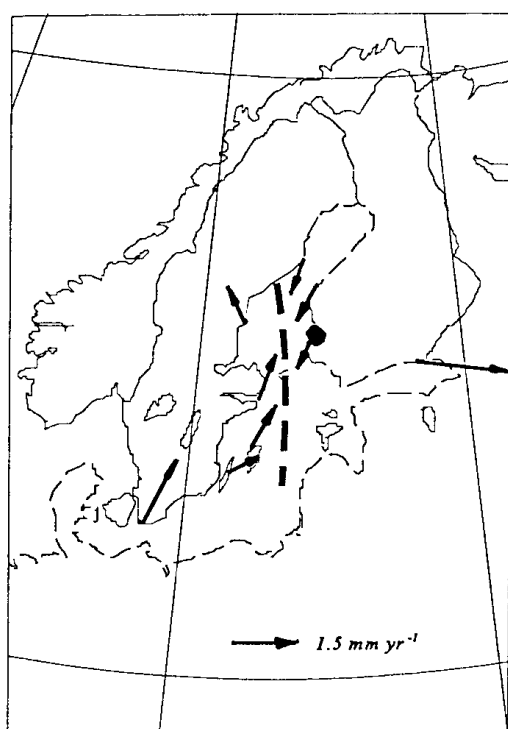


Abb. 6.20: Tangentiale Krustenbewegung nach Pan & Sjöberg (1999)

Seit einiger Zeit ist es auch möglich, Tangentialbewegungen der Erdoberfläche zu messen. Die bisher verfügbaren Daten sind allerdings noch nicht sehr genau und zudem von Plattenbewegungen überlagert, deren Ursache nicht in der glazialen Isostasie liegen. Daher werden diese Daten hier nicht zur Interpretation herangezogen. Abb. 6.20 zeigt die relative Tangentialgeschwindigkeit, die nach der Subtraktion der globalen Bewegung ($21 \pm 3 \text{ mm/a}$) übrigbleibt (Pan & Sjöberg, 1999).

6.3 Erdmodell

Für die hier durchgeführte Inversionsrechnung wird ein sphärisches, selbstgravitierendes, kompressibles (lokal inkompressibles) Erdmodell verwendet. Es besteht aus sieben elastischen und

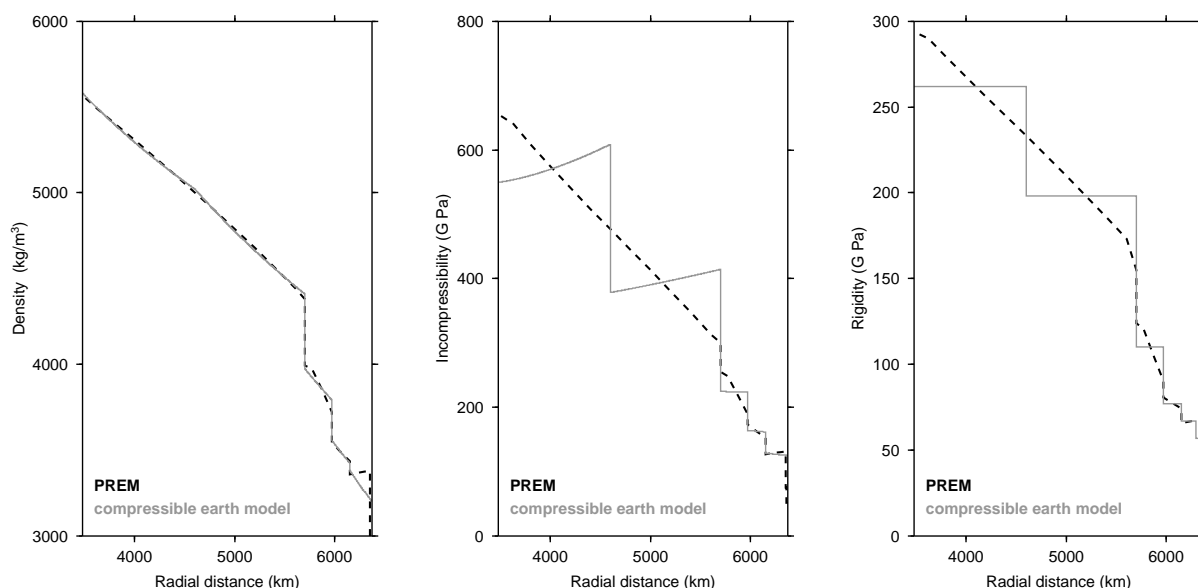


Abb. 6.21: Dichte, Inkompressibilität und Schermodul des verwendeten Erdmodells.

vier (Maxwell-)viskoelastischen Schichten. In Tab. 6.5 sind die Parameter des Erdmodells angegeben, Abb. 6.21 zeigt die elastischen Parameter des Erdmodells im Vergleich zu PREM. Der Verlauf der Inkompressibilität liegt darin begründet, daß diese im lokal inkompressiblen Erdmodell nicht frei gewählt werden kann, sondern gemäß (2.58) durch die Beziehung $\kappa = r\rho(r)g(r)\beta^{-1}$ vorgegeben ist.

Schicht	r (km)	ρ_{top} (kg/m ³)	ρ_{bottom} (kg/m ³)	β	μ (Pa)	η (Pa·s)
7	6371	3196	3261	1.60	0.57×10^{11}	∞
6	$6371 - h_1$	3261	3380	1.60	0.67×10^{11}	η_{as}
5	6151	3422	3556	1.29	0.77×10^{11}	η_{um}
4	5971	3792	3974	1.01	1.10×10^{11}	η_{um}
3	5701	4410	5024	0.61	1.98×10^{11}	η_{lm}
2	4600	5023	5581	0.38	2.62×10^{11}	η_{lm}
1	3480	10982	10982	0	0	0

Tab. 6.5: Parameter des siebenschichtigen Erdmodells. h_1 ist die Lithosphärenmächtigkeit, η_{as} die Asthenosphärenviskosität und η_{um} und η_{lm} die Viskosität des oberen bzw. des unteren Mantels.

Als freie Parameter werden die Lithosphärenmächtigkeit h_1 und die Viskositäten des unteren Mantels, η_{lm} , und des oberen Mantels, η_{um} , betrachtet, wobei die Asthenosphärenviskosität η_{as} zunächst mit der Viskosität des oberen Mantels übereinstimmt. Zusätzlich wird die Mächtigkeit des Eisschildes mit dem Parameter ζ skaliert, so daß vier freie Parameter verwendet werden.

Ist das Erdmodell gefunden, das die Beobachtungsdaten am besten anpaßt, so wird für dieses Modell die Asthenosphärenviskosität als zusätzlicher freier Parameter verwendet, um zu überprüfen, ob eine Verbesserung der Anpassung erreicht werden kann.

6.4 Interpretation

Um die Beobachtungsdaten anzupassen, werden zunächst für jedes Erdmodell gemäß (6.8), (6.13), (6.16) und (6.20) die Anpassungsparameter der Landhebung, $\bar{\epsilon}$, der Landhebungsgeschwindigkeit $\bar{\dot{\epsilon}}$, der Neigungsänderung entlang von Binnenseen $\overline{\dot{\epsilon}^{\text{lake}}}$ und der relativen Schwereänderung $\overline{\dot{\epsilon}^{\text{grav}}}$ für verschiedene Skalierungsparameter ς der Last berechnet, entsprechend der jeweiligen Anzahl der Regionen gewichtet und in einem einzigen Anpassungsparameter ϵ zusammengefaßt:

$$\epsilon := \frac{1}{14} (6 \bar{\epsilon} + 6 \bar{\dot{\epsilon}} + \overline{\dot{\epsilon}^{\text{lake}}} + \overline{\dot{\epsilon}^{\text{grav}}}). \quad (6.21)$$

Anschließend wird für jedes Erdmodell der Skalierungsparameter bestimmt, bei dem ϵ den kleinsten Wert annimmt. Die Abb. 6.22–6.26 zeigen auf der linken Seite für verschiedene Viskositäten des unteren Mantels, η_{lm} , jeweils den Skalierungsparameter ς (gestrichelt) und den korrespondierenden Anpassungsparameter ϵ (durchgezogen). Rechts sind jeweils die vier Anpassungsparameter $\bar{\epsilon}$, $\bar{\dot{\epsilon}}$, $\overline{\dot{\epsilon}^{\text{lake}}}$ und $\overline{\dot{\epsilon}^{\text{grav}}}$ dargestellt, die mit dem ϵ der linken Abbildung über (6.21) verknüpft sind. Es wird jeweils nur die Konturlinie für den niedrigsten Anpassungsparameter. Dieses Verfahren wird für Erdmodelle mit zwei viskoelastischen Schichten (oberer Mantel, unterer Mantel) sowohl für die Eismodelle W-ICE-3 und W-SCAN-2 durchgeführt.

6.4.1 Erdmodelle mit zwei viskoelastischen Schichten

Abb. 6.22 und 6.23 zeigen die Anpassungsparameter für Erdmodelle mit zwei viskoelastischen Schichten und für Eismodell W-ICE-3, Abb. 6.24 und 6.25 für dieselben Erdmodelle und für Eismodell W-SCAN-2.

Es ist klar ersichtlich, daß sich die Beobachtungsdaten mit dem Eismodell W-SCAN-2 wesentlich besser ($\epsilon \lesssim 1.05$) als mit W-ICE-3 ($\epsilon \lesssim 1.70$) anpassen lassen. Vergleicht man dieses Ergebnis, mit den Unterschieden zwischen den beiden Eismodellen (Abschnitt 6.1.4), so zeigt sich in welchen Bereichen Verbesserungen an W-ICE-3 vorzunehmen sind. Aufgrund der Überlegenheit von W-SCAN-2 wird im folgenden nur noch auf die Ergebnisse, die dieses Modell liefert eingegangen.

Den kleinsten Wert, der mit W-SCAN-2 erreicht werden kann ist $\epsilon \lesssim 1.05$. Die Viskositäten des unteren bzw. oberen Mantels betragen für die entsprechenden Erdmodelle etwa $\eta_{\text{lm}} = 0.2$ bis 0.4×10^{22} Pa.s bzw. $\eta_{\text{um}} = 0.45$ bis 0.66×10^{21} Pa.s. Die Lithosphärenmächtigkeit beträgt 50 – 80 km. Die Parameter sind am Ende von Tab. 6.6 zusammengefaßt. Betrachtet man die Anpassung der einzelnen Arten von Beobachtungsdaten (Abb. 6.22–6.25, rechte Seite), so stellt man fest, daß sich die heutige Landhebungsgeschwindigkeit etwas besser anpassen läßt ($\bar{\dot{\epsilon}} \lesssim 0.85$), als die Landhebung ($\bar{\epsilon} \lesssim 1.05$); die Parameterräume, die die jeweils beste Anpassung erlauben liegen dicht beieinander. Deutlich schlechter läßt sich die Neigungsänderung an den Binnenseen anpassen ($\overline{\dot{\epsilon}^{\text{lake}}} \lesssim 1.8$). Da dieser Parameter gemäß (6.21) jedoch nicht so stark gewichtet wird, hat dies nur unerheblichen Einfluß auf das Gesamtergebnis. Betrachtet man die Anpassung der Schwereänderung, so fällt auf, daß diese sehr stark von der Viskosität des unteren Mantels abhängt; je niedriger diese ist, um so besser ist die Anpassung. Bei der Viskosität des unteren Mantels, für die die anderen Parameter akzeptabel angepaßt werden können (also $\epsilon \lesssim 1.05$ gilt), gilt $\overline{\dot{\epsilon}^{\text{grav}}} \lesssim 0.65$.

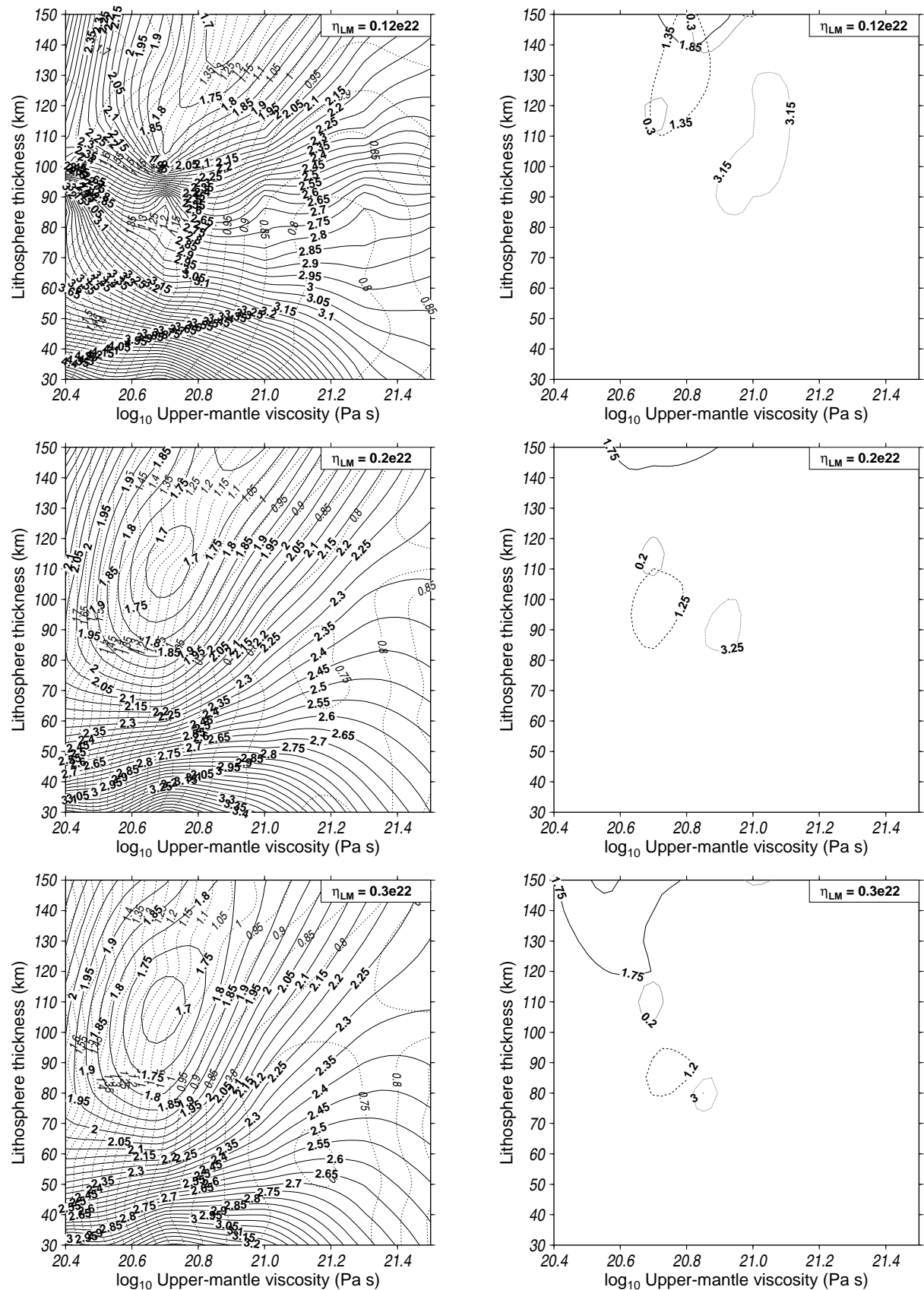


Abb. 6.22: Anpassungsparameter für verschiedene Viskositäten des unteren Mantels und Eismodell W-ICE-3. Links: ε (durchgezogen) und zugehöriger Skalierungsparameter ζ (gepunktet). Rechts: $\bar{\varepsilon}$ (durchgezogen), $\bar{\varepsilon}$ (gestrichelt), $\bar{\varepsilon}^{lake}$ (gepunktet) und $\bar{\varepsilon}^{grav}$ (grau).

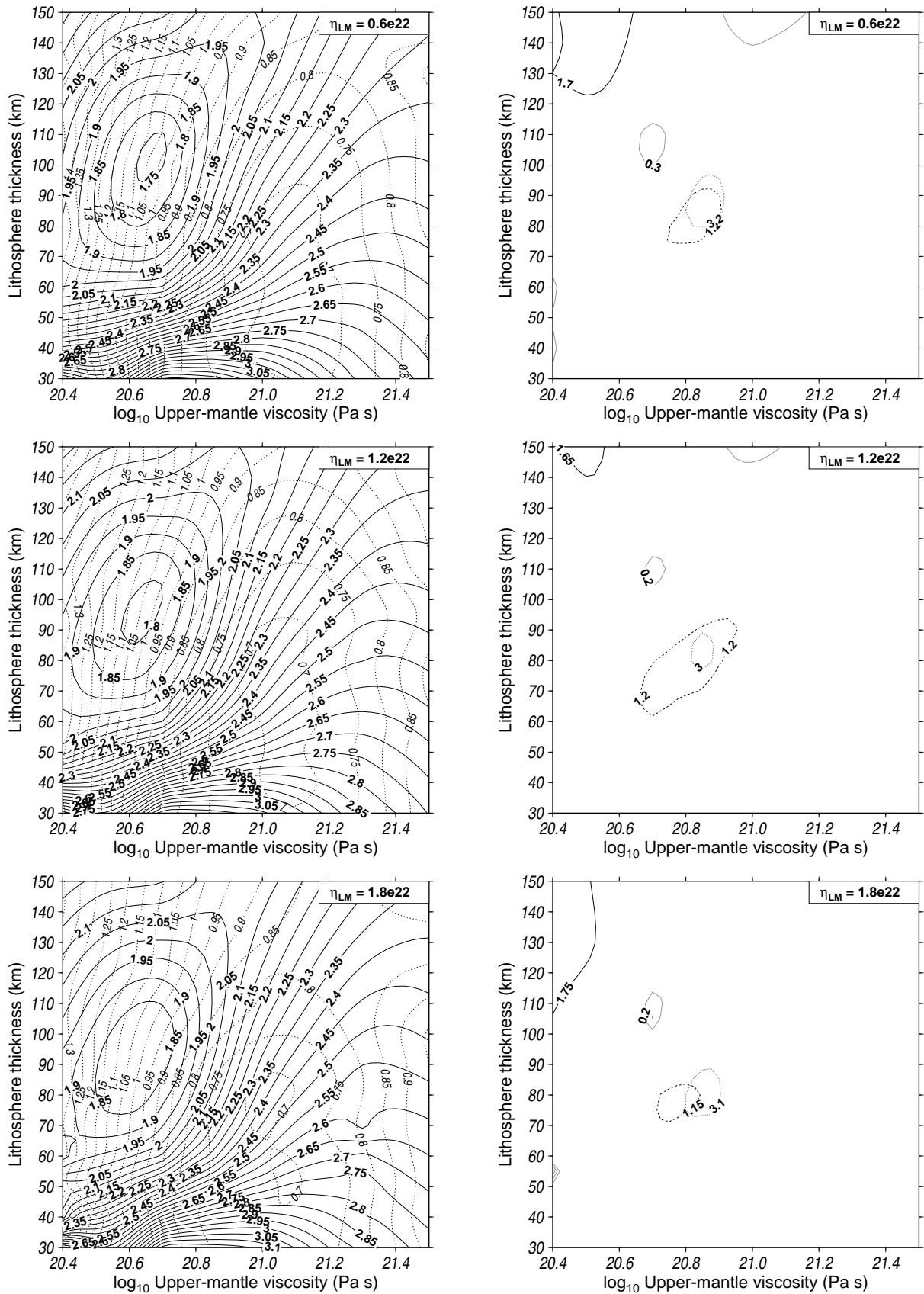


Abb. 6.23: Wie Abb. 6.22, jedoch für andere Viskositäten des unteren Mantels.

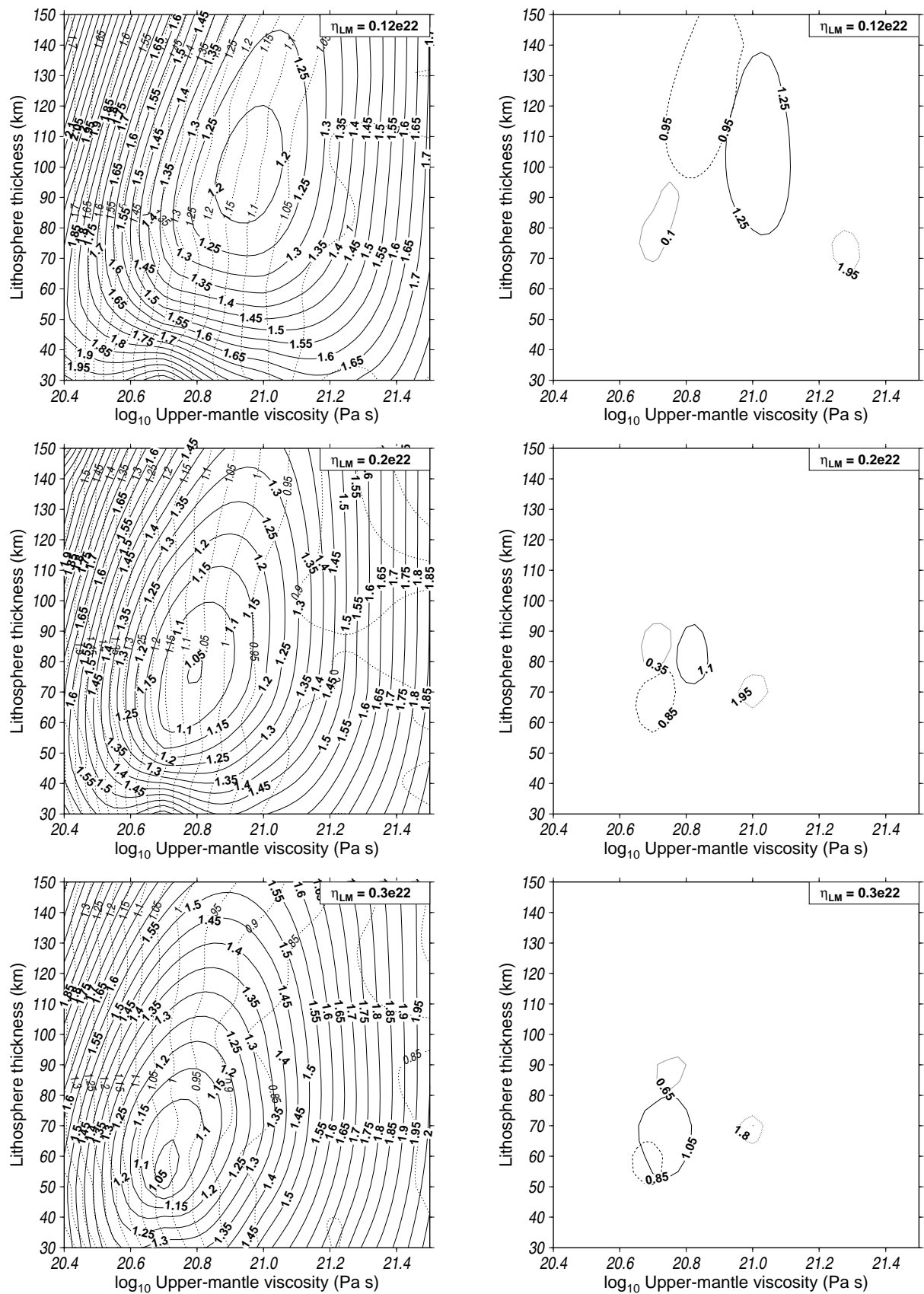


Abb. 6.24: Wie Abb. 6.22, jedoch für Eismodell W-SCAN-2.

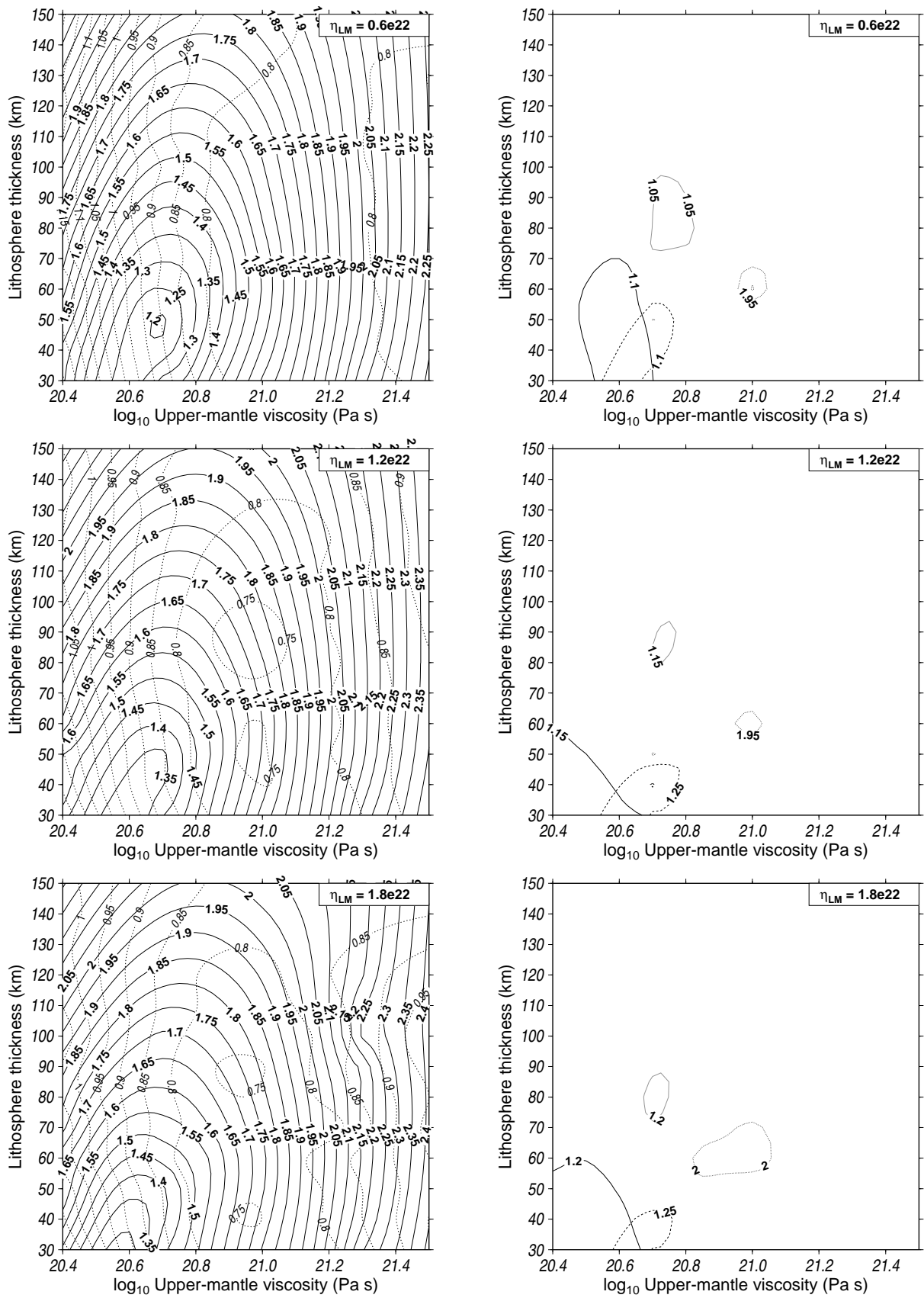


Abb. 6.25: Wie Abb. 6.22, jedoch für Eismodell W-SCAN-2 und andere Viskositäten des unteren Mantels.

Der Skalierungsparameter ζ liegt für akzeptable Anpassungen der Beobachtungsdaten zwischen 0.95 und 1.10. Multipliziert man diese Werte mit der maximalen Mächtigkeit von W-SCAN-2, so beträgt die Lastmächtigkeit des Fennoskandischen Eisschildes zum letzten glazialen Maximum 1760 bis 2050 m.

6.4.2 Erdmodelle mit drei viskoelastischen Schichten

In diesem Abschnitt kommt ein weiterer freier Parameter, die Asthenosphärenviskosität, hinzu. Es wird untersucht, ob sich durch Hinzufügen einer weiteren viskoelastischen Schicht (der Asthenosphäre) die Beobachtungsdaten besser anpassen lassen als mit zwei viskoelastischen Schichten. Dazu wird ein Erdmodell mit festen Viskositäten des unteren und oberen Mantels und freier Asthenosphärenviskosität und Lithosphärenmächtigkeit gerechnet. Für die Viskosität des unteren Mantels wird dabei der Wert 0.3×10^{22} Pa s, für die des oberen Mantels der Wert 0.6×10^{20} Pa s genommen. Im vorangehenden Abschnitt hat sich gezeigt, daß diese Werte gut geeignet ist, die Beobachtungsdaten anzupassen.

Die Ergebnisse sind in Abb. 6.26 dargestellt. Betrachtet man die einzelnen Anpassungsparameter, so stellt man fest, daß sich die Landhebung geringfügig besser ($\bar{\epsilon} \lesssim 1.00$ statt 1.05), die Landhebungsgeschwindigkeit geringfügig schlechter ($\bar{\epsilon} \lesssim 0.95$ statt 0.85) anpassen läßt. Die Anpassung der Neigungsänderung ist deutlich schlechter ($\bar{\epsilon}^{\text{lake}} \lesssim 2.15$ statt 1.80), die Anpassung der Schweredaten dagegen deutlich besser ($\bar{\epsilon}^{\text{grav}} \lesssim 0.20$ statt 0.65). Insgesamt ist jedoch der minimale Anpassungsparameter $\epsilon \lesssim 1.05$ identisch mit dem, der mit nur zwei viskoelastischen Schichten erreicht werden kann. Dies bedeutet, daß durch die Asthenosphäre insgesamt keine wesentliche Verbesserung in der Anpassung erfolgt.

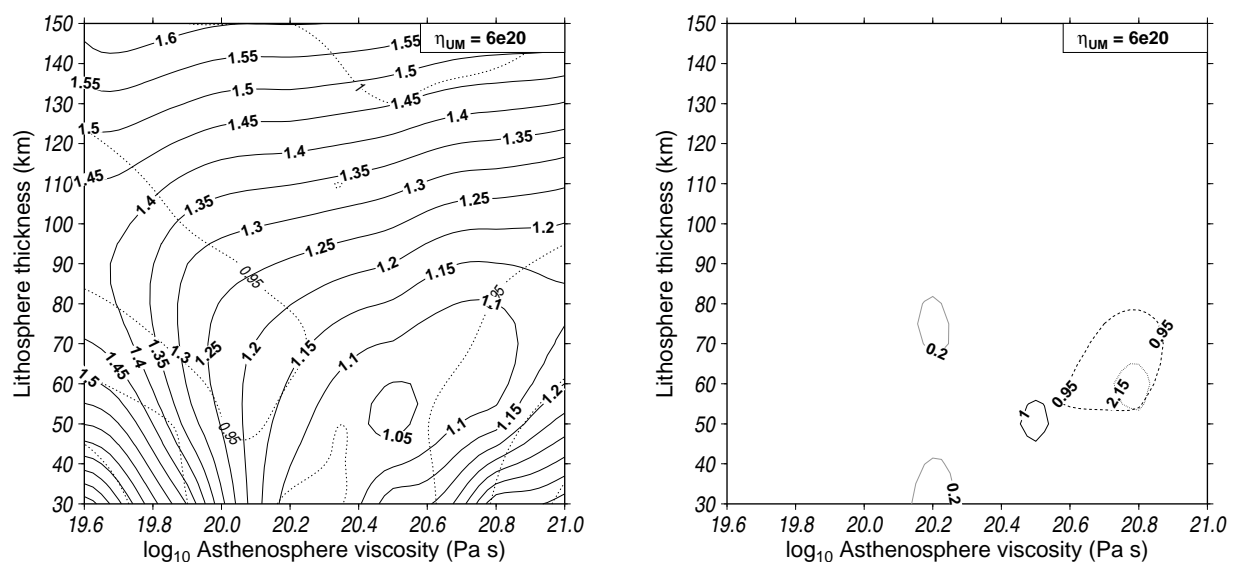


Abb. 6.26: Wie Abb. 6.22, jedoch für Erdmodelle mit Asthenosphäre und Eismodell W-SCAN-2. Die Viskosität des unteren Mantels beträgt 0.6×10^{22} Pa s.

6.5 Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

Zunächst ist festzustellen, daß es mit dem Eismodell W-SCAN-2 von Lambeck *et al.* (1998b) wesentlich besser gelingt, die Beobachtungsdaten zu interpretieren, als mit dem hier konstruierten Modell W-ICE-3. Aufgrund der verhältnismäßig einfachen Konstruktion von W-ICE-3 aus Ellipsen¹⁰ ist dieses Modell leicht erweiterbar und/oder auf andere Probleme übertragbar. Insbesondere die Topographie des fennoskandischen Gebirgszuges muß vermutlich gesondert berücksichtigt werden. Dies wird in dieser Arbeit jedoch nicht mehr durchgeführt. Die folgende Diskussion beschränkt sich daher auf die Resultate, die sich für das Eismodell W-SCAN-2 ergeben.

Tab. 6.6 stellt die Ergebnisse, die verwendeten Eismodelle und interpretierten Beobachtungsdaten für verschiedene Untersuchungen gegenüber. Besondere Beachtung verdienen die Arbeiten von Lambeck *et al.* (1998a,b) und Lambeck (1999), die das lokale Eismodell SCAN-2 verwenden, aus dem das hier verwendete W-SCAN-2 entwickelt ist (vgl. Abschnitt 6.1.3). Es zeigt sich, daß alle Arbeiten Lambecks und die hier vorliegende zu vergleichbaren Ergebnissen bezüglich der Lithosphärenmächtigkeit kommen. Die Viskosität des oberen Mantels ist jedoch nach den Ergebnissen dieses Kapitels mit etwa 0.55×10^{21} Pa.s um etwa 50% größer als dies in den Arbeiten Lambecks der Fall ist. Eine Erklärung dafür ist die Kalibrierung der Zeitskala: Das siderische Alter einer Strandlinie ist größer als das ¹⁴C Alter, daher muß die Relaxation etwas langsamer vonstatten gehen, was durch eine größere Viskosität des oberen Mantels erreicht wird.

Die Viskosität des unteren Mantels beträgt nach dieser Arbeit dagegen mit etwa 3×10^{21} Pa.s nur ein Drittel von der Viskosität, die in Lambecks Arbeiten angegeben wird. Dies bedeutet, daß die Viskositätsdiskontinuität entlang der Grenze zwischen den beiden Mantelschichten deutlich geringer ist. Dies stimmt mit den Folgerungen von Rubincam (1984) überein, der Meßdaten des Lageos Satelliten über die Polbewegung interpretiert hat. Er kommt zu dem Schluß, daß im gesamten Mantel eine Viskosität von etwa 1×10^{21} Pa.s herrscht und keine größere Diskontinuität vorliegt. Eine leichte Erhöhung der unteren Mantelviskosität ist zwar notwendig, um die post-glazialen Ausgleichsvorgänge in Fennoskandien zu interpretieren, doch die hier vorgenommenen Inversionen zeigen auch, daß sich die Schwereänderung mit einer geringeren Viskosität des unteren Mantels wesentlich besser anpassen läßt als mit einer hohen (vgl. Abschnitt 6.4.1), was für die These von Rubincam (1984) spricht. Sobald genauere Daten zur Schwereänderung vorliegen¹¹, lassen sich diese Ergebnisse weiter überprüfen.

Es ist anzumerken, daß außer der vorliegenden Arbeit nur Fjeldskaar & Cathles (1991) ¹⁴C-korrigierte Daten verwendet hat. Allerdings ist das verwendete Erdmodell fehlerhaft, da es den elastischen Anteil vom viskosen entkoppelt und die Lithosphäre nur als Filter verwendet (Wu, 1992; Mitrovica, 1997). Die Ergebnisse dieser Arbeit eignen sich daher nur eingeschränkt für Vergleiche. Ähnliches gilt für die hohe Lithosphärenmächtigkeit von Davis *et al.* (1999b), die von den Autoren einem „trade-off“ zwischen Asthenosphärenviskosität und Lithosphärenmächtigkeit zugeschrieben wird.

¹⁰Dazu sind nur die folgenden Parameter nötig: Anzahl der Ellipsen, geographische Lage der Ellipsenzentren, Länge der großen und kleinen Halbachsen, Drehung der großen Halbachsen gegen die Nord-Süd-Richtung und maximale Mächtigkeit im Zentrum. Zusätzlich muß noch einer von fünf möglichen Querschnitten gewählt werden, vgl. Anhang B.2.3.

¹¹Z.B. durch die gerade stattfindende GRACE-Mission (Tapley, 1997; Davis *et al.*, 1999a; Kaufmann, 2000; Adam, 2002)

Autor	Lithosphären- mächtigkeit		Asth.- viskosität	Asth.- mächtigkeit	Viskosität des oberen Mantels	Viskosität des unteren Mantels	La st - modell	Max. Eis- mächtigkeit		h_{RSL}	\dot{h}_{RSL}	Beobachtungsdaten ^a	
	(km)	(km)	(10 ¹⁹ Pa s)	(km)	(10 ²¹ Pa s)	(10 ²¹ Pa s)		(m)				Neigungsänderung	Schwereänderung
Wolf (1987)	< 80.53 – 12		100		1.0 – 2.0		WEICHSEL-1	2100	x	–	–	–	–
Lambeck <i>et al.</i> (1990)	100 – 150				0.3 – 0.5	2 – 7	ARC-3 ^b	85 – 95% of ICE-1	x	–	–	–	–
Fjeldskaar & Cathles (1991)	< 50	2.0	75		1.2			3400 ^c	–	x	–	–	–
Mitrovica & Peltier (1993)	70 – 145				0.37 – 0.45	1.9 – 2.2						Relaxation spectrum	
Fjeldskaar (1994)		< 7.0	25–100		0.7 – 1.0	1.0 – 2.0		2500 ^d	x	x	–	–	–
Mitovica (1997)	70	2	90		1.0			–					
Thoma (1997); Thoma & Wolf (1999)	50 – 90.81 – 4.5		100		1.00 – 1.9		WEICHSEL-2	1950 – 2650	x	x	–	–	–
Thoma & Wolf (1998)	< 80				0.31 – 0.46	> 2.0	WEICHSEL-2	2000 – 2350	x	x	–	–	–
Lambeck <i>et al.</i> (1998b)	65 – 85				0.31 – 0.41	6 – 13	SCAN-2	1850	x	–	–	–	–
Lambeck <i>et al.</i> (1998a)	65 – 110				0.3 – 0.5	5 – 30	SCAN-2	1850	–	x	x	–	–
Lambeck (1999)	40 – 80				0.25 – 0.45	7 – 15	SCAN-2	1850	x ^e	–	–	–	–
Davis <i>et al.</i> (1999)	149 – 160				0.72 – 1.47	1.14 – 4.04	ICE-3G ^f	60-90% ^g	–	x ^h	–	–	–
Wieczerkowski (1999)					0.5	6						Relaxation spectrum ⁱ	
Diese Arbeit	50 – 80	25 – 40	160 – 170		0.45 – 0.66	2 – 4	W-SCAN-2	1760–2150	x	x	x	x	x

Tab. 6.6: Vergleich der Ergebnisse verschiedener Autoren für Fennoskandien.

^a h_{RSL} : relative Meeresspiegeländerung, \dot{h}_{RSL} : Landhebungsgeschwindigkeit, Neigungsänderungen entlang von Binnenseen.

^bARC-3 ist von Nakada & Lambeck (1989), es handelt sich um eine Interpolation des Modells ICE-1 von Peltier & Andrews (1976).

^cEismodell von Andersen (1981).

^dSkalierung des Eismodells von Andersen (1981).

^eLambeck (1999) invertiert die Strandlinien, die während der Existenz des Baltischen Eissees gebildet wurden.

^fICE-3G stammt von Tushingham & Peltier (1991).

^gSkalierung des Eismodells ICE-3G.

^hEs wurden relative Landhebungsgeschwindigkeiten zu der Station Stockholm interpretiert.

ⁱDie invertierten Daten sind ¹⁴C-korrigiert.

In der kürzlich geführten Diskussion zwischen Fjeldskaar (2000) und Lambeck & Johnston (2000) über die Notwendigkeit einer Asthenosphäre kann diese Arbeit eine klare Aussage treffen: Die Existenz einer Asthenosphäre ist *nicht* notwendig, um die Gesamtheit der mit dem glazial-isostatischen Ausgleich in Fennoskandien verbundenen Beobachtungsdaten zu interpretieren. Zwar lassen sich einige Aspekte (Landhebung und Schwere) etwas besser mit Asthenosphäre anpassen, dafür erzielt man bei anderen (Landhebungsgeschwindigkeit und Neigungsänderungen) ohne Asthenosphäre bessere Ergebnisse. Dies stimmt auch mit der sehr einfachen Untersuchung von Thoma & Wolf (1999) überein, in der gezeigt wurde, daß eine Anpassung mit unterschiedlichen Viskositäten im unteren und oberen Mantel besser gelingt als mit einem Viskositätskontrast zwischen Mantel und Asthenosphäre. Somit kann auch die Aussage von Mitrovica & Peltier (1993), daß eine Asthenosphäre notwendig ist, wenn die Lithosphärenmächtigkeit unter 120 km sinkt, nicht bestätigt werden. Allerdings weist bereits Wolf (1996) darauf hin, daß die Daten, auf denen die Arbeit von Mitrovica & Peltier (1993) beruht, fehlerhaft sind. Die Ergebnisse von Wiczerkowski (1999); Wiczerkowski *et al.* (1999), die auf korrigierten Daten basiert, stimmen, was die Viskosität des oberen Mantels betrifft, mit den Ergebnissen dieser Arbeit gut überein.

Genauso wie alle neueren Arbeiten zeigt auch diese Arbeit, daß die Eislast deutlich dünner sein muß als die in dem Modell von Andersen (1981). Die meisten Untersuchungen deuten darauf hin, daß die Eislast in Fennoskandien zum letzten glazialen Maximum etwa 2000 m mächtig war.

Literaturverzeichnis

- Adam, D., 2002. Amazing grace. *Nature*, **416**, 10–11.
- Amelung, F. & Wolf, D., 1994. Viscoelastic perturbations of the earth: significance of the incremental gravitational force in models of glacial isostasy. *Geophysical Journal International*, **117**, 864–879.
- Andersen, B., 1981. Late Weichselian ice sheets in Eurasia and Greenland. In Denton, G. & Hughes, T., eds., *The Last Great Ice Sheets*, pp. 1–65. J. Wiley, New York.
- Andrews, J. T., 1982. On the reconstruction of Pleistocene ice sheets: a review. *Quaternary Science Reviews*, **51**, 1–30.
- Anundsen, K., 1985. Changes in shore-level and ice-front position in late Weichsel and Holocene, southern Norway. *Norsk Geografisk Tidsskrift*, **39**, 205–225.
- Åse, L.-E. & Bergström, E., 1982. The ancient shorelines of the Uppsala asker around Uppsala and the shore displacement. *Geografiska Annaler*, **64 A**, 229–244.
- Bamber, J. L. & Huybrechts, P., 1996. Geometric boundary conditions for modelling the velocity field of the Antarctic ice sheet. *Annals of Glaciology*, **23**, 364–373.
- Bard, E., Hamelin, B., Fairbanks, R. G. & Zindler, A., 1990. Calibration of the ¹⁴C timescale over the past 30,000 years using mass spectrometric U-Th ages from Barbados corals. *Nature*, **345**, 405–410.
- Berglund, B. E., 1964. The post-glacial shore displacement in eastern Blekinge, southeast Sweden. *Sveriges Geologiska Undersökning*, **599**, 1–47.
- Berglund, B. E., 1971. Littorina transgressions in Blekinge, south Sweden. A preliminary survey. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **93**, 625–652.
- Bergsten, F., 1954. The land uplift in Sweden from the evidence of the old water marks. *Geografiska Annaler*, **36**, 81–111.
- Björck, S. & Digerfeldt, G., 1986. Late Weichselian–early Holocene shore displacement west of Mt. Billingen, within the Middle Swedish end-moraine zone. *Boreas*, **15**, 1–18.
- Björck, S. & Digerfeldt, G., 1991. Allerød–Younger Dryas sea level change in southwestern Sweden and their relation to the Baltic Ice Lake development. *Boreas*, **20**, 115–133.
- Björck, S., 1995. A review of the history of the Baltic Sea, 13.0–8.0 ka BP. *Quaternary International*, **27**, 19–40.
- Björck, S. & Digerfeldt, G., 1982. Late Weichselian shore displacement at Hunnenberg, southern Sweden, indicating complex uplift. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **104**, 132–155.
- Bölling, K., Hagedoorn, J. M., Wolf, D. & Grafarend, E. W., 2001. *Berechnung eislastinduzierter Vertikalbewegungen und Geoidänderungen in Südostalaska mit Hilfe viskoelastischer Erdmodelle*. Technical Report STR01/08, GeoForschungsZentrum Potsdam.
- Boulton, G. S., Smith, G. D., Jones, A. S. & Newsome, J., 1985. Glacial geology and glaciology of the last mid-latitude ice sheets. *Journal of the Geological Society London*, **142**, 447–474.

- Breuer, D. & Wolf, D., 1995. Deglacial land emergence and lateral upper-mantle heterogeneity in the Svalbard Archipelago—I. First results for simple load models. *Geophysical Journal International*, **121**, 775–788.
- Bronstein, I. N. & Semendjajew, K. A., 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.
- Brook, E., Nesje, A., Lehman, S., Raisbeck, G. & Yiou, F., 1996. Cosmogenic nuclide exposure ages along a vertical transect in western Norway: implications for the height of the Fennoscandian ice sheet. *Geology*, **24**, 207–210.
- Bucha, V., Damon, P. E., Donner, J. J., Flint, R. F., Fromm, E., Johnson, F., Mörner, N.-A., Stuiver, M., Suess, H. E., Tauber, H., Vogel, J. C. & Wenner, C.-G., 1970. General discussion of C14 and varve chronology. In Olsson, I. U., ed., *Radiocarbon Variations and Absolute Chronology*, pp. 215–217. Almquist & Wiksell, Uppsala.
- Bullen, K. E., 1975. *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London.
- Bürger, S., Jacoby, W. R., Hagedoorn, J. & Wolf, D., 2002a. *Zeitliche Schwereänderungen und glazial-isostatische Ausgleichsbewegung am Vatnajökull, Südost-Island*. Mitteilungen der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, **1**, 2–10.
- Bürger, S., Jacoby, W. R., Hagedoorn, J. & Wolf, D., 2002b. *Zeitliche Schwereänderungen und glazial-isostatische Ausgleichsbewegung am Vatnajökull, Südost-Island*. Technical Report STR02/15, GeoForschungsZentrum Potsdam.
- Cara, M., 1994. *Geophysik*. Springer-Verlag, Berlin.
- Cathles, L. M., 1975. *The Viscosity of the Earth's Mantle*. Princeton University Press, Princeton.
- Cato, I., 1985. The definitive connection of the Swedish geochronological time scale with the present and the new date of the zero-year in Döviken, northern Sweden. *Boreas*, **14**, 117–122.
- Cato, I., 1987. On the definitive connection of the Swedish time scale with the present. *Sveriges Geologiska Undersökning*, **Ca 68**, 1–55.
- Cato, I., 1992. Shore displacement data based on lake isolations confirm the postglacial part of the Swedish geochronological time scale. *Sveriges Geologiska Undersökning*, **Ca 81**, 75–80.
- Chapell, J. & Shackleton, N. J., 1986. Oxygen isotopes and sea level. *Nature*, **324**, 137–140.
- Clark, J. A., Farrell, W. E. & Peltier, W. R., 1978. Global changes in postglacial sea level: a numerical calculation. *Quaternary Research*, **9**, 265–287.
- Darwin, G. H., 1884. On the figure of equilibrium of a planet of heterogeneous density. *Proceedings of the Royal Society of London*, **36**, 158–166.
- Davis, E., Dunn, C. E., Stanton, R. H. & Thomas, J. B., 1999a. *The GRACE Mission: Meeting the Technical Challenges*. Paper presented at the International Astronautical Congress. Amsterdam, Netherlands, IAF-99-B.2.05.
- Davis, J. L., Mitrovica, J. X., Scherneck, H.-G. & Fan, H., 1999b. Investigation of Fennoscandian glacial isostatic adjustment using modern sea level records. *Journal of Geophysical Research*, **104**, 2733–2747.
- De Geer, G., 1888. Om Skandinaviens nivåförändringar under kvartär-perioden. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **10**, 366–379.
- De Geer, G., 1890. Om Skandinaviens nivåförändringar under kvartär-perioden. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **12**, 61–110.
- Donner, J., Eronen, M. & Jungner, H., 1977. The dating of the Holocene relative sea-level changes

- in Finnmark, North Norway. *Norsk Geografisk Tidsskrift*, **31**, 103–128.
- Donner, J. J., 1964. The late-glacial and post-glacial emergence of south-western Finland. *Commentationes Physico-Mathematicae*, **30**, 1–47.
- Dziewonski, A. & Anderson, D., 1981. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297–356.
- Einarsson, P., Sigmundsson, F., Hofton, M. A., Foulger, G. R. & Jacoby, W., 1996. An experiment in glacio-isostasy near Vatnajökull, Iceland, 1991. *Jökull*, **44**, 29–39.
- Einarsson, P., 1991. Earthquakes and present-day tectonism in Iceland. *Tectonophysics*, **189**, 261–279.
- Einarsson, T., 1966. Late- and post-glacial rise in Iceland and sub-crustal viscosity. *Jökull*, **3**, 157–166.
- Ekman, M., 1991a. A concise history of postglacial land uplift research (from its beginning to 1950). *Terra Nova*, **3**, 358–365.
- Ekman, M., 1991b. Gravity change, geoid change and remaining postglacial uplift of Fennoscandia. *Terra Nova*, **3**, 390–392.
- Ekman, M., 1996. A consistent map of the postglacial uplift of Fennoscandia. *Terra Research*, **8**, 158–165.
- Ekman, M., 1998. Recent postglacial rebound of Fennoscandia: a short review and some numerical results. In Wu, P., ed., *Dynamics of the Ice Age Earth: a Modern Perspective*, pp. 383–392. Trans Tech Publications, Uetikon.
- Ekman, M., 2000. Determination of global sea level rise and its change with time. *Small Publications in Historical Geophysics*, **7**, 1–19.
- Ekman, M. & Mäkinen, J., 1996. Recent postglacial rebound, gravity change and mantle flow in Fennoscandia. *Geophysical Journal International*, **126**, 229–234.
- Ekman, M., Mäkinen, J., Midtsundstad, Å. & Remmer, O., 1987. Gravity change and land uplift in Fennoscandia 1966–1984. *Bulletin Géodésique*, **61**, 60–64.
- Engels, J., 2002. *Zur Modellierung von Auflastdeformationen und induzierter Polbewegung*. Habilitationsschrift, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart, eingereicht.
- Eronen, M., 1974. The history of the Litorina Sea and associated Holocene events. *Commentationes Physico-Mathematicae*, **44**, 80–195.
- Eronen, M., 1976. A radiocarbon-dated Ancylus transgression site in south-eastern Finland. *Boreas*, **5**, 65–67.
- Eronen, M., 1983. Late Weichselian and Holocene shore displacement in Finland. In Smith, D. & Dawson, A., eds., *Shorelines and Isostasy*, pp. 183–207. Academic Press, London.
- Eronen, M., 1992. Quaternary chronostratigraphy – a review. *Bulletin of the Geological Society of Finland*, **64**, 135–147.
- Eronen, M. & Haila, H., 1982. Shoreline displacement near Helsinki, southern Finland, during the Ancylus Lake stage. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A III*, **134**, 111–129.
- Fægri, K., 1944. *Studies on the Pleistocene of Western Norway III. Bømlø*. Bergens Muséum Årbok No. 7, 1939–40, Naturvitensk.
- Farrell, W. E., 1972. Deformation of the earth by surface loads. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **10**, 761–797.
- Farrell, W. E. & Clark, J. A., 1976. On postglacial sea level. *Geophysical Journal of the Royal*

- Astronomical Society*, **46**, 647–667.
- Fjeldskaar, W., 1994. Viscosity and thickness of the asthenosphere detected from the Fennoscandian uplift. *Earth and Planetary Science Letters*, **126**, 399–410.
- Fjeldskaar, W., 2000. What about the asthenosphere viscosity? Comment on ‘Sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern Europe’ by K. Lambeck, C. Smither and P. Johnston. *Geophysical Journal International*, **142**, 277–278.
- Fjeldskaar, W. & Cathles, L., 1991. The present rate of uplift of Fennoscandia implies a low-viscosity asthenosphere. *Terra Nova*, **3**, 393–400.
- Fleming, K., Johnston, P., Zwartz, D., Yokoyama, Y., Lambeck, K. & Chappell, J., 1998. Refining the eustatic sea-level curve since the Last Glacial Maximum using far- and intermediate-field sites. *Earth and Planetary Science Letters*, **163**, 327–342.
- Flohn, H., 1985. *Das Problem der Klimaveränderung in Vergangenheit und Zukunft*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- Florin, M.-B., 1957. Plankton of fresh and brackish waters in the Södertälje area. *Phytogeographica Suecica*, **37**, 1–144.
- Foulger, G. R., Jahn, C.-H., Seeber, G., Einarsson, P., Julian, B. R. & Heki, K., 1992. Post-rifting stress relaxation at the divergent plate boundary in Northeast Iceland. *Nature*, **358**, 488–490.
- Fromm, E., 1970. An estimation of errors in the Swedish varve chronology. In Olsson, I. U., ed., *Radiocarbon Variations and Absolute Chronology*, pp. 163–172. Almquist & Wiksell, Uppsala.
- Göbell, S., Thoma, M., Wolf, D. & Grafarend, E. W., 1999. *Berechnung auflastinduzierter Horizontalverschiebungen, Geoidhöhen und Freiluft-Schwereanomalien für ein selbstgravitierendes, sphärisches Erdmodell und unterschiedliche Rheologien*. Technical Report STR99/24, GeoForschungsZentrum Potsdam. (Anm.: Im Titel ist ein Druckfehler, anstelle von „Horizontalverschiebung“ muß es „Vertikalverschiebung“ heißen.)
- Gilbert, F. & Backus, G. E., 1966. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**, 326–332.
- Glückert, G. & Risaniemi, O., 1982. The Ancyclus transgression west of Helsinki, south Finland – a preliminary report. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A III*, **134**, 99–110.
- Grafarend, E. W., 1989. *The Geoid and the Gravimetric Boundary Value Problem*. Reports of the Department of Geodesy, No. 14, Royal Institute of Technology, Stockholm.
- Grafarend, E. W., 2000. The time-varying gravitational potential field of a massive, deformable body. *Studia Geophysica et Geodaetica*, **44**, 364–373.
- Granlund, E., 1943. Beskrivning till jordarskarta över Västerbottens län nedanför odlingsgränsen. *Sveriges Geologiska Undersökning, Ca* **26**, 1–165.
- Greff-Lefftz, M. & Legros, H., 1997. Some remarks about the degree-one deformation of the earth. *Geophysical Journal International*, **131**, 699–723.
- Greiner, W., 1989. *Theoretische Physik, Band 1: Mechanik, Teil 1*, 5th edn. Verlag Harri Deutsch, Zürich.
- Greve, R., 1997. Application of a polythermal three-dimensional ice sheet model to the Greenland ice sheet: response to steady-state and transient climate scenarios. *Journal of Climate*, **10**, 901–918.
- Greve, R., Wyrwoll, K.-H. & Eisenhauer, A., 1999. Deglaciation of the northern hemisphere at the onset of Eemian and of the Holocene. *Annals of Glaciology*, **28**, 1–8.

- Gudmundsson, H. J., 1997. A review of the Holocene environmental history of Iceland. *Quaternary Science Reviews*, **16**, 81–92.
- Hafsten, U., 1956. Pollen-analytic investigations on the late Quaternary development in the inner Oslofjord area. *Universitetet i Bergen Årbok, Naturritenskapelig Rekke*, **8**, 1–161.
- Hafsten, U., 1979. Late and Post-Weichselian shore level changes in South Norway. In Oele, E., Schüttenhelm, R. T. E. & Wiggers, A. J., eds., *The Quaternary History of the North Sea*, Vol. 2, pp. 159–174. Acta Universitatis Upsaliensis Symposia Universitatis Upsaliensis Annum Quingentesimum Celebrantes, Uppsala.
- Hagedoorn, J. & Wolf, D., 2002. Pleistocene and recent deglaciation in Svalbard: implication for tide-gauge, GPS and VLBI measurements. *Journal of Geodynamics*, **35**, 415–423.
- Hald, M. & Vorren, T. O., 1983. A shore displacement curve from the Tromsø district, North Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **63**, 103–110.
- Hanyk, L., Matyska, C. & Yuen, D. A., 1998. Initial-value approach for viscoelastic responses of the earth's mantle. *GeoResearch Forum*, **3–4**, 135–154.
- Haskell, N. A., 1935. The motion of a viscous fluid under a surface load. *Physics*, **6**, 265–269.
- Heiskanen, W. A. & Moritz, H., 1993. *Physical Geodesy (Reprint)*. Institute of Physical Geodesy, Technical University of Graz.
- Helle, S. K., Anundsen, K., Aasheim, S. & Hafliðason, H., 1997. Indicating of a Younger Dryas marine transgression in inner Hardanger, West Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **77**, 101–117.
- Henningsmoen, K. E., 1979. En karbon-datert starandforskyvningskurve fra søndre Verfold. In Nydal, R., Westin, S., Hafsen, U. & Gulliksen, S., eds., *Fortiden i søkelyset*, pp. 239–247. Universitetsforlaget Trondheim.
- Hobson, E. W., 1955. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Chelsea, New York.
- Hofton, M. A. & Foulger, G. R., 1996a. Postdrifting anelastic deformation around the spreading plate boundary, north Iceland. 1. Modeling of the 1987–1992 deformation field using a viscoelastic earth structure. *Journal of Geophysical Research*, **101**, 25403–25421.
- Hofton, M. A. & Foulger, G. R., 1996b. Postdrifting anelastic deformation around the spreading plate boundary, north Iceland. 2. Implications of the model derived from the 1987–1992 deformation field. *Journal of Geophysical Research*, **101**, 25423–25436.
- Hörnsten, Å., 1970. Summary of discussion of the measurements and identification of varves. In Olsson, I. U., ed., *Radiocarbon Variations and Absolute Chronology*, pp. 215–217. Almquist & Wiksell, Uppsala.
- Huybrechts, P., 1992. *The Antarctic Ice Sheet and Environmental Change: a Three-Dimensional Modelling Study*. Berichte zur Polarforschung des Alfred-Wegener-Instituts für Polar- und Meeresforschung, Nr. 99, Bremerhaven.
- Hyvärinen, H., 1980. Relative sea-level changes near Helsinki, southern Finland, during early Litorina times. *Bulletin of the Geological Society of Finland*, **2**, 207–219.
- Imbrie, J., Hays, J. D., Martinson, D. G., McIntyre, A., Mix, A. C., Morley, J. J., Pisias, N. G., Prell, W. L. & Shackleton, N. J., 1984. The orbital theory of Pleistocene climate: support from a revised chronology of marine $\delta^{18}\text{O}$ record. In Berger, A., Imbrie, J., Hays, J., Kukla, G. & Saltzman, B., eds., *Milankovitch and Climate, Part I*, pp. 269–305. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

- Jamieson, T. F., 1865. On the history of the last geological changes in Scotland. *Quarterly Journal of the Geological Society of London*, **21**, 161–203.
- Jamieson, T. F., 1882. On the cause of the depression and re-elevation of the land during the glacial period. *Geological Magazine*, **2**, 400–407.
- Johnston, P., 1993. The effect of spatially non-uniform water loads on prediction of sea-level change. *Geophysical Journal International*, **114**, 615–634.
- Kaland, P. E., 1984. Holocene shore displacement and shorelines in Hordaland, western Norway. *Boreas*, **13**, 203–242.
- Kaland, P. E., Krzywinski, K. & Stabell, B., 1984. Radiocarbon-dating of transitions between marine and lacustrine sediments and their relation to the development of lakes. *Boreas*, **13**, 243–258.
- Kaufmann, G., 2000. Ice–ocean mass balance during the late Pleistocene glacial cycles in view of CHAMP and GRACE satellite missions. *Geophysical Journal International*, **143**, 142–156.
- Kaufmann, G. & Wolf, D., 1996. Deglacial land emergence and lateral upper-mantle heterogeneity in the Svalbard Archipelago—II. Extended results for high-resolution load models. *Geophysical Journal International*, **127**, 125–140.
- Kessel, H. & Raukas, A., 1979. The Quaternary history of the Baltic Estonia. In Gudelis, V. & Königsson, L.-K., eds., *The Quaternary History of the Baltic*, pp. 127–146. Acta Universitatis Upsalensis Symposia Universitatis Upsalensis Annum Quingentesimum Celebrantes: 1. Uppsala.
- Klemann, V., 2003. *Ebene kompressible viskoelastische Erdmodelle: Anwendung auf glazial-isostatische Deformationen der Lithosphäre*. Technical Report STR03/11, GeoForschungs-Zentrum Potsdam.
- Korn, G. A. & Korn, T. M., 1968. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Körnig, M. & Müller, G., 1989. Rheological models and interpretation of postglacial uplift. *Geophysical Journal International*, **98**, 243–253.
- Krzywinski, K. & Stabell, B., 1984. Late Weichselian sea level changes at Sotra, Hordaland, western Norway. *Boreas*, **13**, 159–202.
- Lambeck, K., 1990. Glacial rebound, sea-level change and mantle viscosity. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, **31**, 1–30.
- Lambeck, K., 1998. On the choice of timescale in glacial rebound modelling: mantle viscosity estimates and radiocarbon timescale. *Geophysical Journal International*, **134**, 647–651.
- Lambeck, K., 1999. Shoreline displacements in southern-central Sweden and the evolution of the Baltic Sea since the last maximum glaciation. *Journal of the Geological Society, London*, **156**, 465–486.
- Lambeck, K. & Johnston, P., 2000. Reply to comment on ‘What about the asthenosphere viscosity? Comment on sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern Europe’ by W. Fjeldskaar. *Geophysical Journal International*, **142**, 279–281.
- Lambeck, K., Johnston, P. & Nakada, M., 1990. Holocene glacial rebound and sea-level change in NW Europe. *Geophysical Journal International*, **103**, 451–468.
- Lambeck, K., Smither, C. & Ekman, M., 1998a. Test of glacial rebound models for Fennoscandia based on instrumented sea- and lake-level records. *Geophysical Journal International*, **135**,

- 375–387.
- Lambeck, K., Smither, C. & Johnston, P., 1998b. Sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern Europe. *Geophysical Journal International*, **134**, 102–144.
- Le Meur, E. & Huybrechts, P., 1998. Present-day uplift patterns over Greenland from a coupled ice-sheet/visco-elastic bedrock model. *Geophysical Research Letters*, **25**, 3951–3954.
- Li, G. & Yuen, D. A., 1987. Viscous relaxation of a compressible spherical shell. *Geophysical Research Letters*, **14**, 1227–1230.
- Lidén, R., 1938. Den senkvartära strandförskjutningens förlopp och kronologie i Ångermanland. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **60**, 397–404.
- Lliboutry, L., 1971. Rheological properties of the asthenosphere from Fennoscandian data. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 1433–1446.
- Longman, I. M., 1962. A Green's function for determining the deformation of the earth under surface mass loads, 1. Theory. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 845–850.
- Lundquist, G., 1962. Geological radiocarbon datings from the Stockholm station. *Sveriges Geologiska Undersökning*, **C 589**, 1–23.
- Lundqvist, J., 1986. Late Weichselian glaciation and deglaciation in Scandinavia. *Quaternary Science Reviews*, **5**, 269–292.
- Madelung, E., 1994. *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mäkinen, J., Ekman, M., Midtsundstad, A. & Remmer, O., 1986. *The Fennoscandian Land Uplift Gravity Lines 1966–1984*. Reports of the Finnish Geodetic Institute, No. 85(4), Helsinki.
- Mäkinen, J., Ruotsalainen, H. & Virtanen, H., 2000. Nordic Geodetic Commission, Working Group for Geodynamics, Onsala, November 7–8, 2000. *National Report for Finland*, **72**, 516–529.
- Mäkinen, J. & Saaranen, V., 1998. Determination of post-glacial land uplift from the three precise levellings in Finland. *Journal of Geodesy*, **72**, 516–529.
- Malberg, H., 1994. *Meteorologie und Klimatologie*. Springer-Verlag, Berlin.
- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Martinec, Z., Thoma, M. & Wolf, D., 2001. Material versus local incompressibility and its influence on glacial-isostatic adjustment. *Geophysical Journal International*, **144**, 136–156.
- Martinec, Z. & Wolf, D., 1998. *Explicit form of the propagator matrix for a multi-layered, incompressible viscoelastic sphere*. Technical Report STR98/08, GeoForschungsZentrum Potsdam.
- Merriam, J. B., 1985. Toroidal Love numbers and transverse stress at the earth's surface. *Journal of Geophysical Research*, **90**, 7795–7802.
- Miller, U. & Robertsson, A.-M., 1988a. Geographia Polonica: late Weichselian and Holocene environmental changes in Bohuslän, southwestern Sweden. In Kozarski, S., ed., *The First Polish-Swedish Seminar on 'Environmental Changes in Poland and Sweden After the Maximum of the Last Glaciation'*, 9–15 October 1986, Poznań, Poland, Vol. 55, pp. 103–111. Polish Scientific Publisher, Warszawa.
- Miller, U. & Robertsson, A.-M., 1988b. Late Weichselian and Holocene environmental changes in Bohuslän, southwestern Sweden. *Geographia Polonica*, **55**, 102–111.
- Milne, G. A., 1998. *Refining Models of the Glacial Isostatic Adjustment Process*. Ph.D. thesis, Department of Physics, University of Toronto.

- Mitrovica, J. X., 1996. Haskell [1935] revisited. *Journal of Geophysical Research*, **101**, 555–569.
- Mitrovica, J. X., 1997. Reply to comment on ‘The inference of mantle viscosity from an inversion of the Fennoscandian relaxation spectrum’ by L. Cathles and W. Fjeldskaar. *Geophysical Journal International*, **128**, 493–498.
- Mitrovica, J. X. & Forte, A. M., 1997. Radial profile of mantle viscosity: results from the joint inversion of convection and postglacial rebound observables. *Journal of Geophysical Research*, **102**, 2751–2769.
- Mitrovica, J. X. & Peltier, W. R., 1989. Pleistocene deglaciation and the global gravity field. *Journal of Geophysical Research*, **94**, 13651–13671.
- Mitrovica, J. X. & Peltier, W. R., 1993. The inference of mantle viscosity from an inversion of the Fennoscandian relaxation spectrum. *Geophysical Journal International*, **114**, 45–62.
- Møller, J. J., 1984. Holocene shore displacement at Nappstraumen, Lofoten, North Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **64**, 1–5.
- Munk, W. H. & MacDonald, G. J. F., 1960. *The Rotation of the Earth: a Geophysical Discussion*. Cambridge University Press, London.
- Nakada, M. & Lambeck, K., 1989. Late Pleistocene and Holocene sea-level change in the Australian region and mantle rheology. *Geophysical Journal International*, **96**, 497–517.
- Nakiboglu, S. M. & Lambeck, K., 1991. Secular sea-level change. In Sabadini, R., ed., *Glacial Isostasy, Sea-Level and Mantle Rheology*, pp. 237–258. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Nesje, A. & Dahl, S. O., 1990. Autochthonous block fields in southern Norway: implications for the geometry, thickness, and isostatic loading of the late Weichselian Scandinavian ice sheet. *Journal of Quaternary Science*, **5**, 225–234.
- Officer, C. B., 1974. *Introduction to Theoretical Geophysics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Orowan, E., 1949. Contribution to discussion at joint meeting of the British Glaciological Society, the Rheologists’ Club and the Institute of Metals. *Reports on Progress in Physics*, **41**, 1249–1312.
- Öster, J., 1943. Kvartära tidsbestämningar från nordöstra Hälsingland. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **65**, 241–257.
- Pan, M. & Sjöberg, L. E., 1999. Estimating present-day postglacial rebound and horizontal movements in Fennoscandia by repeated GPS campaigns in 1993 and 1997. *Geophysical Research Letters*, **26**, 771–774.
- Paterson, W. S. B., 1994. *The Physics of Glaciers*, 3rd edn. Elsevier Science, Oxford.
- Peltier, W. R., 1974. The impulse response of a Maxwell Earth. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **12**, 649–668.
- Peltier, W. R., 1985. The LAGEOS constraint on deep mantle viscosity: results from a new normal mode method for the inversion of viscoelastic relaxation spectra. *Journal of Geophysical Research*, **90**, 9411–9421.
- Peltier, W. R., 1998. Global glacial isostasy and relative sea level: implications for solid earth geophysics and climate system dynamics. In Wu, P., ed., *Dynamics of the Ice Age Earth: a Modern Perspective*, pp. 17–54. Trans Tech Publications, Uetikon.
- Peltier, W. R. & Andrews, J. T., 1976. Glacial isostatic adjustment – I. The forward problem. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 605–646.
- Peltier, W. R., Farrell, W. E. & Clark, J. A., 1978. Glacial isostasy and relative sea level: a

- global finite element model. *Tectonophysics*, **50**, 81–110.
- Peltier, W. R. & Wu, P., 1982. Mantle phase transitions and the free air gravity anomalies over Fennoscandia and Laurentia. *Geophysical Research Letters*, **9**, 731–734.
- Persson, C., 1979. Shore displacement during Ancylus time in the Rejmyra area. *Sveriges Geologiska Undersökning*, **755**, 1–23.
- Plag, H.-P. & Jüttner, H.-U., 1995. Rayleigh-Taylor instabilities of a self-gravitating earth. *Journal of Geodynamics*, **20**, 267–288.
- Pollitz, F. F. & Sacks, I. S., 1996. Viscosity structure beneath northeast Iceland. *Journal of Geophysical Research*, **101**, 17771–17793.
- Påsse, T., 1987. Shore displacement during the late Weichselian and Holocene in the Sandsjöbacka area, SW Sweden. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **109**, 197–210.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. & Vetterling, W. T., 1980. *Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Ramfjord, H., 1982. On the late Weichselian and Flandrian shoreline displacement in Nærøy, Nord-Trøndelag, Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **62**, 191–205.
- Renberg, I. & Segerström, U., 1981. The initial points on an shoreline displacement curve for southern Västerbotten, dated by varve-counts of lake sediments. *Striae*, **14**, 174–176.
- Richardt, N., 1996. Sedimentological examination of the late Weichselian sea-level history following deglaciation of northern Denmark. In Andrews, J., Austin, W. E. N., Bergsten, H. & Jennings, A. E., eds., *Late Quaternary Palaeoceanography of the North Atlantic Margins*, Vol. 111, pp. 261–273. Geological Society, Oxford.
- Risberg, J., 1991. *Palaeoenvironment and Sea Level Changes During the early Holocene on the Södertörn Peninsula, Södermanland, Eastern Sweden*. Ph.D. thesis, Department of Quaternary Research, Stockholm University.
- Risberg, J. & Karlson, S., 1989. *The Pollen Stratigraphy in a Sediment Core from Lake Ådran, Södertörn, Central Eastern Svealand, Sweden: a Study of the Regional Vegetational Development in the Södertörn Area During the Holocene*. Publications of the Department of Quaternary Research, No. 14, Stockholm University.
- Risberg, J., Miller, U. & Brunnberg, L., 1991. Deglaciation, Holocene shore displacement and costal settlements in eastern Svealand, Sweden. *Quaternary International*, **9**, 33–37.
- Ritz, C., 1997. *EISMINT Intercomparison Experiment. Comparison of Existing Greenland Models*. Unpublished manuscript, Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement, Saint Martin d'Hères.
- Rubincam, D. P., 1984. Postglacial rebound by Lageos and the effective viscosity of the lower mantle. *Journal of Geophysical Research*, **89**, 1077–1087.
- Saarnisto, M., 1981. Holocene emergence history and stratigraphy in the area north of the Gulf of Bothnia. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Helsinki, A III*, **130**, 7–130.
- Sabadini, R., Yuen, D. A. & Boschi, E., 1982. Polar wandering and the forced responses of a rotating, multilayered, viscoelastic planet. *Journal of Geophysical Research*, **87**, 2885–2903.
- Salomaa, R., 1982. Post-glacial shoreline displacement in the Lauhanvuori area, western Finland. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Helsinki, A III*, **134**, 81–97.
- Salomaa, R. & Matiskainen, 1985. New date on shoreline displacement and archeological chronology in southern Ostrobothnia and northern Satakunta. *Iskos: Suomen Muinaismuistoyhdistys*,

- 5, 141–155.
- Schönwiese, C.-D., 1994a. *Klima*. Meyer, Mannheim.
- Schönwiese, C.-D., 1994b. *Klima im Wandel, von Treibhauseffekt, Ozonloch und Naturkatastrophen*. RoRoRo, Reinbek, Hamburg.
- Sigmundsson, F., 1991. Post-glacial rebound and asthenosphere viscosity in Iceland. *Geophysical Research Letters*, **18**, 1131–1134.
- Sigmundsson, F. & Einarsson, P., 1992. Glacio-isostatic crustal movements caused by historical volume change of the Vatnajökull ice cap, Iceland. *Geophysical Research Letters*, **19**, 2123–2126.
- Sjöberg, L. E., Pan, M., Asenjo, E. & Erlingsson, S., 2000. Glacial rebound at Vatnajökull, Iceland, studied by GPS campaigns in 1992 and 1996. *Journal of Geodynamics*, **29**, 63–70.
- Sneddon, I. N., 1995. *Fourier Transforms*. Dover Publications, New York.
- Sneeuw, N., 1994. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophysical Journal International*, **118**, 707–716.
- Snyder, J. A., Korsun, S. A. & Forman, S. L., 1996. Postglacial emergence and the Tapes transgression, north-central Kola Peninsula, Russia. *Boreas*, **25**, 47–56.
- Solem, T. & Solem, J. O., 1997. Shoreline displacement on the coast of Sør-Trøndelag and Møre og Romsdal, Central Norway: a botanical and zoological approach. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **77**, 193–203.
- Sommerfeld, A., Fues, E. & Kröner, E., 1970. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band II: Mechanik der deformierbaren Medien*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig.
- Sørensen, R., 1979. Late Weichselian deglaciation in the Oslofjord area, South Norway. *Boreas*, **8**, 241–246.
- Spada, G., Sabadini, R., Yuen, D. A. & Ricard, Y., 1992. Effects on post-glacial rebound from the hard rheology in the transition zone. *Geophysical Journal International*, **109**, 683–700.
- Stabell, B., 1980. Holocene shorelevel displacement in Telemark, southern Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **60**, 71–81.
- Stacey, F. D., 1992. *Physics of the Earth*. Brookfield Press, Brisbane.
- Stuiver, M. & Reimer, P. J., 1993. Extended ^{14}C data base and revised CALIB 3.0 ^{14}C age calibration program. *Radiocarbon*, **35**, 215–230.
- Suetova, I. A., 1986. Novye ocenki srednei vysoty, ob'joma i moshchnosti l'da Antarkidy. *Doklady AN SSSR*, **291**, 217–220.
- Sun, W. & Okubo, S., 1993. Surface potential and gravity changes due to internal dislocations in a spherical earth – I. Theory for a point dislocation. *Geophysical Journal International*, **114**, 569–592.
- Sun, W. & Sjöberg, L. E., 1998. Gravitational potential changes of a spherically symmetric earth model caused by surface load. *Physics and Chemistry of the Earth*, **23**, 47–52.
- Svedhage, K., 1985. *Shore Displacement During Late Weichselian and Early Holocene in the Risveden Area, SW Sweden*. Ph.D. thesis, Geologiska Institutionen, Göteborg University.
- Svendsen, J. I. & Mangerud, J., 1987. Late Weichselian and Holocene sea-level history for a cross-section of western Norway. *Journal of Quaternary Science*, **2**, 113–132.
- Svendsen, J. I. & Mangerud, J., 1990. Sea-level changes and pollen stratigraphy on the outer

- coast of Sunnmøre, western Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **70**, 111–134.
- Svensson, N.-O., 1991. Late Weichselian and early Holocene shore displacement in the central Baltic sea. *Quaternary International*, **9**, 7–26.
- Tapley, B. D., 1997. The gravity recovery and climate experiment (GRACE). *Supplement to EOS*, **78**, 163.
- Tauber, H., 1970. The Scandinavian varve chronology and C14 dating. In Olsson, I. U., ed., *Radiocarbon Variations and Absolute Chronology*, pp. 173–196. Almquist & Wiksell, Uppsala.
- Thoma, M., 1997. *Bestimmung der Mantelviskosität aus Beobachtungen der Landhebung und Berechnung von Schwereanomalien in Fennoskandien*. Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- Thoma, M. & Wolf, D., 1998. Simultaneous modelling of land uplift and secular gravity change in Fennoscandia. In Plag, H.-P., ed., *Extended Abstracts of the Ninth General Assembly of the WEGENER Group*, 2nd edn., pp. 86–89. Statens Kartverk, Hønefoss.
- Thoma, M. & Wolf, D., 1999. *Bestimmung der Mantelviskosität aus Beobachtungen der Landhebung und Schwere in Fennoskandien*. Technical Report STR00/02, GeoForschungsZentrum Potsdam.
- Thomsen, H., 1982. Late Weichselian shore-level displacement on Nord-Jæren, south-west Norway. *Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar*, **103**, 447–468.
- Tushingham, A. M. & Peltier, W. R., 1991. Ice-3G: a new global model of late Pleistocene deglaciation based upon geophysical predictions of postglacial sea level change. *Journal of Geophysical Research*, **96**, 4497–4523.
- Tushingham, A. M. & Peltier, W. R., 1993. *Relative Sea Level Database*. 93-016. NOAA/NGDC Paleoclimatology Program, Boulder.
- Van Bemmelen, R. W. & Berlage, H. P., 1935. Versuch einer mathematischen Behandlung geotektonischer Bewegungen unter besonderer Berücksichtigung der Undationstheorie. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, **43**, 19–55.
- Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N. & Khersonskii, V. K., 1988. *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, Singapore.
- Velichko, A. A., Kononov, Y. M. & Fausova, M. A., 1997. The last glaciation of earth: size and volume of ice-sheets. *Quaternary International*, **41/42**, 43–51.
- Vermeersen, L. L. A. & Mitrovica, J. X., 2000. Gravitational stability of spherical self-gravitating relaxation models. *Geophysical Journal International*, **142**, 351–360.
- Vermeersen, L. L. A. & Sabadini, R., 1997. A new class of stratified viscoelastic models by analytical techniques. *Geophysical Journal International*, **129**, 531–570.
- Vermeersen, L. L. A. & Sabadini, R., 1998. Effects of compressibility and stratification on viscoelastic relaxation: the analytical perspective. In Wu, P., ed., *The Earth Ice Age: a Modern Perspective*, pp. 123–134. Trans Tech Publications, Uetikon.
- Vorren, K.-D. & Moe, D., 1986. The early Holocene climate and sea-level changes in Lofoten and Vesterålen, North Norway. *Norsk Geologisk Tidsskrift*, **66**, 135–143.
- Vorren, T. O., Vorren, K.-D., Alm, T., Gulliksen, S. & Løvlie, R., 1988. The last deglaciation (20,000 to 11,000 B.P.) on Andøya, northern Norway. *Boreas*, **17**, 41–77.
- Wenner, C.-G., 1968. Comparison of varve chronology, pollen analysis and radiocarbon dating. *Stockholm Contributions in Geology*, **18**, 75–97.

- Wessel, P. & Smith, H. F., 1995. New version of the Generic Mapping Tools released. *EOS*, **76**, 329. (Electronic supplement: http://www.agu.org/eos_elec95154e.html).
- Wieczerkowski, K., 1999. *Gravito-Viskoelastodynamik für verallgemeinerte Rheologien mit Anwendungen auf den Jupitermond Io und die Erde*. Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission, Reihe C, Nr. 515, München.
- Wieczerkowski, K., Mitrovica, J. & Wolf, D., 1999. A revised relaxation-time spectrum for Fennoscandia. *Geophysical Journal International*, **139**, 69–86.
- Williamson, E. D. & Adams, L. H., 1923. Density distribution in the Earth. *Journal of the Washington Academy of Science*, **13**, 413–428.
- Wolf, D., 1984. The relaxation of spherical and flat Maxwell earth models and effects due to the presence of the lithosphere. *Journal of Geophysics*, **56**, 24–33.
- Wolf, D., 1985a. An improved estimate of lithospheric thickness based on a reinterpretation of tilt data from Pleistocene Lake Algonquin. *Canadian Journal of Earth Science*, **22**, 768–773.
- Wolf, D., 1985b. The normal modes of a layered, incompressible Maxwell half-space. *Journal of Geophysics*, **57**, 106–117.
- Wolf, D., 1985c. The normal modes of a uniform, compressible Maxwell half-space. *Journal of Geophysics*, **56**, 100–105.
- Wolf, D., 1986. Glacial-isostatic adjustment in Fennoscandia revisited. *Journal of Geophysics*, **59**, 42–48.
- Wolf, D., 1987. An upper bound on lithosphere thickness from glacio-isostatic adjustment in Fennoscandia. *Journal of Geophysics*, **61**, 141–149.
- Wolf, D., 1991. Viscoelastodynamics of a stratified, compressible planet: incremental field equations and short- and long-time asymptotes. *Geophysical Journal International*, **104**, 401–417.
- Wolf, D., 1996. Note on estimates of the glacial-isostatic decay spectrum for Fennoscandia. *Geophysical Journal International*, **127**, 801–805.
- Wolf, D., 1997. *Gravitational Viscoelastodynamics for a Hydrostatic Planet*. Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission, Reihe C, Nr. 452, München.
- Wolf, D., 2003. *Continuum Mechanics in Geophysics and Geodesy: Fundamental Principles*. Technical Reports of the Department of Geodesy and Geoinformatics, No. 2003.2, University of Stuttgart.
- Wolf, D., ohne Jahr. *Notizen zur Kontinuumsmechanik*. Unveröffentlichtes Manuskript.
- Wolf, D., Barthelmes, F. & Sigmundsson, F., 1997a. Predictions of deformation and gravity change caused by recent melting of the Vatnajökull ice cap, Island. In Segawa, J., Fujimoto, H. & Okubo, S., eds., *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, pp. 311–319. Springer-Verlag, Berlin.
- Wolf, D., Barthelmes, F. & Sigmundsson, F., 1997b. Predictions of deformation and gravity variation caused by recent change of the Vatnajökull ice cap, Island. *Comptes Rendus des Journées Luxembourgeoises de Géodynamique*, **82**, 36–42.
- Wolf, D. & Kaufmann, G., 2000. Effects due to compressional and compositional density stratification on load-induced Maxwell viscoelastic perturbations. *Geophysical Journal International*, **140**, 51–62.
- Wolf, D. & Li, G., 2002. Compressible viscoelastic earth models based on Darwin's law. In Mitrovica, J. X. & Vermeersen, L. L. A., eds., *Ice Sheets, Sea-Level and the Dynamic Earth*,

- pp. 275–292. American Geophysical Union, Washington.
- Wu, P., 1990. Deformation of internal boundaries in a viscoelastic earth and topographic coupling between the mantle and core. *Geophysical Journal International*, **101**, 213–231.
- Wu, P., 1992. Viscoelastic vs. viscous deformation and the advection of prestress. *Geophysical Journal International*, **108**, 35–51.
- Wu, P., Johnston, P. & Lambeck, K., 1999. Postglacial rebound and fault instability in Fennoscandia. *Geophysical Journal International*, **139**, 657–670.
- Wu, P. & Ni, Z., 1996. Some analytical solutions for the viscoelastic gravitational relaxation of a two-layer non-self-gravitating incompressible spherical earth. *Geophysical Journal International*, **126**, 413–436.
- Wu, P. & Peltier, W. R., 1982. Viscous gravitational relaxation. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **70**, 435–485.
- Wu, P. & Yuen, D. A., 1991. Post-glacial relaxation of a viscously stratified compressible mantle. *Geophysical Journal International*, **104**, 331–349.

Danksagungen

Die folgenden Menschen haben alle einen (zum Teil entscheidenden) Anteil am Gelingen dieser Arbeit, daher möchte ich mich bedanken, bei

- Prof. Detlef Wolf und Prof. Zdeněk Martinec für die Betreuung, die Anregungen, die Diskussionsbereitschaft und die vielen kleinen und großen Tips,
- Prof. Erik Grafarend für seine Bereitschaft die Arbeit zu begutachten und seine Unterstützung im Zulassungsverfahren zur Promotionsprüfung,
- Dr. Ralf Greve, der sein polythermales Eismodell für die Nordhemisphäre, das Eismodell für die Antarktis und den SPECMAP sea-level record zur Verfügung stellte,
- Prof. Kurt Lambeck für die Bereitstellung des Eismodells SCAN-2,
- Karla Bölling, Sybille Göbell, Ralf Greve, Jan Hagedoorn, Georg Kaufmann, Volker Kleemann, Peter Schwintzer, Karin Wiczzerkowski für ihre Diskussionsbereitschaft, die Anregungen und Tips,
- dem GeoForschungsZentrum Potsdam, für die Möglichkeit dort meine Arbeit zu schreiben und die finanzielle Unterstützung,
- den Leuten aus der „gmthelp@soest.hawaii.edu“ Mailingliste, von denen immer einer weiter wußte, wenn die Graphik zunächst nicht ganz so aussah, wie sie sollte,
- Christof Petig, der auf alle Rechner- und Programmierfragen eine Antwort hatte,
- Sebastian Horstmann, Jacek Jakobowski, Christof Petig und Nils Richter für die Hardware, die sie mir zur Verfügung stellten,
- Donald E. Knuth und Leslie Lamport für $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ bzw. $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ (mit denen diese Arbeit gesetzt wurde), Pål Wessel und Walter H. F. Smith für GMT (mit dem alle Graphiken erzeugt wurden), Linus Torvalds für Linux (ohne das diese Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen wäre),
- Uta Femers, Jan Hagedoorn, Gudrun Mildner, Christof Petig, Annette Thoma und Inge Stumpf für das Korrekturlesen,
- Annette, Dominik und Miriam Thoma für ihre Geduld und Ablenkung und schließlich
- meiner Mutter Karin Thoma für ihr Vertrauen und den Start, den sie mir in dieses Leben ermöglichte. Letzendlich ist dies ihre Arbeit, auch wenn sie deren Fertigstellung nicht mehr erlebte.

A. Ergänzungen zur Theorie

A.1 Ableitung des Differentialgleichungssystems

A.1.1 Differentialoperatoren in sphärischen Koordinaten

Die Transformation von kartesischen zu sphärischen Koordinaten geschieht durch

$$X_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad X_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad X_3 = r \cos \theta, \quad (\text{A.1})$$

wobei der Koordinatenursprung jeweils im Zentrum einer Kugel angenommen wird. In sphärischen Koordinaten wird ein Beobachtungspunkt durch die Radialentfernung r , die Kolatitude θ und die Longitude φ beschrieben.

Die folgenden Formeln für Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten können z.B. in Sommerfeld *et al.* (1970), Greiner (1989) und Paterson (1994) gefunden werden.

Divergenz:

$$x := u_{i,i} = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_{,r} + \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_{,\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} u_{\varphi,\varphi}, \quad (\text{A.2})$$

Gradient:

$$\phi_{,i}^{(\Delta)} = \begin{pmatrix} \phi_{,r}^{(\Delta)} \\ \frac{1}{r} \phi_{,\theta}^{(\Delta)} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \phi_{,\varphi}^{(\Delta)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

Laplace:

$$\phi_{,ii}^{(\Delta)} = \frac{1}{r^2} (r^2 \phi_{,r}^{(\Delta)})_{,r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \phi_{,\theta}^{(\Delta)})_{,\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \phi_{,\varphi\varphi}^{(\Delta)}, \quad (\text{A.4})$$

Gradient eines Vektors:

$$u_{i,j} = \begin{pmatrix} u_{r,r} & u_{\theta,r} & u_{\varphi,r} \\ \frac{1}{r} (u_{r,\theta} - u_\theta) & \frac{1}{r} (u_{\theta,\theta} + u_r) & \frac{1}{r} u_{\varphi,\theta} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{u_{r,\varphi}}{\sin \theta} - u_\varphi \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\sin \theta} - u_\varphi \cot \theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{u_{\varphi,\varphi}}{\sin \theta} + u_r + u_\theta \cot \theta \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

Laplace eines Vektors:

$$u_{i,jj} = \begin{pmatrix} \frac{(r^2 u_{r,r})_{,r}}{r^2} + \frac{(\sin \theta u_{r,\theta})_{,\theta}}{r^2 \sin \theta} + \frac{u_{r,\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_{\theta,\theta}}{r^2} - \frac{2 \cot \theta u_\theta}{r^2} - \frac{2u_{\varphi,\varphi}}{r^2 \sin \theta} \\ \frac{(r^2 u_{\theta,r})_{,r}}{r^2} + \frac{(\sin \theta u_{\theta,\theta})_{,\theta}}{r^2 \sin \theta} + \frac{u_{\theta,\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2u_{r,\theta}}{r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cot \theta u_{\varphi,\varphi}}{r^2 \sin \theta} \\ \frac{(r^2 u_{\varphi,r})_{,r}}{r^2} + \frac{(\sin \theta u_{\varphi,\theta})_{,\theta}}{r^2 \sin \theta} + \frac{u_{\varphi,\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2u_{r,\varphi}}{r^2 \sin \theta} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cot \theta u_{\theta,\varphi}}{r^2 \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 Kugelflächenfunktionen

Legendre-Polynome und skalare Kugelflächenfunktionen

Mit Hilfe der assoziierten Legendre-Polynome $P_n^m(x)$, die durch die Definition¹

$$P^{nm}(x) := (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P^n(x) \quad (\text{A.7})$$

mit

$$P^n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{A.8})$$

gegeben sind (z.B. Bronstein & Semendjajew, 1991), werden die skalaren (unnormierten) Kugelflächenfunktionen

$$Y^{nm}(\Omega) := Y^{nm}(\theta, \varphi) = P^{n|m|}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sin(|m|\varphi) & \text{für } m = -1, -2, \dots, -n \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

definiert. Die assoziierten Legendre-Polynome erfüllen die Differentialgleichung (das Argument Ω wird hier unterdrückt)

$$P_{\theta\theta}^{nm} + \cot \theta P_{\theta}^{nm} + \frac{1}{\sin^2 \theta} P_{\varphi\varphi}^{nm} = -n(n+1)P^{nm}, \quad (\text{A.10})$$

woraus

$$P_{,\theta\theta\theta}^{nm} + \cot \theta P_{,\theta\theta}^{nm} - \frac{1}{\sin^2 \theta} P_{,\theta}^{nm} + \frac{1}{\sin^2 \theta} P_{,\theta\varphi\varphi}^{nm} - \frac{2 \cot \theta}{\sin^2 \theta} P_{,\varphi\varphi}^{nm} = -n(n+1)P_{,\theta}^{nm} \quad (\text{A.11})$$

folgt. Einige der wichtigsten Beziehungen für die Legendre-Polynome sind (z.B. Madelung, 1994; Korn & Korn, 1968; Bronstein & Semendjajew, 1991)

$$\int_{-1}^1 P^n(x) P^{n'}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}, \quad (\text{A.12})$$

$$\int_{-1}^1 P^{nm}(x) P^{n'm}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}, \quad (\text{A.13})$$

$$(2n+1)P^n(x) = \frac{d}{dx} [P^{n+1}(x) - P^{n-1}(x)], \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dx} P^n(x) = \frac{n}{x^2 - 1} [xP^n(x) - P^{n-1}(x)], \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d}{dx} P^{nm}(x) = \frac{(n+1)xP^{nm}(x) - (n-m+1)P^{n+1m}(x)}{1-x^2}. \quad (\text{A.16})$$

Für die Kugelflächenfunktionen $Y^{nm}(\theta, \varphi)$ folgt aus (A.9) und (A.13) die Normierung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta [Y^{nm}(\theta, \varphi)]^2 d\theta d\varphi = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}. \quad (\text{A.17})$$

Außerdem erfüllen die Kugelflächenfunktionen die Orthogonalitätsrelation²

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y^{nm}(\theta, \varphi) Y^{n'm'}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.18})$$

¹In diesem Abschnitt wird die symbolische Schreibweise verwendet.

²Die hier eingeführten Kugelflächenfunktionen (A.9) sind unnormiert, daher ergibt sich auf der rechten Seite ein Vorfaktor, der ungleich eins ist.

Vektorielle Kugelflächenfunktionen

Mit den skalaren Kugelflächenfunktionen lassen sich die vektoriellen Kugelflächenfunktionen definieren (z.B. Varshalovich *et al.*, 1988):

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega) &:= Y^{nm}(\Omega)\mathbf{n}_r, \\
\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega) &:= \nabla_{\Omega} Y^{nm}(\Omega)\mathbf{n}_r = Y_{,\theta}^{nm}\mathbf{n}_{\theta} + \frac{1}{\sin\theta}Y_{,\varphi}^{nm}\mathbf{n}_{\varphi}, \\
\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega) &:= \mathbf{n}_r \times \nabla_{\Omega} Y^{nm}(\Omega)\mathbf{n}_r = Y_{,\theta}^{nm}\mathbf{n}_{\varphi} - \frac{1}{\sin\theta}Y_{,\varphi}^{nm}\mathbf{n}_{\theta},
\end{aligned} \tag{A.19}$$

wobei \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_{θ} , \mathbf{n}_{φ} die Einheitsvektoren in die jeweiligen Richtungen sind, $n = 0, 1, 2, \dots$ den Grad und $m = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ die Ordnung bezeichnen. Außerdem gilt: $\nabla_{\Omega} = \mathbf{n}_{\theta}(\partial/\partial\theta) + \mathbf{n}_{\varphi}(\partial/\sin\theta\partial\varphi)$. Dadurch sind $\mathbf{S}_{(\pm 1)}^{nm}$ als sphäroidale und $\mathbf{S}_{(0)}^{nm}$ als toroidale Vektor-Kugelflächenfunktionen definiert.

Die Anwendung von Differentialoperatoren auf vektorielle-Kugelflächenfunktionen führt zu folgenden Rechenregeln:

$$\text{grad}[f(r)Y^{nm}(\Omega)] = \frac{df(r)}{dr}\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega) + \frac{f(r)}{r}\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega), \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\text{div}[f(r)\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega)] &= \left[\frac{df(r)}{dr} + \frac{2f(r)}{r}\right]Y^{nm}(\Omega), \\
\text{div}[f(r)\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega)] &= -\frac{f(r)}{r}n(n+1)Y^{nm}(\Omega), \\
\text{div}[f(r)\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega)] &= 0,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot}[f(r)\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega)] &= -\frac{f(r)}{r}\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega), \\
\text{rot}[f(r)\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega)] &= \left[\frac{df(r)}{dr} + \frac{f(r)}{r}\right]\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega), \\
\text{rot}[f(r)\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega)] &= -\left[\frac{df(r)}{dr} + \frac{f(r)}{r}\right]\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega) - \frac{f(r)}{r}n(n+1)\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega).
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Die inkrementiellen Feldgrößen werden mit Hilfe von r -abhängigen Amplitudenfunktionen und Kugelflächenfunktionen entwickelt:

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, s, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\tilde{U}^{nm}(r, s)\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega) + \tilde{V}^{nm}(r, s)\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega) + \tilde{W}^{nm}(r, s)\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega) \right], \tag{A.23}$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(\delta)}(r, s, \Omega)\mathbf{n}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\tilde{T}_{rr}^{nm}(r, s)\mathbf{S}_{(-1)}^{nm}(\Omega) + \tilde{T}_{r\theta}^{nm}(r, s)\mathbf{S}_{(+1)}^{nm}(\Omega) + \tilde{T}_{r\varphi}^{nm}(r, s)\mathbf{S}_{(0)}^{nm}(\Omega) \right], \tag{A.24}$$

$$\tilde{x}(r, s, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{X}^{nm}(r, s)Y^{nm}(\Omega), \tag{A.25}$$

$$\tilde{\phi}^{(\Delta)}(r, s, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\Phi}^{nm}(r, s)Y^{nm}(\Omega), \tag{A.26}$$

$$\tilde{\sigma}(s, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\Sigma}^{nm}(s)Y^{nm}(\Omega). \tag{A.27}$$

Aus (A.23) folgt mit (A.19)

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(r, s, \Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{U}^{nm}(r, s) Y^{nm}(\Omega), \\
\tilde{u}_\theta(r, s, \Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\tilde{V}^{nm}(r, s) Y_{,\theta}^{nm}(\Omega) - \frac{\tilde{W}^{nm}(r, s)}{\sin \theta} Y_{,\varphi}^{nm}(\Omega) \right], \\
\tilde{u}_\varphi(r, s, \Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{\tilde{V}^{nm}(r, s)}{\sin \theta} Y_{,\varphi}^{nm}(\Omega) + \tilde{W}^{nm}(r, s) Y_{,\theta}^{nm}(\Omega) \right].
\end{aligned} \tag{A.28}$$

A.1.3 Entwicklung der Differentialoperatoren nach Kugelflächenfunktionen

Die Argumente und die Summationen werden im folgenden unterdrückt.

Divergenz:

$$\tilde{x} := \tilde{u}_{i,i} = \left[\tilde{U}_{,r}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{U}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r} \tilde{V}^{nm} \right] Y^{nm}, \tag{A.29}$$

Gradient:

$$\tilde{\phi}_{,i}^{(\Delta)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{,r}^{nm} Y^{nm} \\ \frac{1}{r} \tilde{\Phi}^{nm} Y_{,\theta}^{nm} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \tilde{\Phi}^{nm} Y_{,\varphi}^{nm} \end{pmatrix}, \tag{A.30}$$

Laplace:

$$\tilde{\phi}_{,ii}^{(\Delta)} = \left[\tilde{\Phi}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{\Phi}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{\Phi}^{nm} \right] Y^{nm}. \tag{A.31}$$

Aus dem Gradienten eines Vektors ergeben sich mit der Definition $2\tilde{e}_{ij} = (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i})$:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{rr} &= \tilde{U}_{,r}^{nm} Y^{nm}, \\
2\tilde{e}_{r\theta} &= \left(\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r} \right) Y_{,\theta}^{nm} + \left(-\tilde{W}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{W}^{nm}}{r} \right) \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta}, \\
2\tilde{e}_{r\varphi} &= \left(\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r} \right) \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta} + \left(\tilde{W}_{,r}^{nm} - \frac{\tilde{W}^{nm}}{r} \right) Y_{,\theta}^{nm},
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Laplace eines Vektors:

$$\tilde{u}_{i,jj} = \begin{pmatrix} \left[\tilde{U}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{U}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)+2}{r^2} \tilde{U}^{nm} + \frac{2n(n+1)}{r^2} \tilde{V}^{nm} \right] Y^{nm} \\ \left[\tilde{V}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{V}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{V}^{nm} + \frac{2}{r^2} \tilde{U}^{nm} \right] Y_{,\theta}^{nm} - \left[\tilde{W}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{W}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{W}^{nm} \right] \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta} \\ \left[\tilde{V}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{V}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{V}^{nm} + \frac{2}{r^2} \tilde{U}^{nm} \right] \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta} - \left[\tilde{W}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{W}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{W}^{nm} \right] Y_{,\theta}^{nm} \end{pmatrix}. \tag{A.33}$$

A.1.4 Kugelflächenfunktionsentwicklung der inkrementiellen Feldgleichungen

Materialgleichung

Aus der Materialgleichung (2.70) folgt mit (A.25) und (A.32)³

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{rj}^{(\delta)} &= (\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\tilde{x}\delta_{rj} + s\tilde{\mu}\frac{1}{2}\tilde{e}_{rj} \\
&= (\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\tilde{X}^{nm}Y^{nm}\delta_{rj} + 2s\tilde{\mu}\tilde{U}_{,r}^{nm}Y^{nm}n_r \\
&\quad + s\tilde{\mu}\left[\left(\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r}\right)Y_{,\theta}^{nm} + \left(-\tilde{W}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{W}^{nm}}{r}\right)\frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin\theta}\right]n_\theta \\
&\quad + s\tilde{\mu}\left[\left(\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r}\right)\frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin\theta} + \left(\tilde{W}_{,r}^{nm} - \frac{\tilde{W}^{nm}}{r}\right)Y_{,\theta}^{nm}\right]n_\varphi \\
&= \left[\underbrace{(\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\tilde{X}^{nm} + 2s\tilde{\mu}\tilde{U}_{,r}^{nm}}_{=: \tilde{T}_{rr}^{nm}}\right]\mathbf{S}_{(-1)j}^{nm} \\
&\quad + s\tilde{\mu}\underbrace{\left(\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r}\right)}_{=: \tilde{T}_{r\theta}^{nm}}\mathbf{S}_{(+1)j}^{nm} \\
&\quad + s\tilde{\mu}\underbrace{\left(\tilde{W}_{,r}^{nm} - \frac{\tilde{W}^{nm}}{r}\right)}_{=: \tilde{T}_{r\varphi}^{nm}}\mathbf{S}_{(0)j}^{nm}. \tag{A.34}
\end{aligned}$$

Aus (A.29) und (2.72) ergeben sich

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{,r}^{nm} &= \tilde{X}^{nm} - \frac{2}{r}\tilde{U}^{nm} + \frac{n(n+1)}{r}\tilde{V}^{nm} \\
&= \frac{\beta-2}{r}\tilde{U}^{nm} + \frac{n(n+1)}{r}\tilde{V}^{nm}, \tag{A.35}
\end{aligned}$$

und aus (A.34)

$$\tilde{V}_{,r}^{nm} = \frac{1}{s\tilde{\mu}}\tilde{T}_{r\theta}^{nm} + \frac{1}{r}\tilde{V}^{nm} - \frac{1}{r}\tilde{U}^{nm}, \tag{A.36}$$

$$\tilde{W}_{,r}^{nm} = \frac{1}{s\tilde{\mu}}\tilde{T}_{r\varphi}^{nm} - \frac{1}{r}\tilde{W}^{nm}. \tag{A.37}$$

Wird die Divergenz der Materialgleichung (2.70) gebildet, erhält man

$$\tilde{t}_{ij,j}^{(\delta)} = (\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\tilde{x}_{,i} + s\tilde{\mu}u_{i,jj} + s\tilde{\mu}x_{,i}. \tag{A.38}$$

Mit (A.25) und (A.33)–(A.36) ergeben sich daraus: (A.36) ergeben sich daraus:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{rj,j}^{(\delta)} &= (\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu})\tilde{X}_{,r}^{nm}Y^{nm} + s\tilde{\mu}\left[\tilde{U}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r}\tilde{U}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)+2}{r^2}\tilde{U}^{nm} + \frac{2n(n+1)}{r^2}\tilde{V}^{nm}\right]Y^{nm} \\
&\quad + s\tilde{\mu}\left[\tilde{U}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r}\tilde{U}_{,r}^{nm} - \frac{2}{r^2}\tilde{U}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r}\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{n(n+1)}{r^2}\tilde{V}^{nm}\right]Y^{nm} \\
&= \left[\tilde{T}_{rr,r}^{nm} + \frac{4s\tilde{\mu}}{r}\tilde{U}_{,r}^{nm} - \frac{4s\tilde{\mu}}{r^2}\tilde{U}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2}\tilde{U}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r}\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{3n(n+1)s\tilde{\mu}}{r^2}\tilde{V}^{nm}\right]Y^{nm} \\
&= \left[\tilde{T}_{rr,r}^{nm} + \underbrace{\frac{4s\tilde{\mu}}{r}\tilde{X}^{nm} - \frac{12s\tilde{\mu}}{r^2}\tilde{U}^{nm}}_{\frac{4s\tilde{\mu}}{r^2}(\beta-3)\tilde{U}^{nm}} + \frac{6s\tilde{\mu}n(n+1)}{r^2}\tilde{V}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r}\tilde{T}_{r\theta}^{nm}\right]Y^{nm}, \tag{A.39}
\end{aligned}$$

³Es ist zu beachten, daß in dem Term $\mathbf{S}_{(\pm 1)i}^{nm}$ n und m den Grad und die Ordnung der Kugelflächenfunktionsentwicklung bezeichnet, während j den vektoriellen Charakter des Terms festlegt.

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{\theta j, j}^{(\delta)} &= \left\{ \frac{\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{\mu}}{r} \tilde{X}^{nm} + s\tilde{\mu} \left[\tilde{V}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{V}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{V}^{nm} + \frac{2}{r^2} \tilde{U}^{nm} \right] + \frac{s\tilde{\mu}}{r} \tilde{X}^{nm} \right\} Y_{,\theta}^{nm} \\
&\quad - s\tilde{\mu} \left[\tilde{W}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{W}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{W}^{nm} \right] \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta} \\
&= \left\{ s\tilde{\mu} \left(\tilde{V}_{,rr}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r^2} - \frac{\tilde{V}_{,r}^{nm}}{r} + \frac{\tilde{V}^{nm}}{r^2} \right) + \frac{3s\tilde{\mu}}{r} \left(\tilde{V}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{U}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{V}^{nm}}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \right) \tilde{X}^{nm} + 2s\tilde{\mu} \tilde{U}_{,r}^{nm} \right] + \frac{s\tilde{\mu}}{r} \left[\tilde{X}^{nm} - 3\tilde{U}_{,r}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{V}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r} \tilde{V}^{nm} \right] \right\} Y_{,\theta}^{nm} \\
&\quad + \left[s\tilde{\mu} \left(-\tilde{W}_{,rr}^{nm} + \frac{\tilde{W}_{,r}^{nm}}{r} - \frac{\tilde{W}^{nm}}{r^2} \right) + \frac{3s\tilde{\mu}}{r} \left(\tilde{W}_{,r}^{nm} + \frac{\tilde{W}^{nm}}{r} \right) - \frac{2s\tilde{\mu}}{r^2} \tilde{W}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}n(n+1)}{r^2} \tilde{W}^{nm} \right] \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta} \\
&= \left\{ \tilde{T}_{r\theta,r}^{nm} + \frac{3}{r} \tilde{T}_{r\theta}^{nm} + \frac{1}{r} \tilde{T}_{rr}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}}{r^2} \left[6\tilde{U}^{nm} + 2\tilde{V}^{nm} - 4n(n+1)\tilde{V}^{nm} - 2r\tilde{X}^{nm} \right] \right\} Y_{,\theta}^{nm} \\
&\quad + \left\{ -\tilde{T}_{r\varphi,r}^{nm} - \frac{3s\tilde{\mu}}{r} \tilde{T}_{r\varphi}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}}{r^2} \left[n(n+1)\tilde{W}^{nm} - 2\tilde{W}^{nm} \right] \right\} \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta},
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{\varphi j, j}^{(\delta)} &= \left\{ \tilde{T}_{r\theta,r}^{nm} + \frac{3}{r} \tilde{T}_{r\theta}^{nm} + \frac{1}{r} \tilde{T}_{rr}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}}{r^2} \left[6\tilde{U}^{nm} + 2\tilde{V}^{nm} - 4n(n+1)\tilde{V}^{nm} - 2r\tilde{X}^{nm} \right] \right\} \frac{Y_{,\varphi}^{nm}}{\sin \theta} \\
&\quad + \left\{ -\tilde{T}_{r\varphi,r}^{nm} - \frac{3s\tilde{\mu}}{r} \tilde{T}_{r\varphi}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}}{r^2} \left[n(n+1)\tilde{W}^{nm} - 2\tilde{W}^{nm} \right] \right\} Y_{,\theta}^{nm},
\end{aligned} \tag{A.41}$$

und schließlich folgt mit (A.19) und $N = n(n+1)$

$$\begin{aligned}
t_{ij, j}^{(\delta)} &= \left[\tilde{T}_{rr,r}^{nm} + \frac{4s\tilde{\mu}}{r^2} (\beta - 3) \tilde{U}^{nm} + \frac{6s\tilde{\mu}N}{r^2} \tilde{V}^{nm} - \frac{N}{r} \tilde{T}_{r\theta}^{nm} \right] \mathbf{S}_{(-1)i}^{nm} \\
&\quad + \left[\tilde{T}_{r\theta,r}^{nm} + \frac{3}{r} \tilde{T}_{r\theta}^{nm} + \frac{1}{r} \tilde{T}_{rr}^{nm} + \frac{2s\tilde{\mu}}{r^2} (3 - \beta) \tilde{U}^{nm} + \frac{2s\tilde{\mu}(1 - 2N)}{r^2} \tilde{V}^{nm} \right] \mathbf{S}_{(+1)i}^{nm} \\
&\quad + \left[-\tilde{T}_{r\varphi,r}^{nm} - \frac{3s\tilde{\mu}}{r} \tilde{T}_{r\varphi}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}(N - 2)}{r^2} \tilde{W}^{nm} \right] \mathbf{S}_{(0)i}^{nm}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Gravitative Feldgleichungen

Nun wird zunächst der gravitative Teil der Feldgleichungen betrachtet. Aus der Laplace-Gleichung (2.71) erhält man mit der Definition

$$\tilde{Q}^{nm} := \tilde{\Phi}_{,r}^{nm} + \frac{n+1}{r} \tilde{\Phi}^{nm} + 4\pi\gamma\rho^{(0)} \tilde{U}^{nm} \tag{A.43}$$

sowie (A.31) und (A.35) die Differentialgleichungen

$$\tilde{\Phi}_{,r}^{nm} = \tilde{Q}^{nm} - \frac{n+1}{r} \tilde{\Phi}^{nm} - 4\pi\gamma\rho^{(0)} \tilde{U}^{nm}, \tag{A.44}$$

$$\tilde{Q}_{,r}^{nm} = \frac{n-1}{r} \tilde{Q}^{nm} + 4\pi\gamma\rho^{(0)} \frac{n(n+1)}{r} \tilde{V}^{nm} - 4\pi\gamma\rho^{(0)} \frac{n+1}{r} \tilde{U}^{nm}. \tag{A.45}$$

Bewegungsgleichung

Aus der Bewegungsgleichung (2.69) ergibt sich zunächst

$$\tilde{t}_{ij, j}^{(\delta)} = \left[(\rho^{(0)} g_r^{(0)} \tilde{U}^{nm})_{,r} + \rho^{(0)} \tilde{\Phi}_{,r}^{nm} \right] \mathbf{S}_{(-1)i}^{nm} + \frac{1}{r} \left(\rho^{(0)} g_r^{(0)} \tilde{U}^{nm} + \rho^{(0)} \tilde{\Phi}^{nm} \right) \mathbf{S}_{(+1)i}^{nm}. \tag{A.46}$$

Mit (2.60), (2.63) und (A.35) erhält man:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{ij, j}^{(\delta)} &= \left[-\frac{4g_r^{(0)}\rho^{(0)}}{r} \tilde{U}^{nm} + \frac{Ng_r^{(0)}}{r} \tilde{V}^{nm} - \frac{(n+1)g_r^{(0)}\rho^{(0)}}{r} \tilde{\Phi}^{nm} + \rho^{(0)} \tilde{Q}^{nm} \right] \mathbf{S}_{(-1)i}^{nm} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\rho^{(0)} g_r^{(0)} \tilde{U}^{nm} + \rho^{(0)} \tilde{\Phi}^{nm} \right) \mathbf{S}_{(+1)i}^{nm}.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Wird (A.42) in (A.47) eingesetzt, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rr,r}^{nm} &= \left[\frac{4s\tilde{\mu}}{r^2}(3-\beta) - \frac{4g^{(0)}\rho^{(0)}}{r} \right] \tilde{U}^{nm} + \left(\frac{Ng_r^{(0)}\rho^{(0)}}{r} - \frac{6Ns\tilde{\mu}}{r^2} \right) \tilde{V}^{nm} \\ &+ \frac{N}{r} \tilde{T}_{r\theta}^{nm} - \frac{(1+n)\rho^{(0)}}{r} \tilde{\Phi}^{nm} + \rho^{(0)} \tilde{Q}^{nm}, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\tilde{T}_{r\theta,r}^{nm} = \left[\frac{g_r^{(0)}\rho^{(0)}}{r} - \frac{2s\tilde{\mu}}{r^2}(3-\beta) \right] \tilde{U}^{nm} + \left[\frac{2s\tilde{\mu}(2N-1)}{r^2} \right] \tilde{V}^{nm} - \frac{1}{r} \tilde{T}_{rr}^{nm} - \frac{3}{r} \tilde{T}_{r\theta}^{nm} + \frac{\rho^{(0)}}{r} \tilde{\Phi}^{nm}, \quad (\text{A.49})$$

$$\tilde{T}_{r\varphi,r}^{nm} = -\frac{3s\tilde{\mu}}{r} \tilde{T}_{r\varphi}^{nm} + \frac{s\tilde{\mu}(N-2)}{r^2} \tilde{W}^{nm}. \quad (\text{A.50})$$

A.1.5 Grenzflächenbedingungen

Werden die Grenzflächenbedingungen (2.45)–(2.48) nach Kugelflächenfunktionen entwickelt und die Beziehung (2.61) verwendet, erhält man

$$0 = [\tilde{U}^{nm}]_{\pm}^{\pm} = [\tilde{V}^{nm}]_{\pm}^{\pm} = [\tilde{W}^{nm}]_{\pm}^{\pm}, \quad (\text{A.51})$$

$$0 = [\tilde{\Phi}^{nm}]_{\pm}^{\pm}, \quad (\text{A.52})$$

$$g_r^{(0)} \tilde{\Sigma}^{nm} = [\tilde{T}_{rr}^{nm}]_{\pm}^{\pm}, \quad (\text{A.53})$$

$$0 = [\tilde{T}_{r\theta}^{nm}]_{\pm}^{\pm} = [\tilde{T}_{r\varphi}^{nm}]_{\pm}^{\pm}, \quad (\text{A.54})$$

$$4\pi\gamma \tilde{\Sigma}^{nm} = [\tilde{\Phi}_{,r}^{nm} + 4\pi\gamma\rho^{(0)}\tilde{U}^{nm}]_{\pm}^{\pm} = [\tilde{Q}^{nm} - \frac{n+1}{r}\tilde{\Phi}^{nm}]_{\pm}^{\pm} = [\tilde{Q}^{nm}]_{\pm}^{\pm}. \quad (\text{A.55})$$

Es zeigt sich, daß die beiden Feldgrößen \tilde{W}^{nm} und $\tilde{T}_{r\varphi}^{nm}$ zum einen von den anderen Feldgrößen entkoppelt sind, und zum anderen für diese Feldgrößen keine Quellen existieren. Daher werden bei der Aufstellung des Differentialgleichungssystems (2.78) und (2.79) weder \tilde{W}^{nm} noch $\tilde{T}_{r\varphi}^{nm}$ berücksichtigt, es gilt für sphärische Anfangszustände und die gegebenen Randbedingungen immer $\tilde{W}^{nm} = \tilde{T}_{r\varphi}^{nm} = 0$.

A.2 Lösung des Differentialgleichungssystems

A.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung $\tilde{\phi}_{,ii}^{(\Delta)} = 0$ lautet nach Kugelflächenfunktionsentwicklung

$$\tilde{\Phi}_{,rr}^{nm} + \frac{2}{r} \tilde{\Phi}_{,r}^{nm} - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{\Phi}^{nm} = 0. \quad (\text{A.56})$$

Mit dem Ansatz $\tilde{\Phi}^{nm} \sim r^{\lambda}$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - n(n+1) \\ &= (\lambda-n)(\lambda+n+1), \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

woraus

$$\tilde{\Phi}^{nm} = Z_3^{nm} r^n + Z_6^{nm} r^{-n-1} \quad (\text{A.58})$$

folgt. Z_3^{nm} und Z_6^{nm} sind zunächst freie Konstanten, die durch die Lösung der inhomogenen Gleichung festgelegt werden.

A.2.2 Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung

Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung⁴

$$\text{rot rot rot } \frac{1}{\rho^{(0)}} \text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.59})$$

mit Hilfe des Ansatzes $\mathbf{v} = \Upsilon^{nm} r^{\lambda-\beta} \mathbf{S}_{(0)}^{nm}$ bestimmt. Mit (2.60) und (A.22) erhält man

$$\frac{1}{\rho^{(0)}} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\Upsilon^{nm}}{\alpha} \left[-n(n+1)r^{\lambda-1} \mathbf{S}_{(-1)}^{nm} - (\lambda - \beta + 1)r^{\lambda-1} \mathbf{S}_{(+1)}^{nm} \right]. \quad (\text{A.60})$$

Substitution von (A.60) in (A.59) und Anwendung von (A.22) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \text{rot rot rot} \left[-n(n+1)r^{\lambda-1} \mathbf{S}_{(-1)}^{nm} - (\lambda - \beta + 1)r^{\lambda-1} \mathbf{S}_{(+1)}^{nm} \right] \\ &= \text{rot rot} \left[n(n+1) - \lambda(\lambda - \beta + 1) \right] r^{\lambda-2} \mathbf{S}_{(0)}^{nm} \\ &= \text{rot} \left[n(n+1) - \lambda(\lambda - \beta + 1) \right] \left[-n(n+1)r^{\lambda-3} \mathbf{S}_{(-1)}^{nm} - (\lambda - 1)r^{\lambda-3} \mathbf{S}_{(+1)}^{nm} \right] \\ &= \left[n(n+1) - \lambda(\lambda - \beta + 1) \right] \left[n(n+1) - (\lambda - 1)(\lambda - 2) \right] r^{\lambda-4} \mathbf{S}_{(0)}^{nm}, \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

woraus sich die Eigenwerte der homogenen Differentialgleichung ergeben:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4} &= \frac{3}{2} \pm \left(n + \frac{1}{2} \right), \\ \lambda_{2,5} &= \frac{\beta-1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\beta-1)^2 + 4N}. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Mit den Definitionen

$$\tau := \frac{\beta-3}{2}, \quad \zeta := \frac{1}{2} \sqrt{(\beta-1)^2 + 4N} \quad (\text{A.63})$$

erhält man als Lösung der homogenen Differentialgleichung (A.59)

$$\mathbf{v}^h = \left(C_1^{nm} r^{n-\beta+2} + C_2^{nm} r^{\tau+\zeta-\beta+1} + C_4^{nm} r^{-n-\beta+1} + C_5^{nm} r^{\tau-\zeta-\beta+1} \right) \Upsilon^{nm} \mathbf{S}_{(0)}^{nm}. \quad (\text{A.64})$$

Nun wird noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung gesucht. Diese erhält man durch Substitution des Ansatzes $\mathbf{v} = \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^\lambda \mathbf{S}_{(0)}^{nm} = \frac{\alpha}{s\tilde{\mu}} r^{\lambda-\beta} \mathbf{S}_{(0)}^{nm}$ in (2.91):

$$\begin{aligned} \frac{\beta\rho^{(0)}}{r^2 s\tilde{\mu}} (Z_3^{nm} r^n + Z_6^{nm} r^{-n-1}) \mathbf{S}_{(0)}^{nm} &= \text{rot rot rot } \frac{\alpha}{s\tilde{\mu}} \left[-n(n+1)r^{\lambda-1} \mathbf{S}_{(-1)}^{nm} - (\lambda - \beta + 1)r^{\lambda-1} \mathbf{S}_{(+1)}^{nm} \right], \\ \beta(Z_3^{nm} r^{n-\beta-2} + Z_6^{nm} r^{-n-\beta-3}) \mathbf{S}_{(0)}^{nm} &= \left[n(n+1) - \lambda(\lambda - \beta + 1) \right] \left[n(n+1) - (\lambda - 1)(\lambda - 2) \right] r^{\lambda-4} \mathbf{S}_{(0)}^{nm}. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= n + 2 - \beta, & Z_3^{nm} &= (\beta - 2n - 1) \overbrace{[2(\beta - 1)^2 + (4 - 3\beta)(n + 1)]}^{:=E_1}, \\ \lambda_6 &= -n + 1 - \beta, & Z_6^{nm} &= (\beta + 2n + 1) \overbrace{[2(\beta - 1)^2 - (4 - 3\beta)n]}^{:=E_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

wodurch die Koeffizienten in (A.58) bestimmt sind. Die spezielle Lösung von (2.91) lautet somit

$$\mathbf{v}^s = \left(C_3^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{n+2-\beta} + C_6^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{-n+1-\beta} \right) \mathbf{S}_{(0)}^{nm}. \quad (\text{A.67})$$

⁴In diesem Kapitel wird die symbolische Schreibweise verwendet.

Die Lösung von (2.91) setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^h + \mathbf{v}^s. \quad (\text{A.68})$$

Aus (2.90) folgt für die Verschiebung:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho^{(0)}} (\text{rot } \mathbf{v}) \\ &= -n(n+1) \left(C_1^{nm} r^{n+1} + C_2^{nm} r^{\tau+\zeta} + C_3^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{n+1} + C_4^{nm} r^{-n} + C_5^{nm} r^{\tau-\zeta} + C_6^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{-n} \right) \mathbf{S}_{(-1)}^{nm} \\ &\quad - \left[{}^{nm}C_1^{nm} (n-\beta+3) r^{n+1} + C_2^{nm} (\tau+\zeta-\beta+2) r^{\tau+\zeta} + C_3^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} (n-2\beta+3) r^{1+n} \right. \\ &\quad \left. + C_4^{nm} (2-n-\beta) r^{-n} + C_5^{nm} (2+\tau-\zeta-\beta) r^{\tau-\zeta} + C_6^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} (2-n-2\beta) r^{-n} \right] \mathbf{S}_{(+1)}^{nm}. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Damit ergeben sich aus (A.23)

$$\tilde{U}^{nm} = -N \left[C_1^{nm} r^{n+1} + C_2^{nm} r^{\tau+\zeta} + C_3^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{n+1} + C_4^{nm} r^{-n} + C_5^{nm} r^{\tau-\zeta} + C_6^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} r^{-n} \right], \quad (\text{A.70})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{nm} &= -C_1^{nm} (3-\beta+n) r^{n+1} + C_2^{nm} (\tau-\zeta+1) r^{\tau+\zeta} - C_3^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} (n-2\beta+3) r^{n+1} \\ &\quad - C_4^{nm} (2-\beta-n) r^{-n} + C_5^{nm} (\tau+\zeta+1) r^{\tau-\zeta} - C_6^{nm} \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}} (2-n-2\beta) r^{-n}, \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

und aus (A.43), (A.48) und (A.49) folgen:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{nm} &= -C_1^{nm} 4\pi\gamma\rho^{(0)} N r^{n+1} - C_2^{nm} 4\pi\gamma\rho^{(0)} N r^{\tau+\zeta} - C_3^{nm} \left[\frac{4\pi\gamma\rho^{(0)^2} N}{s\tilde{\mu}} r^{n+1} - (2n+1) Z_3^{nm} r^{n-1} \right] \\ &\quad - C_4^{nm} 4\pi\gamma\rho^{(0)} N r^{-n} - C_5^{nm} 4\pi\gamma\rho^{(0)} N r^{\tau-\zeta} - C_6^{nm} \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)^2} N}{s\tilde{\mu}} r^{-n}, \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_r^{nm} &= -C_1^{nm} \left[\rho^{(0)} g N r^{n+1} + s\tilde{\mu} (n+1) [2(n^2-n-3) + \beta(2-n)] r^n \right] \\ &\quad - C_2^{nm} \left[N \rho^{(0)} g r^{\tau+\zeta} + s\tilde{\mu} N (\zeta-\beta-3) r^{\tau+\zeta-1} \right] \\ &\quad - C_3^{nm} \left[n \rho^{(0)} [2(n+2)^2 - 7\beta(n+1) + 2\beta(\beta-2)] r^n + \frac{Ng}{s\tilde{\mu}} \rho^{(0)^2} r^{n+1} \right] \\ &\quad - C_4^{nm} \left[\rho^{(0)} g N r^{-n} - s\tilde{\mu} n [2(n^2+3n-1) + \beta(n+3)] r^{-n-1} \right] \\ &\quad - C_5^{nm} \left[N \rho^{(0)} g r^{\tau-\zeta} - s\tilde{\mu} N (\zeta+\beta+3) r^{\tau-\zeta-1} \right] \\ &\quad - C_6^{nm} \left[\rho^{(0)} (n+1) [-2(n-1)^2 - 7\beta n - 2\beta(\beta-2)] r^{-n-1} + \rho^{(0)^2} \frac{gN}{s\tilde{\mu}} r^{-n} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\theta^{nm} &= -C_1^{nm} s\tilde{\mu} n (4-\beta+2n) r^n - C_2^{nm} s\tilde{\mu} [N + (\tau+\zeta-1)(\zeta-\tau-1)] r^{\tau+\zeta-1} \\ &\quad - C_4^{nm} s\tilde{\mu} (1+n)(\beta+2n-2) r^{-n-1} - C_5^{nm} s\tilde{\mu} [N + (\zeta-\tau+1)(\zeta+\tau+1)] r^{\tau-\zeta-1} \\ &\quad - C_3^{nm} [N + (n-\beta)(n-2\beta+3)] \rho^{(0)} r^n - C_6^{nm} [N + (1+\beta+n)(n+2\beta-2)] \rho^{(0)} r^{-n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

A.2.3 Inverse der Fundamentallösung und Propagator

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in diesem Abschnitt auf die Indizes n und m , die den Grad bzw. die Ordnung der Kugelflächenfunktion kennzeichnen, verzichtet.

Lokale Inkompressibilität

Um die Inverse der Fundamentallösung (2.93) zu erhalten, wird diese als das Produkt dreier Matrizen geschrieben:

$$M_{ij}(r, s) = W_{ik}(r, s)V_{kl}R_{lj}(r, s). \quad (\text{A.75})$$

Die Inverse der Fundamentallösung läßt sich dann durch

$$M_{ij}^{-1}(r, s) = R_{ik}^{-1}(r, s)V_{kl}^{-1}W_{lj}^{-1}(r, s) \quad (\text{A.76})$$

gewinnen. Damit folgt

$$P_{ij}(r_k, r_{k-1}, s) = W_{ik}(r_k, s)V_{kl} \underbrace{R_{lm}(r_k, s)R_{mn}^{-1}(r_{k-1}, s)}_{=: G_{ln}(r_k, r_{k-1})} V_{no}^{-1}W_{oj}^{-1}(r_{k-1}, s). \quad (\text{A.77})$$

Die einzelnen Matrizen sind gegeben durch

$$W_{ij}(r, s) := \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho^{(0)}g - \frac{4s\tilde{\mu}}{r} & N\frac{2s\tilde{\mu}}{r} & \frac{2s\tilde{\mu}}{r} & 0 & 0 & N\frac{2s\tilde{\mu}}{r} \\ \frac{2s\tilde{\mu}}{r} & -\frac{2s\tilde{\mu}}{r} & 0 & \frac{s\tilde{\mu}}{r} & 0 & -\frac{2s\tilde{\mu}}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s\tilde{\mu}}{r\rho^{(0)}} & 0 \\ 4\pi\gamma\rho^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1(1+2n-\beta)s\tilde{\mu}}{r^2\rho^{(0)}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.78})$$

$$W_{ij}^{-1}(r, s) = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)^2}r^2}{s\tilde{\mu}E_1(1+2n-\beta)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho^{(0)}r^2}{s\tilde{\mu}E_1(1+2n-\beta)} \\ 2 - \frac{r\rho^{(0)}g}{2s\tilde{\mu}} & -N & \frac{r}{2s\tilde{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \frac{r}{s\tilde{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho^{(0)}r}{s\tilde{\mu}} & 0 \\ -\frac{4\pi\gamma\rho^{(0)^2}r^2}{s\tilde{\mu}E_1(1+2n-\beta)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^{(0)}r^2}{s\tilde{\mu}E_1(1+2n-\beta)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.79})$$

$$R_{ij}(r, s) := \begin{pmatrix} r^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^{\tau+\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}}r^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^{\tau-\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^{(0)}}{s\tilde{\mu}}r^{-n} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.80})$$

$$R_{ij}^{-1}(r, s) = \begin{pmatrix} r^{-n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-\tau-\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s\tilde{\mu}}{\rho^{(0)}}r^{-n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-\tau+\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s\tilde{\mu}}{\rho^{(0)}}r^n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.81})$$

$$V_{ij} := \begin{pmatrix} N & N & N & N & N & N \\ 3+n-\beta & \zeta-\tau-1 & 2-n-2\beta & 2-n-\beta & -\tau-\zeta-1 & 2-n-2\beta \\ -\frac{n+1}{2}V_{41} & 0 & \frac{n}{2}E_1 & \frac{n}{2}V_{44} & 0 & -\frac{n+1}{2}E_2 \\ V_{41} & 0 & E_1 & V_{44} & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & (\beta-2n-1)E_1 & 0 & 0 & (\beta+2n+1)E_2 \\ 0 & 0 & 2n+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.82})$$

mit

$$\begin{aligned} V_{41} &= 2(2n+3) - \beta(n+2), & V_{44} &= -2(2n-1) + \beta(n-1), \\ E_1 &= (n+1)(4-3\beta) + 2(\beta-1)^2, & E_2 &= -n(4-3\beta) + 2(\beta-1)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

$$V_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-2}{n_2V_{41}} & \frac{n}{n_2V_{41}} & \frac{-1}{z_3V_{41}} & \frac{-z_4E_1}{z_3n_2V_{41}} \\ \frac{1+\tau+\zeta}{2\zeta N} & \frac{1}{2\zeta} & \frac{z_2+\zeta}{\zeta n_2V_{41}} - \frac{z_1+\zeta}{\zeta n_2V_{44}} & \frac{-n(z_2+\zeta)}{\zeta 2n_2V_{41}} - \frac{(n+1)(z_1+\zeta)}{\zeta 2n_2V_{44}} & \frac{-z_1+\beta-\zeta}{2z_3\zeta E_2} + \frac{z_2+\zeta}{2z_3\zeta V_{41}} & V_{26}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n_2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n_2V_{44}} & \frac{n+1}{n_2V_{44}} & 0 & \frac{-E_1}{n_2V_{44}} \\ \frac{-1-\tau+\zeta}{2\zeta N} & \frac{-1}{2\zeta} & \frac{-z_2+\zeta}{\zeta n_2V_{41}} + \frac{z_1-\zeta}{\zeta n_2V_{44}} & \frac{n(z_2-\zeta)}{\zeta 2n_2V_{41}} + \frac{(n+1)(z_1-\zeta)}{\zeta 2n_2V_{44}} & \frac{z_1-\beta-\zeta}{2z_3\zeta E_2} + \frac{-z_2+\zeta}{2z_3\zeta V_{41}} & V_{56}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z_3E_2} & \frac{z_4E_1}{z_3n_2E_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.84})$$

mit

$$\begin{aligned} V_{26}^{-1} &= \frac{1}{\zeta 2n_2} \left[E_1 \left(\frac{z_1+\zeta}{V_{44}} + \frac{z_4(z_2+\zeta)}{z_3V_{41}} \right) - (z_1-\beta+\zeta) \left(1 + \frac{z_4E_1}{z_3E_2} \right) \right], \\ V_{56}^{-1} &= \frac{1}{\zeta 2n_2} \left[E_1 \left(\frac{-z_1+\zeta}{V_{44}} + \frac{z_4(-z_2+\zeta)}{z_3V_{41}} \right) + (z_1-\beta-\zeta) \left(1 + \frac{z_4E_1}{z_3E_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - \beta - n + \tau, & z_2 &= 4 - \beta + n + \tau, \\ z_3 &= 1 + \beta + 2n, & z_4 &= 1 - \beta + 2n, \\ n_2 &= 2n + 1, \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

$$G_{ij}(r_k, r_{k-1}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{\tau+\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{n+1-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{\tau-\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{-n-\beta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.87})$$

Materielle Inkompressibilität

Nach Martinec & Wolf (1998) kann die Inverse der Fundamentallösung in ähnlicher Form wie (2.98) geschrieben werden:

$$M_{ij}^{-1}(r, s) = N_{ij}^{(0)}(r) + \frac{1}{s\tilde{\mu}} N_{ij}^{(-1)}(r) \quad (\text{A.88})$$

mit

$$N_{ij}^{(0)} := \frac{1}{2n+1} \begin{pmatrix} \frac{-2(n+1)(n+2)r^{-n-1}}{2n-1} & \frac{2n(n+1)(n+2)r^{-n-1}}{2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n^2+3n-1)r^{-n+1}}{2n-1} & \frac{-n(n-1)(n+1)^2r^{-n+1}}{2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4\pi\gamma\rho r^{-n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-n+1} \\ \frac{2n(n-1)r^n}{2n+3} & \frac{2n(n+1)(n-1)r^n}{2n+3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(n+1)(n^2-n-3)r^{n+2}}{2n+3} & \frac{-n^2(n+1)(n+2)r^{n+2}}{2n+3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\pi\gamma\rho r^{n+2} & 0 & 0 & 0 & (2n+1)r^{n+1} & -r^{n+2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.89})$$

$$N_{ij}^{(-1)} = \frac{n(n+1)}{2n+1} \begin{pmatrix} \frac{\rho g r^{-n}}{2(2n-1)} & 0 & \frac{-r^{-n}}{2(2n-1)} & r^{-n} & \frac{\rho r^{-n}}{2(2n-1)} & 0 \\ -\frac{\rho g r^{-n+2}}{2(2n-1)} & 0 & \frac{n}{r^{-n+2}} & \frac{-(n-2)r^{-n+2}}{2(2n-1)} & \frac{-\rho r^{-n+2}}{2(2n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho g r^{n+1}}{2(2n+3)} & 0 & \frac{-r^{n+1}}{2(2n+3)} & -r^{n+1} & \frac{\rho r^{n+1}}{2(2n+3)} & 0 \\ \frac{n+1}{2(2n+3)} & 0 & \frac{n+1}{r^{n+3}} & \frac{(n+3)r^{n+3}}{2(2n+3)} & \frac{n+1}{2(2n+3)} & 0 \\ -\frac{\rho g r^{n+3}}{2(2n+3)} & 0 & \frac{n+1}{r^{n+3}} & \frac{(n+3)r^{n+3}}{2(2n+3)} & \frac{-\rho r^{n+3}}{2(2n+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.90})$$

Aus (2.98) und (A.88) ergibt sich für den Propagator

$$\begin{aligned} P_{ij}(r_k, r_{k-1}, s) &= M_{ij}(r_k, r_{k-1}, s) M_{ij}^{(-1)}(r_k, r_{k-1}, s) \\ &= P_{ij}^{(0)}(r_k, r_{k-1}) + s\tilde{\mu} P_{ij}^{(1)}(r_k, r_{k-1}) + \frac{1}{s\tilde{\mu}} P_{ij}^{(-1)}(r_k, r_{k-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

wobei

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(0)}(r_k, r_{k-1}) &:= M_{ik}^{(0)}(r_k)N_{kj}^{(0)}(r_{k-1}) + M_{ij}^{(1)}(r_k)N_{ij}^{(-1)}(r_{k-1}), \\
P_{ij}^{(1)}(r_k, r_{k-1}) &:= M_{ik}^{(1)}(r_k)N_{kj}^{(0)}(r_{k-1}), \\
P_{ij}^{(-1)}(r_k, r_{k-1}) &:= M_{ik}^{(0)}(r_k)N_{kj}^{(-1)}(r_{k-1})
\end{aligned} \tag{A.92}$$

gilt. Bei der expliziten Angabe der Propagatorelemente werden die Abkürzungen $h := r_k/r_{k-1}$, $g_k := g(r_k)$ und $g_{k-1} := g(r_{k-1})$ verwendet und die Funktionsargumente k und $k-1$ der Matrizen $P_{ij}^{(0,1,-1)}(r_k, r_{k-1})$ unterdrückt. Alle nicht gelisteten Argumente sind Null.

$$\begin{aligned}
P_{11}^{(0)} &= \frac{-(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} [n(n+2)h^{n+1} + (n^2 - n - 3)h^{-n-2}] + \\
&+ \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} [(n^2 + 3n - 1)h^{n-1} + (n-1)(n+1)h^{-n}] , \\
P_{12}^{(0)} &= \frac{n^2(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} (h^{n+1} - h^{-n-2}) - \frac{n(n+1)^2(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} (h^{n-1} - h^{-n}) , \\
P_{21}^{(0)} &= -\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} [(n+2)(n+3)h^{n+1} - (n^2 - n - 3)h^{-n-2}] + \\
&+ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} [(n^2 + 3n - 1)h^{n-1} - (n-1)(n-2)h^{-n}] , \\
P_{22}^{(0)} &= \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} [(n+3)h^{n+1} + nh^{-n-2}] - \\
&- \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} [(n+1)h^{n-1} + (n-2)h^{-n}] , \\
P_{31}^{(0)} &= \frac{-n(n+1)(n+2)\varrho_k}{(2n+1)(2n+3)} (g_k h^{n+1} - g_{k-1} h^{-n-3}) + \frac{n(n^2+3n-1)\varrho_k}{(2n-1)(2n+1)} (g_k h^{n-1} - g_{k-1} h^{-n-1}) + \\
&+ \frac{(n+1)(n^2-n-3)\varrho_k}{(2n+1)(2n+3)} (g_{k-1} h^n - g_k h^{-n-2}) - \frac{n(n+1)(n-1)\varrho_k}{(2n-1)(2n+1)} (g_{k-1} h^{n-2} - g_k h^{-n}) - \\
&- \frac{4\pi G \varrho_k^2 r_{k-1}}{2n+1} (h^n - h^{-n-1}) , \\
P_{32}^{(0)} &= \varrho_k g_k P_{12}^{(0)} , \\
P_{33}^{(0)} &= -\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} [(n^2 - n - 3)h^n + n(n+2)h^{-n-3}] + \\
&+ \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} [(n+1)(n-1)h^{n-2} + (n^2 + 3n - 1)h^{-n-1}] , \\
P_{34}^{(0)} &= \frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} [(n^2 - n - 3)h^n - (n+2)(n+3)h^{-n-3}] + \\
&- \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} [(n-1)(n-2)h^{n-2} - (n^2 + 3n - 1)h^{-n-1}] , \\
P_{35}^{(0)} &= \varrho_k (h^{-n-1} - P_{33}^{(0)}) , \\
P_{36}^{(0)} &= \frac{\varrho_k r_{k-1}}{2n+1} (h^n - h^{-n-1}) , \\
P_{41}^{(0)} &= -\varrho_k g_{k-1} P_{43}^{(0)} , \\
P_{43}^{(0)} &= \frac{-n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} (h^n - h^{-n-3}) + \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} (h^{n-2} - h^{-n-1}) , \\
P_{44}^{(0)} &= \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} [nh^n + (n+3)h^{-n-3}] - \\
&- \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} [(n-2)h^{n-2} + (n+1)h^{-n-1}] , \\
P_{45}^{(0)} &= -\varrho_k P_{43}^{(0)} , \\
P_{51}^{(0)} &= -\frac{4\pi G \varrho_k^2 r_{k-1}}{2n+1} (h^n - h^{-n-1}) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{55}^{(0)} &= h^{-n-1}, \\
P_{56}^{(0)} &= \frac{r_{k-1}}{2n+1} (h^n - h^{-n-1}), \\
P_{61}^{(0)} &= 4\pi G \varrho_k \left(P_{11}^{(0)} - h^{n-1} \right), \\
P_{62}^{(0)} &= 4\pi G \varrho_k P_{12}^{(0)}, \\
P_{66}^{(0)} &= h^{n-1},
\end{aligned} \tag{A.93}$$

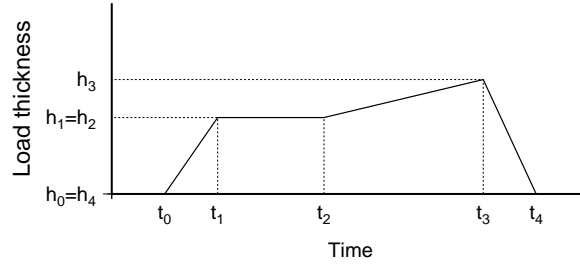
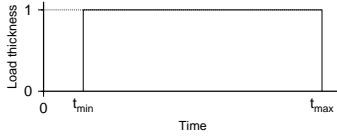
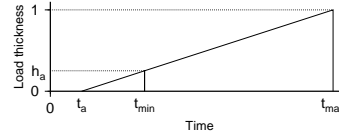
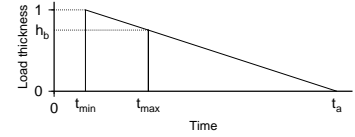
$$\begin{aligned}
P_{i1}^{(-1)} &= -\varrho_k g_{k-1} P_{i3}^{(-1)}, & i = 1, 2, 3, 6; \\
P_{13}^{(-1)} &= -\frac{n(n+1)r_{k-1}}{2(2n+1)(2n+3)} (h^{n+1} - h^{-n-2}) + \frac{n(n+1)r_{k-1}}{2(2n-1)(2n+1)} (h^{n-1} - h^{-n}), \\
P_{23}^{(-1)} &= -\frac{r_{k-1}}{2(2n+1)(2n+3)} [(n+3)h^{n+1} + nh^{-n-2}] + \\
&\quad + \frac{r_{k-1}}{2(2n-1)(2n+1)} [(n+1)h^{n-1} + (n-2)h^{-n}], \\
P_{33}^{(-1)} &= \varrho_k g_k P_{13}^{(-1)}, \\
P_{63}^{(-1)} &= 4\pi G \varrho_k P_{13}^{(-1)}, \\
P_{14}^{(-1)} &= \frac{n(n+1)r_{k-1}}{2(2n+1)(2n+3)} [nh^{n+1} + (n+3)h^{-n-2}] - \\
&\quad - \frac{n(n+1)r_{k-1}}{2(2n-1)(2n+1)} [(n-2)h^{n-1} + (n+1)h^{-n}], \\
P_{24}^{(-1)} &= \frac{n(n+3)r_{k-1}}{2(2n+1)(2n+3)} (h^{n+1} - h^{-n-2}) - \frac{(n+1)(n-2)r_{k-1}}{2(2n-1)(2n+1)} (h^{n-1} - h^{-n}), \\
P_{34}^{(-1)} &= \varrho_k g_k P_{14}^{(-1)}, \\
P_{64}^{(-1)} &= 4\pi G \varrho_k P_{14}^{(-1)}, \\
P_{i5}^{(-1)} &= -\varrho_k P_{i3}^{(-1)}, & i = 1, 2, 3, 6;
\end{aligned} \tag{A.94}$$

$$\begin{aligned}
P_{31}^{(1)} &= -\frac{2(n+1)(n+2)(n^2-n-3)}{(2n+1)(2n+3)r_{k-1}} (h^n - h^{-n-3}) + \frac{2n(n-1)(n^2+3n-1)}{(2n-1)(2n+1)r_{k-1}} (h^{n-2} - h^{-n-1}), \\
P_{32}^{(1)} &= \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)r_{k-1}} [(n^2 - n - 3)h^n + n(n+2)h^{-n-3}] - \\
&\quad - \frac{2n(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)r_{k-1}} [(n-1)(n+1)h^{n-2} + (n^2 + 3n - 1)h^{-n-1}], \\
P_{41}^{(1)} &= -\frac{2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)r_{k-1}} [n(n+2)h^n + (n^2 - n - 3)h^{-n-3}] + \\
&\quad + \frac{2(n-1)}{(2n-1)(2n+1)r_{k-1}} [(n^2 + 3n - 1)h^{n-2} + (n-1)(n+1)h^{-n-1}], \\
P_{42}^{(1)} &= \frac{2n^2(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)r_{k-1}} (h^n - h^{-n-3}) - \frac{2(n-1)^2(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)r_{k-1}} (h^{n-2} - h^{-n-1}).
\end{aligned} \tag{A.95}$$

A.3 Konvolution der Impulsantwort mit der Lastgeschichte

Es wird angenommen, daß sich die polygonale Lastgeschichte (Abb. A.1) im Zeitbereich durch

$$h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{h_{n+1} - h_n}{t_{n+1} - t_n} (t - t_n) + h_n \right] [H(t - t_n) - H(t - t_{n+1})] \tag{A.96}$$


Abb. A.1: Polygonale Lastgeschichte $h(t)$.

Abb. A.2: Normierte rechteckige Lastgeschichte.

Abb. A.3: Normierte linear ansteigende Lastgeschichte.

Abb. A.4: Normierte linear abfallende Lastgeschichte.

beschreiben läßt, wobei h_n die Höhe der Last zum Zeitpunkt t_n und $H(t)$ die Heaviside-Funktion bezeichnen. Zu lösen ist das Konvolutionsintegral⁵

$$A * h(t) := \left[\sum_{p=1}^P -s_p^n \nu_p A_i^n(r_k) e^{s_p^n t} \right] * h(t) = \int_{-\infty}^t \left[\sum_{p=1}^P -s_p^n \nu_p A_i^n(r_k) e^{s_p^n t - \tau} \right] h(\tau) d\tau. \quad (\text{A.97})$$

Nach (A.96) sind drei Fälle zu unterscheiden: die konstante Lastgeschichte, die linear ansteigende Lastgeschichte und die linear abfallende Lastgeschichte (Abb. A.2–A.4). Für jeden dieser drei Fälle muß (A.97) separat gelöst werden. Für die normierte konstante Lastgeschichte, die durch

$$h_k(t) = H(t - t_{\min}) - H(t - t_{\max}) \quad (\text{A.98})$$

beschrieben wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} A * h_k(t) &= H(t - t_{\min}) \sum_{p=1}^P A_i^{\nu_p} \left[1 - e^{s_p^n (t - t_{\min})} \right] \\ &\quad - H(t - t_{\max}) \sum_{p=1}^P A_i^{\nu_p} \left[1 - e^{s_p^n (t - t_{\max})} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Die normierte linear ansteigende Lastgeschichte wird durch

$$h_a(t) = \frac{t - t_a}{t_{\max} - t_a} [H(t - t_{\min}) - H(t - t_{\max})] \quad (\text{A.100})$$

mit

$$t_a := \frac{h_b t_{\min} - h_a t_{\max}}{h_b - h_a} = \frac{t_{\min} - h_a t_{\max}}{1 - h_a} \quad (\text{A.101})$$

und

$$h_a := \frac{h(t_{\min})}{h(t_{\max})}, \quad h_b := \frac{h(t_{\max})}{h(t_{\max})} = 1 \quad (\text{A.102})$$

⁵Die hier nur knapp zitierte Lösung ist in Thoma (1997) ausführlich hergeleitet.

beschrieben. Es ergibt sich

$$A * h_a(t) = \frac{H(t-t_{\min})}{t_{\max}-t_a} \sum_{p=1}^P \left\{ (t-t_a) - (t_{\min}-t_a)e^{s_p^n(t-t_{\min})} + \frac{1}{s_p^n} \left[1 - e^{s_p^n(t-t_{\min})} \right] \right\} \\ - \frac{H(t-t_{\max})}{t_{\max}-t_a} \sum_{p=1}^P \left\{ (t-t_a) - (t_{\max}-t_a)e^{s_p^n(t-t_{\max})} + \frac{1}{s_p^n} \left[1 - e^{s_p^n(t-t_{\max})} \right] \right\}. \quad (\text{A.103})$$

Für die linear abfallende Lastgeschichte kann mit

$$t_a := \frac{h_a t_{\max} - h_b t_{\min}}{h_a - h_b} = \frac{h_a t_{\max} - t_{\min}}{h_a - 1} \quad (\text{A.104})$$

und

$$h_a := \frac{h(t_{\min})}{h(t_{\min})} = 1, \quad h_b := \frac{h(t_{\max})}{h(t_{\min})} \quad (\text{A.105})$$

eine formale Übereinstimmung mit (A.100) erreicht werden, die Lösung des Konvolutionsintegrals ist folglich identisch.

A.4 Analytische Darstellung der Entwicklungskoeffizienten verschiedener Lastquerschnitte

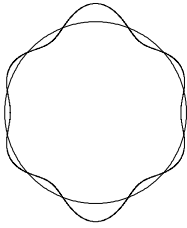


Abb. A.5: Auflast mit Legendre-Querschnitt für $l = 6$.

Analytische Darstellungen sind nur für kappenförmige Auflasten mit $d(\theta, \varphi) = d(\theta_0)$ möglich, wobei θ_0 den Lastradius beschreibt. Für einfache Zwecke ist es möglich, einen Lastquerschnitt $d(\theta_0)$ anzunehmen, der die Form eines Legendre-Polynoms des Grades l hat (z.B. Amelung & Wolf, 1994) (Abb. A.5), in diesem Fall ergibt sich

$$D^n = \begin{cases} 1, & n = l \\ 0, & n \neq l \end{cases}. \quad (\text{A.106})$$

A.4.1 Rechtwinkliger Querschnitt

Ist die Last eine Kappe mit rechtwinkligem Querschnitt und dem Radius θ_0 , so läßt sich dies formal schreiben als⁶

$$d(\theta_0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta < \theta_0 \\ 0, & \theta_0 < \theta \leq \pi \end{cases}. \quad (\text{A.107})$$

Mit $y := \cos \theta$ und $y_0 := \cos \theta_0$ erhält man

$$d(\arccos y) = \begin{cases} 1, & 1 \geq y > y_0 \\ 0, & y_0 > y \geq -1 \end{cases}. \quad (\text{A.108})$$

Aus (2.153) folgt

$$D^n(y_0) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{y_0}^1 P^n(y) dy. \quad (\text{A.109})$$

⁶In diesem Abschnitt ist θ *nicht* der Beobachtungsort, sondern die veränderliche Variable.

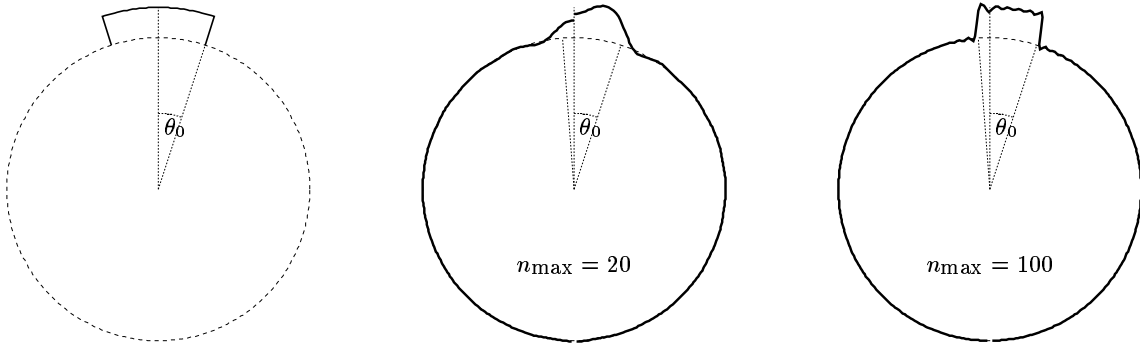


Abb. A.6: Auflast mit rechtwinkligem Querschnitt. Die mittlere und rechte Darstellung zeigen jeweils die Entwicklung der Last nach Legendre-Polynomen bis zum Grad n_{\max} für eine Last mit 500 km Lastradius (links) bzw. 2000 km Lastradius (rechts).

Dieses Integral läßt sich für $P^{n=0}(y) = 1$ sofort lösen. Für $n > 1$ ergibt sich mit (A.14) und $P^n(1) = 1$ (Longman, 1962)

$$D^n(y_0 = \cos \theta_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - y_0) & , n = 0 \\ \frac{1}{2}[P^{n-1}(y_0) - P^{n+1}(y_0)] & , n > 0 \end{cases} . \quad (\text{A.110})$$

Hobson (1955) zeigte, daß sich an der Sprungstelle $\theta_0 = \theta$ aus (A.110) der Wert $1/2$ ergibt, so daß auch hier die Konvergenz gewahrt bleibt.

A.4.2 Parabolischer Querschnitt

Ist die Last eine Kappe mit parabolischem Querschnitt und dem Radius θ_0 , so läßt sich dies formal schreiben als (Wolf, ohne Jahr)

$$d(\theta_0) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}\right)^2 & , 0 \leq \theta < \theta_0 \\ 0 & , \theta_0 < \theta \leq \pi \end{cases} . \quad (\text{A.111})$$

Mit $y := \cos \theta$ und $y_0 := \cos \theta_0$ erhält man:

$$d(\arccos y) = \begin{cases} \frac{y^2}{1-y_0^2} - \frac{y_0^2}{1-y_0^2} & , 1 \geq y > y_0 \\ 0 & , y_0 > y \geq -1 \end{cases} , \quad (\text{A.112})$$

für $1 \geq y > y_0$ kann man auch schreiben

$$d(\arccos y) = \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(2)}D^n(y) P^n(y)}_{=y^2} - \cot^2 \theta_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(0)}D^n(y) P^n(y)}_{=1} . \quad (\text{A.113})$$

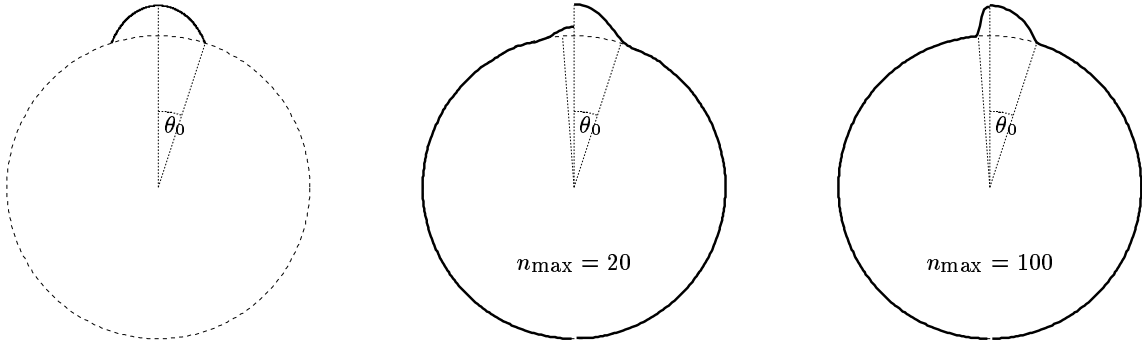


Abb. A.7: Auflast mit parabelförmigem Querschnitt. Die mittlere und rechte Abbildung zeigen jeweils die Entwicklung der Last nach Legendre-Polynomen bis zum Grad n_{\max} für eine Last mit 500 km Lastradius (linke Bildhälfte) bzw. 2000 km Lastradius (rechte Bildhälfte).

$(0)D^n$ wurde bereits im vorherigen Kapitel berechnet, für $(2)D^n$ gilt nach (2.153)

$$\begin{aligned}
 (2)D^n &= (n + \frac{1}{2}) \int_{y_0}^1 y^2 P^n dy = \frac{1}{2} \int_{y_0}^1 y^2 \frac{dP^{n+1}}{dy} dy - \frac{1}{2} \int_{y_0}^1 y^2 \frac{dP^{n-1}}{dy} dy \\
 &= \frac{1}{2(2n+3)} \underbrace{\left(\int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^{n+2}}{dy^2} dy - \int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^n}{dy^2} dy \right)}_{q_1} + \frac{1}{2(2n-1)} \underbrace{\left(\int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^{n-2}}{dy^2} dy - \int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^n}{dy^2} dy \right)}_{q_2}.
 \end{aligned} \tag{A.114}$$

Mit zweimaliger partieller Integration und (A.14) ergeben sich

$$\begin{aligned}
 \int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^n}{dy^2} dy &= [y^2 \frac{dP^n}{dy} - 2yP^n]_{y_0}^1 + \frac{2}{2n+1} [P^{n-1}(y_0) - P^{n+1}(y_0)], \\
 \int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^{n+2}}{dy^2} dy &= [y^2 \frac{dP^{n+2}}{dy} - 2yP^{n+2}]_{y_0}^1 + \frac{2}{2n+5} [P^{n+1}(y_0) - P^{n+3}(y_0)], \\
 \int_{y_0}^1 y^2 \frac{d^2 P^{n-2}}{dy^2} dy &= [y^2 \frac{dP^{n-2}}{dy} - 2yP^{n-2}]_{y_0}^1 + \frac{2}{2n-3} [P^{n-3}(y_0) - P^{n-1}(y_0)].
 \end{aligned} \tag{A.115}$$

Nach erneuter Anwendung von (A.14) folgt

$$\begin{aligned}
 q_1 &= [(2n+3)y^2 P^{n+1} - 2y(P^{n+2} - P^n)]_{y_0}^1 \\
 &\quad + \frac{2}{2n+5} [P^{n+1}(y_0) - P^{n+3}(y_0)] - \frac{2}{2n+1} [P^{n-1}(y_0) - P^{n+1}(y_0)] \\
 &= (2n+3) - 2y_0 P^n(y_0) + P^{n+1}(y_0) \left[\frac{4(2n+3)}{(2n+5)(2n+1)} - (2n+3)y_0^2 \right] \\
 &\quad + 2y_0 P^{n+2}(y_0) - \frac{2}{2n+5} P^{n+3}(y_0) - \frac{2}{2n+1} P^{n-1}(y_0), \\
 q_2 &= [-(2n-1)y^2 P^{n-1} - 2y(P^{n-2} - P^n)]_{y_0}^1 \\
 &\quad + \frac{2}{2n-3} [P^{n-3}(y_0) - P^{n-1}(y_0)] - \frac{2}{2n+1} [P^{n-1}(y_0) - P^{n+1}(y_0)] \\
 &= -(2n-1) - 2y_0 P^n(y_0) + P^{n-1}(y_0) \left[(2n-1)y_0^2 - \frac{4(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)} \right] \\
 &\quad + 2y_0 P^{n-2}(y_0) + \frac{2}{2n-3} P^{n-3}(y_0) + \frac{2}{2n+1} P^{n+1}(y_0)
 \end{aligned} \tag{A.116}$$

und schließlich mit (A.114)

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}D^n(y_0 = \cos \theta_0) &= \frac{P^{n-3}(y_0)}{(2n-3)(2n-1)} - \frac{P^{n+3}(y_0)}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{3P^{n-1}(y_0)}{(2n-3)(2n+3)} + \frac{3P^{n+1}(y_0)}{(2n-1)(2n+5)} \\
&+ \left[\frac{P^{n-2}(y_0)}{2n-1} + \frac{P^{n+2}(y_0)}{2n+3} - \frac{2(2n+1)P^n(y_0)}{(2n-1)(2n+3)} \right] y_0 \\
&+ [P^{n-1}(y_0) - P^{n+1}(y_0)] \frac{y_0^2}{2}, \quad n \geq 3.
\end{aligned} \tag{A.117}$$

Für $n < 3$ ergeben sich unmittelbar

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}D^0(y_0 = \cos \theta_0) &= \frac{1}{2} \int_{y_0}^1 y^2 dy &= \frac{1}{6}(1 - y_0^3), \\
{}^{(2)}D^1(y_0 = \cos \theta_0) &= \frac{3}{2} \int_{y_0}^1 y^3 dy &= \frac{3}{8}(1 - y_0^4), \\
{}^{(2)}D^2(y_0 = \cos \theta_0) &= \frac{5}{2} \int_{y_0}^1 \frac{1}{2}(3y^2 - 1)y^2 dy &= \frac{1}{12}(4 + 5y_0^3 - 9y_0^5).
\end{aligned} \tag{A.118}$$

B. Numerisches Verfahren

Eine Hauptaufgabe im Rahmen dieser Arbeit bestand in der Programmierung eines numerischen Verfahrens zur Berechnung von Deformationen, Geoidänderungen und Gravitationsänderungen durch eine Auflast. Die zugrundeliegende Theorie ist in Kap. 2 beschrieben. In diesem Anhang wird zunächst auf den Quellcode eingegangen (Abschnitt B.1), anschließend wird die Benutzung des Programms mit Hilfe eines „Kochbuchs“ beschrieben (Abschnitt B.2). Die Programmierung der „sea-level equation“ ist in Abschnitt B.3 beschrieben.

B.1 Quellcode

Die beiden Programme `mulincovis` (MUlti Layer INCOmpressible VIscOelastic Sphere) und `mulocovis` (MUlti Layer lOcal inCOmpressible VIscOelastic Sphere) berechnen die Deformation durch eine Auflast. Die Programme sind in C++ geschrieben und sollten auf jeder UNIX-Plattform laufen (getestet sind sie, neben der Entwicklungsumgebung Linux, auch unter SUN-OS).

Abb. B.1 gibt einen Überblick über die Verknüpfung der einzelnen Funktionen des Programms `mulincovis`. Nahezu jede Funktion ist in einer eigenen, gleichnamigen Datei enthalten, was die Wartung und Weiterentwicklung des Programmes vereinfacht. Eine Ausnahme bilden nur Funktionen, die so eng zusammengehören, daß durch eine Aufteilung in mehrere Dateien die Lesbarkeit und das Verständnis für einzelne Funktionen verloren ginge. Für das Programm `mulocovis` werden die Quellcodes für die Funktionen 'prop', 'g_r', 'rho_r' und 'kappa_r' durch gleichnamige Funktionen aus den Dateien 'prop-b', 'g_r-b', 'rho_r-b' und 'kappa_r-b' ersetzt. (Dies wird während der Kompilierung automatisch erledigt.)

Außer der in Kapitel 2 beschriebenen Theorie weist das Programm noch einige Besonderheiten auf:

- Neben der Maxwell-Rheologie kann auch die Burgers-Rheologie verwendet werden.¹
- Für einen flüssigen Kern werden die Randbedingungen von Wu (1990), Gleichung (15) verwendet.
- Im Falle eines inkompressiblen Maxwellkörpers kann die Ableitung von $\det T_{ij}^n(s)$ analytisch berechnet werden (siehe nächsten Absatz).

Die Ableitung von $\det T_{ij}^n(s)$ in (2.119) läßt sich im materiell inkompressiblen Fall nach Martinec & Wolf (1998) schreiben als

$$[\det T_{ij}^n(s)]_{,s} = \sum_{i,j=1}^3 {}^*T_{ij}^n(s)[T_{ij}^n(s)]_{,s}, \quad (\text{B.1})$$

¹Die notwendige Implementation wurde mit Hilfe von Sibylle Göbell erarbeitet (Göbell *et al.*, 1999).

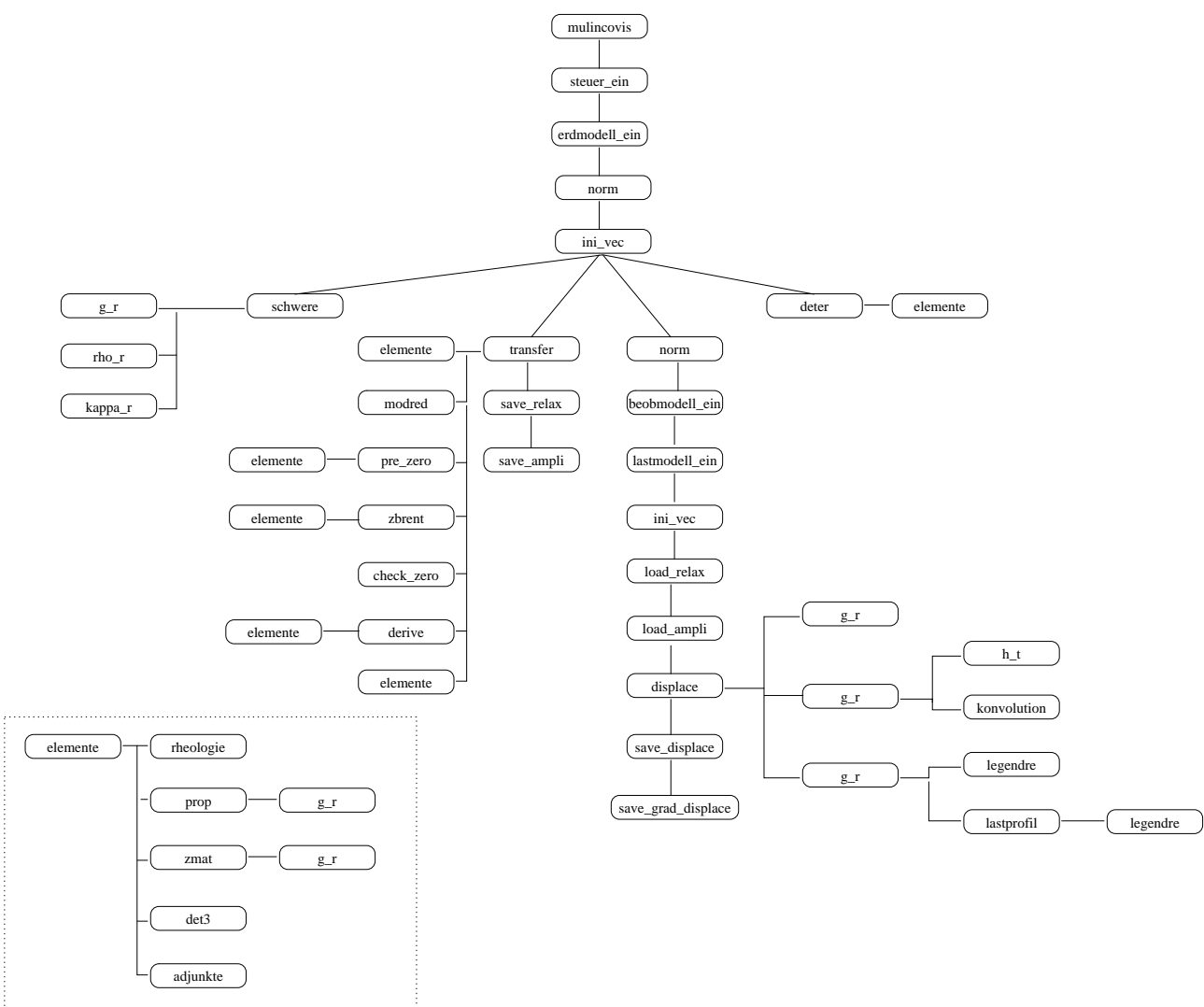


Abb. B.1: Schematischer Verlauf des Programmes mulincovis.

mit (2.110) folgt

$$[T_{ij}^n(s)]_{,s} = [{}^{\Pi}P_{ik}^n(r_K, r_1, s)]_{,s} Z_{kj}^n(r_1, s) + {}^{\Pi}P_{ik}^n(r_K, r_1, s) [Z_{kj}^n(r_1, s)]_{,s}. \quad (\text{B.2})$$

Die Ableitung im ersten Summanden erhält man aus (2.104), die des zweiten aus (2.98), und es ergibt sich

$$\begin{aligned} [T_{ij}^n(s)]_{,s} = & \frac{1}{s^2} \sum_{k=2}^K \left\{ {}^{\Pi}P_{ij}^n(r_K, r_k, s) \frac{1}{\eta_k} [m_k^2 P_{ij}^{(1)n}(r_k, r_{k-1}) \right. \\ & \left. - P_{ij}^{(-1)n}(r_k, r_{k-1})] {}^{\Pi}P_{ij}^n(r_{k-1}, r_1, s) \right\} Z_{ij}^n(r_1, s) \\ & + \frac{m_1^2}{\eta_1 s^2} {}^{\Pi}P_{ij}^n(r_K, r_1, s) Z_{ij}^{(1)n}(r_1), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

wobei T_{ij}^* die zu T_{ij} adjungierte Matrix ist, und die (6×3) -Matrix Z_{ij} aus der 1., 2. und 3. Spalte der Matrix M_{ij}^n besteht. Zusätzlich wird die Ableitung von (2.117) benötigt:

$$(sm_k)_{,s} = \left(\frac{s\mu_k}{s + \frac{\mu_k}{\eta_k}} \right)_{,s} = \frac{m_k^2}{\eta_k s^2}. \quad (\text{B.4})$$

Zunächst muß das komplette Programmpaket entpackt und kompiliert werden. Getestet wurde letzteres mit dem GNU C++ Compiler 2.95.2 und der GNU `make` Version 3.79.1. Es reicht in dem Verzeichnis mit den Quellcodes den Befehl `make` einzutippen, um die folgenden Programme zu erzeugen:

<code>mulincovis</code>	Berechnet die Übertragungsfunktion und die Transformation in den Raumbereich für ein n -schichtiges, inkompressibles Erdmodell und eine Auflast an beliebigen Beobachtungsorten und zu beliebigen Zeiten. Damit können die (auflastinduzierte) Radialverschiebung, Geoidhöhe und das materielle Gravitationsinkrement berechnet werden.
<code>mulocovis</code>	Wie oben, jedoch für ein lokal inkompressibles Erdmodell.
<code>koeff-ellipse</code>	Berechnet die Kugelflächenfunktionskoeffizienten D^{nm} für eine Last mit kreisförmiger oder elliptischer Grundfläche und verschiedenen Querschnitten.
<code>koeffizienten-ea</code>	Berechnet die Kugelflächenfunktionskoeffizienten D^{nm} für eine Last, die in einer Datei tabelliert ist.
<code>testsum</code>	Summation der mit <code>koeff-ellipse</code> (oder <code>koeffizienten-ea</code>) berechneten Koeffizienten, nur für Testzwecke.
<code>g-r-beta</code>	Berechnet für vorgegebene Radialabstände und Schwerewerte (z.B. aus dem PREM) die entsprechende Dichteschichtung. Im Fall eines lokal inkompressiblen Körpers muß zusätzlich die Dichte an der Unterseite oder die Dichte an der Oberseite einer Schicht angegeben werden.
<code>rho-search</code>	Verwendet <code>g-r-beta</code> , um Mittelwerte für die von <code>mulocovis</code> benötigten Parameter α und β zu finden. (Optimierung eines Erdmodells gemäß der PREM-Dichte.)

B.2 „Kochbuch“ zur Berechnung von Störungen

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Anleitung zur Benutzung der Programme `mulincovis` und `mulocovis`.

B.2.1 Steuerdatei

Zunächst muß eine Steuerdatei `steuerfile.sph` angelegt werden. Dieses besteht aus einem Integerwert, der angibt, wieviele Datensätze bearbeitet werden sollen, gefolgt von den einzelnen Datensätzen. Jeder Datensatz besteht aus einem Erdmodell, einem Eismodell und einer Datei, in der die Beobachtungsorte und -zeiten enthalten sind. Wenn die Kugelflächenfunktionskoeffizienten der Last nicht innerhalb des Programmes berechnet werden können (dies ist nur bei radialsymmetrischen Lasten mit rechteckigem oder stehend-parabolischem Querschnitt möglich), ist zusätzlich die Angabe einer Koeffizientendatei für die Last nötig. Wird auch eine Ozeanlast berücksichtigt, so müssen zwei weitere Dateien angegeben werden: eine mit dem Modell, eine mit den Koeffizienten. Beispiel:

2

```
erd_C+M+L    ice_history    beo_OZ    koef_ice    ocean_history    koef_ocean
erd_C+M+L    lastmodel-2    beo_OZ    koef_ice    ocean_history    koef_ocean
```

Im folgenden werden die Formate der einzelnen Eingabedateien beschrieben. Grundsätzlich gilt für alle Parameter, die nicht angegeben werden, daß deren Wert implizit auf 0 gesetzt wird.

B.2.2 Erdmodell

Die erste Spalte der folgenden Tabelle gibt an, welche Parameter in der Datei, die das Erdmodell beschreibt, enthalten sind. Sind in der zweiten Spalte Werte angegeben, so ist jeweils genau einer davon anzugeben, die dritte Spalte enthält eine kurze Beschreibung des Parameters.

<code>mod</code>	0	$g(r)$ berechnen (nur zu Testzwecken).
	1	Übertragungsfunktion (Relaxationszeiten und Amplituden) berechnen.
	2	Rücktransformation in den Raumbereich.
	3	Übertragungsfunktion und Rücktransformation berechnen.
	5	$\det T_{ij}^n(s)$ für einen festen Grad n berechnen, in diesem Fall wird n an der Standardeingabe eingegeben.
<code>erdaus</code>	1	Ausgabe des eingelesenen Erdmodells auf der Standardausgabe.
	0	Keine Ausgabe.
<code>nmin</code>		Minimaler und maximaler Grad, für den die Relaxationszeiten und Amplituden berechnet werden.
<code>nmax</code>		
<code>sstart</code>		Nullstellensuche wird in dem Intervall <code>[sstart-smax, sstart+smax]</code>
<code>smax</code>		mit dem Iterationsschritt <code>sstep</code> durchgeführt.
<code>sstep</code>		
<code>ampsave</code>	1	Speichern der Amplituden für die Radialverschiebung.
	5	Speichern der Amplituden für das potentielle Inkrement.
	0	Speichern beider Amplituden.
<code>love</code>	0	Berechnung der Amplituden.
	1	Berechnung der Loveschen Zahlen.
<code>i_anno</code>	0	Keine Umnormierung der Viskosität.
	1	Interne Normierung der Viskosität bezüglich Pa a.
<code>polheb</code>	0	Polstellen nicht beseitigen.

	1	Polstellen der Determinante durch Multiplikation mit dem Nenner beseitigen (nur bei Maxwellrheologie).
derive	0	Numerische Differentiation von $\det T_{ij}^n(s)$.
	1	Analytische Differentiation von $\det T_{ij}^n(s)$ (nur bei Maxwell-Rheologie).
moden		Anzahl der Moden des Erdmodells.
layer		Anzahl der Schichten des Erdmodells (dieser Parameter muß als letztes vor der Angabe der einzelnen Schichten stehen).
Die einzelnen Schichten des Erdmodells bestehen aus folgenden Parametern:		
typ	0	Flüssige Rheologie (nur für den Kern).
	1	Elastische Rheologie.
	2	Viskoelastische Maxwell-Rheologie.
	3	Viskoelastische Burgers-Rheologie.
rho		Dichte (kg/m^3) an der Unterseite einer Schicht .
beta		Parameter, der die Dichteabnahme mit der Tiefe beschreibt.
mu		Schermodul (Pa).
eta		Viskosität (Pa s).
mu2		Zweiter Schermodul, nur bei Burgers-Rheologie.
eta2		Zweite Viskosität, nur bei Burgers-Rheologie.
rad		Radius (m).

Beispiel für ein dreischichtiges Erdmodell mit flüssigem Kern, viskoelastischem Mantel und elastischer Lithosphäre:

```

mod      1
nmin     2
nmax     200
sstart   -10
smax     4
sstep    1e-2
erdaus   0
ampsave  0
love     0
i_anno   0
polheb   1
derive   2
moden    3
layer    3

typ      0
rho      10982
mu       1
eta      1
rad      3480e3
typ      2

```

rho	5786
beta	0.67247
mu	1.45e11
eta	1e21
rad	6291e3
typ	1
rho	3180
mu	0.67e11
eta	1e400
rad	6371e3

B.2.3 Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Lastquerschnitts

Für die Transformation in den Raumbereich muß zunächst festgelegt werden, wie das Lastmodell beschaffen ist. Besteht es aus radialsymmetrischen Lastscheiben mit rechteckigem oder stehend-parabolischem Querschnitt, kann die Berechnung der Koeffizienten übersprungen werden, da diese dann von dem Programm analytisch bestimmt werden. Soll jedoch eine radialsymmetrische Last mit anderem Querschnitt oder eine Last mit elliptischer Grundfläche verwendet werden, so müssen die Legendreentwicklungskoeffizienten vorher berechnet werden. Dies geschieht durch den Aufruf des Programmes `koeff-ellipse` mit folgenden Parametern:

```
koeff-ellipse n_max a b q file .
```

Dabei bezeichnen `n_max` den maximalen Grad, bis zu dem die Koeffizienten berechnet werden, `a` und `b` die große bzw. kleine Halbachse der Ellipse (in m), `q` den Lastquerschnitt und `file` die Datei, in der die Ergebnisse abgespeichert werden. Für `q` sind folgende Werte möglich:

- 1 rechteckiger Querschnitt.
- 2 stehend-parabolischer Querschnitt.
- 3 elliptischer Querschnitt.
- 4 glockenförmiger Querschnitt.
- 5 liegend-parabolischer Querschnitt.

Die Berechnung wird für jeden Grad n zwischen 0 und `n_max` und für jede Ordnung zwischen 0 und n durchgeführt.² Falls der Betrag der Koeffizienten (insbesondere für hohe Ordnungen) jedoch sehr klein wird, wird die Berechnung höherer Ordnungen für diesen Grad abgebrochen.

Eine weitere Möglichkeit, ein Lastmodell nach Kugelflächenfunktionen zu entwickeln, bieten die Programme `koeffizienten` und `koeffizienten-ea`. Ersteres liest aus einer Datei ein Lastmodell bestehend aus auf der Kugel verteilten Ellipsen ein und berechnet hierfür die Kugelflächenfunktionsentwicklung, letzteres liest Daten aus einer ASCII-Datei ein und führt für diese eine Kugelflächenfunktionsentwicklung durch. Das Format der Lastdatei für das Programm `koeffizienten` sieht wie folgt aus:

<code>i</code>	Anzahl der elliptischen Lastkappen.
<code>nr</code>	Nummer der Lastkappe.
<code>n_max</code>	Grad, bis zu dem für diese Lastkappe die Kugelflächenfunktionsentwicklung durchgeführt werden soll.

²Aufgrund der Symmetrie einer Ellipse gibt es keine negativen Ordnungen.

a	Große Halbachse.
b	Kleine Halbachse.
q	Querschnitt.
h	Höhe.
chi	Winkel gegen Nord-Süd-Achse.
theta	Latitude des Zentrums der Lastkappe.
phi	Longitude des Zentrums der Lastkappe.

Die Eingabedatei für das Programm `koeffizienten-ea` hat z.B. folgendes Format:

```

9 6
80 30 1
80 90 1
80 150 1
80 210 1
80 270 0
80 330 0
60 30 1
60 90 0
60 150 0
60 210 0
60 270 1
60 330 1
40 30 1
...
-80 210 0
-80 270 0
-80 330 0

```

Die erste Zahl gibt die Anzahl der Stützstellen entlang der Latitude, die zweite Zahl entlang der Longitude an. Es ist zu beachten, daß bei der Kugelflächenfunktionsentwicklung Aliasing vermieden wird (vgl. hierzu Seite 31).

B.2.4 Eismodell

Die erste Spalte der folgenden Tabelle gibt an, welche Parameter in der Datei, die das Lastmodell beschreibt, enthalten sind. Sind in der zweiten Spalte Werte eingetragen, so ist jeweils genau einer davon anzugeben, die dritte Spalte enthält eine kurze Beschreibung des Parameters.

lastaus	1	Ausgabe des eingelesenen Lastmodells auf die Standardausgabe.
	0	Keine Ausgabe.
rho		Dichte der Last. Wird dieser Parameter weggelassen (oder auf 0 gesetzt), so ist die Dichte bei den einzelnen Lastscheiben anzugeben.

heavy	0	Die Lastgeschichte besteht aus zeitlichen Abschnitten, die von einem Zeitpunkt zum nächsten <i>stetig</i> sind.
	1	Die Lastgeschichte entspricht einem instantanen Entlastungsprozeß, in diesem Fall muß tanz = 1 gewählt werden.
	2	Die Lastgeschichte besteht aus zeitlichen Abschnitten, die zu jedem Zeitpunkt tanz aus zwei Lasthöhen besteht. Hiermit können Heavisidebe- und entlastungen simuliert werden.
quer	0	Die Koeffizienten der Legendreentwicklung werden aus dem mit dem Programm koeff-ellipse (bzw. koeffizienten-ea oder koeffizienten) berechneten Dateien eingelesen. Dabei wird an den in der Steuerdatei steuerfile.sph angegebenen Dateinamen jeweils _i angehängt, wobei i der jeweiligen Nummer der Lastscheibe entspricht.
	1	Der Querschnitt der Last ist rechteckig.
	2	Der Querschnitt der Last ist stehend-parabolisch.
mmax		Maximale Ordnung, bis zu der koeff-ellipse (bzw. koeffizienten-ea , koeffizienten) die Koeffizienten berechnet hat. (Wird quer ≠0 gewählt, sollte hier eine 0 angegeben werden).
tanz		Anzahl der Zeitpunkte, für die eine Lasthöhe angegeben wird.

Es folgen die einzelnen Zeitpunkte:

danz Anzahl der Lastscheiben.

Jede Lastscheibe besteht aus folgenden Parametern:

num Nummer der Lastscheibe.

colat⁺ Latitude der Lastscheibe.

longi⁺ Longitude der Lastscheibe.

alpha⁺ Winkel zwischen der großen Halbachse der Last und der Nord-Süd-Achse (nur bei elliptischer Grundfläche der Last sinnvoll).

rho Dichte dieser Lastscheibe (wird nur verwendet, wenn die Dichte der Last nicht bereits oben angegeben wurde).

radius^{*} Radius der Lastscheibe (wird bei **quer**=0 ignoriert).

tanz Anzahl der Zeiten, zu denen die Lastscheibe eine nichtverschwindende Höhe hat.

Gefolgt von den einzelnen Zeiten und deren Höhe (in m).

*: wird nicht benötigt, wenn die Kugelflächenfunktionsentwicklung mit **koeff-ellipse**, **koeffizienten-ea** oder **koeffizienten** durchgeführt wurde.

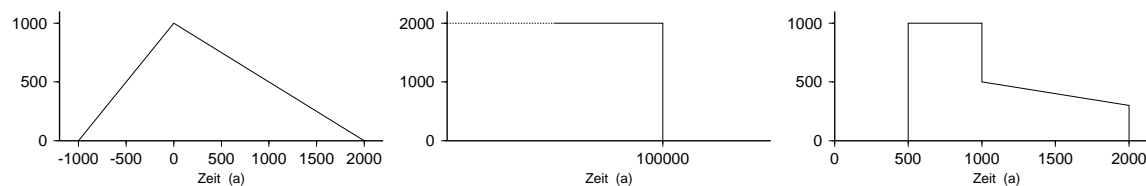
⁺: wird nicht benötigt, wenn die Kugelflächenfunktionsentwicklung mit **koeffizienten-ea** oder **koeffizienten** durchgeführt wurde.

Beispiele für einfache Lastmodelle:

lastaus	0	lastaus	0	lastaus	0
rho	910	rho	910	rho	910
heavy	0	heavy	1	heavy	2
quer	2	quer	2	quer	0
				mmax	28
tanz	3	tanz	1	tanz	3
-1000	0	100e3		500	1000
	2000				2000

danz	1	danz	1	danz	2
num	1	num	1	num	1
colat	0	colat	0	colat	0
longi	0	longi	0	longi	0
alpha	0	alpha	0	alpha	0
radius	3000e3	radius	1000e3		
tanz	1	tanz	1	tanz	2
0	1000	100e3	2000	500	0 1000
				1000	1000 500
				num	2
				colat	0
				longi	0
				alpha	0
				tanz	2
				1000	1000 500
				2000	300 0

Die Lastgeschichten dieser drei Beispiele sehen wie folgt aus:



B.2.5 Beobachtungsorte und -zeiten

Die erste Spalte der folgenden Tabelle gibt an, welche Parameter in der Datei, die die Beobachtungsorte und Zeiten beschreibt, enthalten sind. Sind in der zweiten Spalte Werte eingetragen, so ist jeweils genau einer davon anzugeben, die dritte Spalte enthält eine kurze Beschreibung des Parameters:

beoaus	0	Ausgabe des eingelesenen Beobachtungsmodells.
	1	Keine Ausgabe.
ober	0	Berechnung der Werte an jeder Grenzschicht.
	1	Berechnung der Werte an der Oberfläche.
grad_m	0	Angabe der Positionen, der Beobachtungsorte und der Lastscheiben in geographischen Koordinaten, Orte auf der Südhalbkugel müssen mit einem Minus vor dem Parameter colat angegeben werden. Die Kugelflächenfunktionsentwicklung der Last sollte mit dem Programm koeffizienten und/oder koeffizienten-ea durchgeführt worden sein.
	1	Angabe der Positionen der Beobachtungsorte und der Lastscheiben in geographischen Koordinaten, Orte auf der Südhalbkugel müssen mit einem Minus vor dem Parameter colat angegeben werden. Es werden die Entfernungen und Winkel zu den einzelnen Lastscheiben berechnet.
	2	Angabe der Entfernung zum Lastzentrum (= Nordpol) in km (nur zu Testzwecken) .

oanz Anzahl der einzulesenden Beobachtungsorte.
 Es folgen die einzelnen Beobachtungsorte:
 num Nummer des Beobachtungsortes.
 colat Latitude des Beobachtungsortes.
 longi Longitude des Beobachtungsortes.
 zanz Anzahl der einzulesenden Beobachtungszeiten.
 Es folgen die einzelnen Beobachtungszeiten

Beispiel:

```

beoaus  0
ober    1
grad_m  2
oanz    2
num     1
colat   0
longi   0
num     2
colat   500e3
longi   0
zanz    8
  499 500 501
 1000 1001 2000
 2001 2005

```

B.2.6 Dateien zur Berücksichtigung der Ozeanlast

Die Datei, in der die Ozeanlast beschrieben ist, ist formal identisch mit der, in der die Last beschrieben wird (Abschnitt B.2.4). Die Berechnung der Koeffizientendatei muß mit dem Programm `koeffizienten-ea` durchgeführt werden (Abschnitt B.2.3).

B.3 Programmierung der „sea-level equation“

Für die Programmierung der „sea-level equation“ ist eine Kenntnis des Küstenverlaufs bzw. der Topographie nötig. Hier wird die ETOPO5-Datenbasis verwendet.³ Diese muß als Grid-Datei im NetCDF-Format bereitgestellt werden. Zur Bearbeitung dieses Formates ist es notwendig, das GMT-Programmpaket von Wessel & Smith (1995) zu installieren. Außerdem muß die Kugelflächenfunktionsentwicklung der Last bereits durchgeführt worden sein.⁴ Um sicherzustellen, daß vereiste Gegenden nicht vom Ozean bedeckt werden, muß die räumliche Verteilung des Eises ebenfalls in einer Grid-Datei vorliegen.⁵ Außerdem werden die Unix-Programme `echo`, `awk`, `tail`,

³Die Position dieser Datei muß in der Datei `real_ocean.C` angegeben werden.

⁴Die Position dieser Dateien wird in `load_koef.C` angegeben.

⁵Die Position dieser Dateien wird ebenfalls in `load_koef.C` angegeben.

grep, paste, cp, rm und gv verwendet.⁶

In diesem Abschnitt wird die numerische Realisierung der „sea-level equation“ erläutert. Abb. B.2 zeigt den Programmaufbau schematisch. Die Äste mit gestrichelten Linien werden verwen-

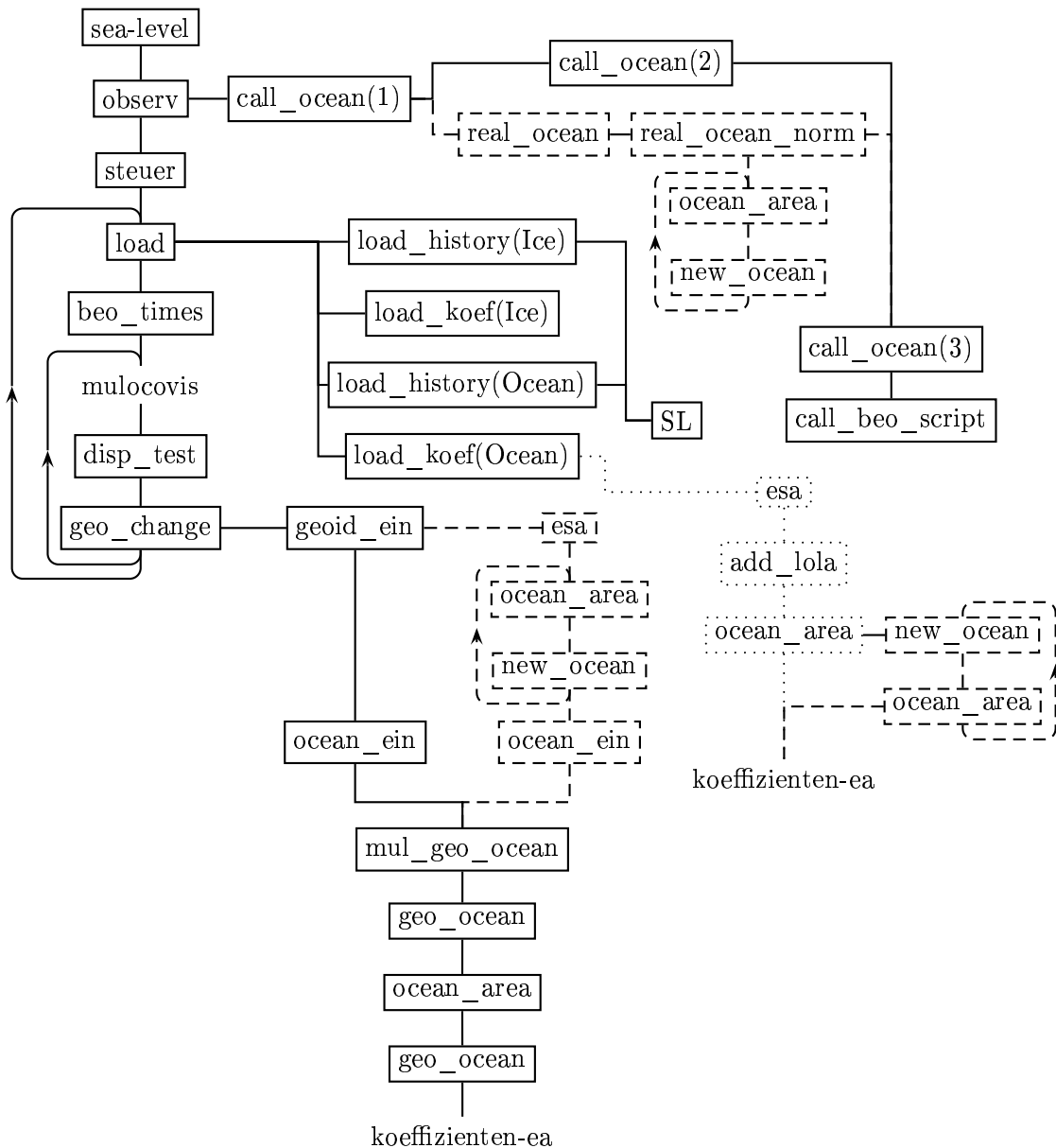


Abb. B.2: Schematischer Aufbau des Programmes `sea-level`, zur Erklärung siehe Text.

det, wenn variable Küstenlinien berücksichtigt werden sollen. Das Programm `sea-level` wird durch Optionen in der Datei `sea-level-top-dekla.h` gesteuert, diese werden im folgenden kurz erläutert.

EARTH_MODEL Der Name des Erdmodells, die Amplituden und Relaxationszeiten müssen vorher berechnet worden sein, der Parameter `mod` im Erdmodell muß auf '2' gesetzt sein, der Parameter `nmax` sollte mit dem Parameter `NMAX` übereinstimmen.

⁶Bis auf `gv` gehören alle Programme zu jeder Unix-Installation. Sollte das Programm `gv` nicht verfügbar sein, so kann auch `ghostview` verwendet werden. In diesem Fall sollte dann ein entsprechender Link gesetzt werden (z.B. `ln -s /usr/bin/ghostview /usr/bin/gv`).

NMAX	Maximaler Grad, bis zu dem die Summation durchgeführt wird, hängt von THETA_STEP ab: $NMAX=180/THETA_STEP$.
PROGRAMM	Entweder <code>mulincovis</code> (für inkompressible Erdmodelle) oder <code>mulocovis</code> (für kompressible Erdmodelle).
THETA_STEP	Abstand der Latituden.
PHI_STEP	Abstand der Longituden, muß mit THETA_STEP identisch sein.
LOAD	Auswahl des Lastmodells.
Von den folgenden beiden Parametern muß genau einer gewählt werden.	
OCEAN	Die Küstenlinien entsprechen dem heutigen Stand.
MOV_COAST	Die Küstenlinien sind variabel.
Die folgenden Optionen spielen nur dann eine Rolle, wenn MOV_COAST gewählt wurde	
MAXESA	Dieser Parameter gibt die Höhe in m ü. NN an, bis zu der die Radialverschiebung und Geoidhöhe berechnet werden sollen. Für alle Punkte, die höher liegen, wird angenommen, daß sie zu keiner Zeit von Wasser bedeckt sind.
GEO_ESA	Wird dieser Parameter auf 1 gesetzt, so wird eine gleichmäßige Verteilung des Eisvolumens auf den Ozean angenommen (Näherung). Wird dieser Parameter auf 2 gesetzt, so paßt sich das in den Ozean fließende Schmelzwasser dem Geoid an

Die einzelnen Funktionen des Programms `sea-level` werden im folgenden kurz erläutert:

<code>call_ocean(1)</code>	Ruft das Programm <code>ocean</code> auf und erzeugt damit ein gleichmäßiges Gitter über die Kugel und speichert es in der Datei <code>„beo_orte,„</code>
<code>call_ocean(2)</code>	Ruft das Programm <code>ocean</code> auf und erzeugt mit Hilfe des Programms <code>grdlandmask</code> aus dem GMT-Paket (Wessel & Smith, 1995) eine Ozean-Funktion in der Datei <code>'ocean.data'</code> .
<code>real_ocean</code>	Erzeugt eine Topographie/Bathymetry an den Gitterpunkten anhand der ETOPO5 Datenbasis ⁷ und speichert diese in der Datei <code>'ocean.data'</code> .
<code>real_ocean_norm</code>	Legt das Nullniveau der Topographie/Bathymetry anhand des heute vorhandenen Eisvolumens fest, speichert dieses in der Datei <code>'ocean.data__'</code> und erzeugt eine Ozeanmaske in der Datei <code>'ocean.data_'</code> . Die Schleife über die beiden Programme <code>ocean_area</code> (berechnet die Ozeanoberfläche) und <code>new_ocean</code> (führt die Normierung des Nullniveaus anhand des Eisvolumens und der Ozeanoberfläche durch) wird solange durchlaufen, bis eine hinreichende Konvergenz erreicht ist (i.A. drei Durchläufe).
<code>call_ocean(3)</code>	Speichert die Orte, die auf dem Ozean liegen (oder die, die es vielleicht einmal werden, gesteuert durch den Parameter MAXESA) in der Datei <code>'beo_earth_ocean'</code> .
<code>call_beo_script</code>	Graphische Kontrolle der Ozean-Landverteilung.
<code>load_history(Ice)</code>	Schreibt die Lastgeschichte des Eises.
<code>load_koef(Ice)</code>	Kopiert die Koeffizientendateien der Kugelflächenfunktionsentwicklung des Eises aus dem in der Datei <code>'load_koef.C'</code> angegebenen in das aktuelle Verzeichnis.

⁷Diese Datenbasis muß in dem GMT-gridformat vorliegen.

<code>load_history(Ocean)</code>	Schreibt die Lastgeschichte des Ozeans.
<code>SL</code>	Steht für eine spezielle Last, die durch den Parameter <code>LOAD</code> in der Datei 'sea-level-top-dekla.h' ausgewählt wird.
<code>load_koef(Ocean)</code>	Kopiert die Koeffizientendatei der Ozeanlast, die für den vorherigen Zeitpunkt als Ergebnis ermittelt worden ist, als neue Startlastverteilung. Nur für den ersten Zeitpunkt wird die Kugelflächenfunktionsentwicklung explizit durchgeführt (gepunktete Linien).
<code>esa</code>	Ermittelt das aktuelle (zu dem entsprechenden Zeitpunkt gehörende) Eisvolumen.
<code>add_lola</code>	Ergänzt die Datei 'ocean.data', in der die Topographie/Bathymetry enthalten ist, um eine Zeile, in der die Anzahl der Stützstellen entlang der Latitude bzw. Longitude enthalten ist, und speichert diese als 'ocean.data__'.
<code>ocean_area</code>	Berechnet die Ozeanoberfläche. Die Schleife über <code>new_ocean</code> und <code>ocean_area</code> wird nur durchlaufen, wenn der Parameter <code>MOV_COAST</code> gesetzt ist.
<code>koeffizienten-ea</code>	Ist ein Programmaufruf, der die Kugelflächenfunktionsentwicklung der Ozeanlast berechnet.
<code>beo_times</code>	Kopiert die Datei 'beo_earth_ocean' nach 'beo_earth_ocean_times' und ergänzt diese um den zu berechnenden Zeitpunkt.
<code>mulocovis</code>	Ist ein Programmaufruf, der die Radialverschiebung und die Geoidänderung berechnet.
<code>disp_test</code>	Testet, ob Konvergenz bei der Berechnung der Radialverschiebung und der Geoidstörung vorliegt und die Abbruchbedingung erfüllt ist.
<code>geo_change</code>	Berechnet aus der Radialverschiebung und der Geoidhöhe eine neue Ozean-Lastverteilung, im einzelnen:
<code>geoid_ein</code>	Lieft die Geoidhöhe und die Radialverschiebung ein.
<code>ocean_ein</code>	Lieft die Ozeanfunktion ein; im Falle von variablen Küstenlinien wird die Ozeanfunktion zunächst aus dem Volumen des Eises (Rückgabewert der Funktion <code>esa</code>) und der Ozeanoberfläche iterativ bestimmt.
<code>mul_geo_ocean</code>	Berechnet die Funktion: $f(\theta, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{Land} \\ e_r - u_r, & \text{Wasser} \end{cases}$.
<code>geo_ocean</code>	Speichert die Funktion $f(\theta, \varphi)$ ab.
<code>ocean_area</code>	Integral über die Funktion $f(\theta, \varphi)$. Damit kann dann zunächst (5.9) berechnet werden und anschließend in (5.7) eingesetzt werden.
<code>geo_ocean</code>	Speichert die neuen Ozeanlast.
<code>koeffizienten-ea</code>	Ist ein Programmaufruf, der die Kugelflächenfunktionsentwicklung der Ozeanlast berechnet.

C. Island

C.1 Eismodelle

Nr.	a_i	b_i	h_i	t_{i-1}	t_i	t_{i+1}	F_i	V_i
	(km)	(km)	(m)	(Jahre AD)			(km ²)	(km ³)
1	72.68	37.66	918.114	$-\infty$	1890.00	1901.25	8599	4211
2	72.52	37.58	917.100	1890.00	1901.25	1912.50	8561	4188
3	72.36	37.50	916.086	1901.25	1912.50	1923.75	8525	4166
4	72.20	37.41	915.071	1912.50	1923.75	1935.00	8485	4142
5	72.04	37.33	914.057	1923.75	1935.00	1946.25	8449	4119
6	71.88	37.25	913.043	1935.00	1946.25	1957.50	8412	4097
7	71.72	37.17	912.029	1946.25	1957.50	1968.75	8375	4072
8	71.56	37.08	911.014	1957.50	1968.75	1980.00	8336	4051
9	71.40	37.00	910.000	1968.75	1980.00	∞	8299	4029

Tab. C.1: Parameter des Eismodells VATNA-1. Dabei sind a_i und b_i die große bzw. kleine Halbachse der Ellipse, h_i die axiale Eismächtigkeit; t_{i-1} , t_i und t_{i+1} die Zeiten, zu denen die Eiskappe zu wachsen beginnt, ihre maximale Mächtigkeit erreicht bzw. wieder abgetaut ist, F_i und V_i die Grundfläche bzw. das Volumen der Eiskappe. Der Mittelpunkt der elliptischen Eiskappen liegt bei 16.80°W und 64.38°N , die große Halbachse ist jeweils um 107° gegen die Nord-Süd-Achse gedreht, als Querschnitt wird eine liegende Parabel verwendet.

Nr.	a_i (km)	b_i (km)	h_i (m)	t_{i-1}	t_i (Jahre AD)	t_{i+1}	F_i (km ²)	V_i (km ³)
1	62.90	32.60	854.000	$-\infty$	1200.00	1286.25	6442	2934
2	64.01	33.24	862.000	1200.00	1286.25	1372.50	6684	3073
3	65.28	33.83	870.000	1286.25	1372.50	1406.25	6938	3220
4	66.41	34.49	878.000	1372.50	1406.25	1475.00	7196	3370
5	67.63	35.12	886.000	1406.25	1475.00	1543.75	7462	3526
6	68.85	35.75	894.000	1475.00	1543.75	1612.50	7733	3687
7	70.09	36.40	902.000	1543.75	1612.50	1681.25	8015	3856
8	71.34	37.05	910.000	1612.50	1681.25	1750.00	8304	4031
9	72.68	37.66	918.114	1681.25	1750.00–1890.00	1901.25	8599	4211
10	72.52	37.58	917.100	1890.00	1901.25	1912.50	8561	4188
11	72.36	37.50	916.086	1901.25	1912.50	1923.75	8525	4166
12	72.20	37.41	915.071	1912.50	1923.75	1935.00	8485	4142
13	72.04	37.33	914.057	1923.75	1935.00	1946.25	8449	4119
14	71.88	37.25	913.043	1935.00	1946.25	1957.50	8412	4097
15	71.72	37.17	912.029	1946.25	1957.50	1968.75	8375	4072
16	71.56	37.08	911.014	1957.50	1968.75	1980.00	8336	4051
17	71.40	37.00	910.000	1968.75	1980.00	∞	8299	4029

Tab. C.2: Wie Tab. C.1, jedoch für Eismodell VATNA-2.

C.2 Beobachtungsdaten

Nr.	Bez.	Latitude			Longitude			Höhe	Landhebungsrate
		grad	min.	sec.	grad	min.	sec	in m ü.NN	in mm/a
1	HERD	63	57	34	18	40	6	771.51	5 ± 3
2	ELDH	63	41	5	18	21	26	146.11	5 ± 3
3	TEIG	63	52	53	17	45	31	105.58	2 ± 3
4	INGO	63	48	10	16	39	3	116.61	5 ± 3
5	FAGU	63	52	29	16	39	7	90.88	5 ± 2
6	SVIN	63	57	43	16	51	36	144.52	2 ± 3
7	KVIS	63	55	42	16	30	4	137.46	2 ± 2
8	BREI	64	2	38	16	22	41	87.86	5 ± 2
9	HROL	64	7	6	16	4	33	92.91	5 ± 2
10	UPPS	64	12	30	15	43	23	105.95	1 ± 2
11	HOFF	64	25	5	15	23	41	123.17	2 ± 1
12	GILD	64	21	32	15	20	50	82.80	2 ± 1
13	STAP	64	19	40	15	15	3	109.51	2 ± 1
14	HÖFN	64	16	1	15	11	54	81.48	0 ± 1
15	VEGA	64	17	24	15	10	41	73.65	0 ± 1
16	LAUD	64	53	46	15	21	55	708.08	2 ± 2

Tab. C.3: Beobachtungsorte in Island im WGS84-System und beobachtete Landhebungsrate mit Unsicherheit. Es ist zu beachten, daß die angegebenen Landhebungsraten relative Angaben bezüglich der Station HÖFN sind (Sjöberg *et al.*, 2000).

D. Fennoskandien

D.1 Beobachtete Landhebung

Im folgenden sind die Daten für die einzelnen Hebungskurven tabelliert. Dabei bedeutet Δt_{14C} das Radiokarbonalter, Δt das siderische Alter (vor 1950 AD), h_{RSL} der relative Meeresspiegelanstieg und e_{eu} der eustatische Meeresspiegelanstieg (nach SPECMAP, Imbrie *et al.* (1984)). Für die Strandlinienhöhe gilt $h_{obs} = h_{RSL} - e_{eu}$. Die Daten von Ångermanland und Västerbotten sind nicht ^{14}C -korrigiert worden, da diese nach der (absoluten) Warvenchronologie datiert sind.

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
18500	21970	35	-130	165
15500	18520	35	-117	152
11000	13000	0	-64	64
10000	11340	0	-52	52
6530	7430	9	-21	30
4500	5210	7	-6	13

Tab. D.1: Daten für Andfjord und Andøya (69.10°N 16.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993; Møller, 1984; Vorren & Moe, 1986; Vorren *et al.*, 1988).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
-	8022	139	-32	171
-	7775	128	-30	158
-	6890	104	-23	127
-	6246	90	-19	109
-	6098	79	-18	97
-	5791	80	-14	95
-	5613	76	-12	89
-	4432	54	-6	60
-	4172	51	-6	58
-	3996	48	-7	55
-	3486	41	-6	47
-	2799	30	-5	35
-	2761	29	-5	34
-	2443	26	-3	29
-	1857	18	-0	18
-	1395	12	2	10
-	1039	10	4	6
-	600	6	2	3
-	204	4	1	3

Tab. D.2: Daten für Ångermanland (62.90°N 17.87°E) (Lidén, 1938; Lliboutry, 1971; Cato, 1985, 1987, 1992). (Die Datierung beruht auf der Warvenchronologie, eine ^{14}C -Korrektur ist daher nicht notwendig.)

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12700	15340	25	-86	112
12100	14100	29	-79	107
10900	12940	38	-63	101
10300	12110	32	-56	88
10200	11930	30	-55	85
10100	11660	34	-53	87
10100	11660	32	-53	85
10100	11660	23	-53	77
10000	11340	32	-52	85
10000	11340	29	-52	81
9900	11240	24	-51	75
9900	11240	23	-51	74
9500	10720	23	-47	69
7400	8190	11	-27	38

Tab. D.3: Daten für Sotra bei Bergen (60.20°N 5.07°E) (Kaland *et al.*, 1984; Krzywinski & Stabell, 1984; Anundsen, 1985; Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11240	13170	160	-67	227
10450	12680	133	-58	191
10200	11930	124	-55	179
10050	11560	108	-53	161
9950	11280	100	-52	152
9300	10500	65	-44	109

Tab. D.4: Daten für Billingen (58.50°N 13.72°E) (Björck & Digerfeldt, 1986).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11900	13860	122	-76	198
11400	13410	119	-69	188
10300	12110	116	-56	172
9900	11240	88	-51	139
9700	11160	105	-49	154
9500	10720	92	-47	139
9300	10500	64	-44	108
9100	10230	52	-42	94
8700	9650	43	-38	81
6000	6800	30	-17	47
5300	6030	27	-9	36
4700	5460	21	-6	27
3800	4160	16	-7	23
2500	2700	9	-3	12

Tab. D.5: Daten für Bjugn (63.77°N 9.82°E) (Svendsen & Mangerud, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8000	8990	-3	-32	29
7500	8340	-1	-28	27
7000	7810	-2	-24	22
6000	6800	-1	-17	16
5000	5730	5	-5	10
4000	4430	5	-7	12
3000	3200	6	-6	12
2000	1950	5	-1	6
1000	950	3	3	0

Tab. D.6: Daten für Blekinge (56.20°N 16.00°E) (Berglund, 1964, 1971; Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10800	12890	115	-62	177
10600	12790	121	-59	180
10200	11930	96	-55	151
10000	11340	79	-52	131
9600	11060	55	-48	103
9200	10330	45	-43	88
6100	6960	33	-18	51
5300	5940	23	-9	32
2800	2880	16	-5	21
2600	2750	12	-4	16

Tab. D.7: Daten für Bohuslän (58.40°N 11.51°E) (Miller & Robertsson, 1988a,b).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12400	14340	32	-82	114
10300	12110	32	-56	88
10000	11340	28	-52	80
10000	11340	23	-52	75
9800	11200	17	-50	67
9800	11200	16	-50	66
9500	10720	8	-47	55
9500	10720	8	-47	55
9500	10720	8	-47	54
9350	10560	20	-45	65
9200	10330	5	-43	48
8700	9650	5	-38	43
8200	9130	8	-34	42
6750	7597	5	-22	27
5300	6030	8	-9	17
5100	5890	8	-6	14
2700	2780	5	-4	9

Tab. D.8: Daten für Bømlø (59.61°N 5.23°E) (Fægri, 1944; Hafsten, 1979; Kaland, 1984; Anundsen, 1985).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9040	10210	4	-42	46
7940	8760	6	-31	37
6515	7430	6	-20	26
6395	7310	14	-20	34
6225	7180	5	-18	23
5740	6500	7	-14	21
5255	5990	8	-8	16
4715	5470	10	-6	15

Tab. D.9: Daten für Dalnie Zelentsy und Shelpinsky Bay (69.15°N 36.15°E) (Snyder *et al.*, 1996).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
13010	15640	16	-90	106

Tab. D.10: Daten für Dybvad (57.28°N 10.37°E) (Richardt, 1996).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8000	8990	57	-32	89
7000	7810	47	-24	71
6000	6800	38	-17	55
5000	5730	30	-5	35
4000	4430	23	-7	30
3000	3200	17	-6	23
2000	1950	10	-1	11
1000	950	6	4	2

Tab. D.11: Daten für Fjallbacka (58.60°N 11.20°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10300	12110	35	-56	91
9500	10720	28	-47	75
9500	10720	12	-47	58
9100	10230	8	-42	50
8600	9540	4	-37	41
8300	9300	8	-35	42
8000	8990	9	-32	41
7200	8000	11	-25	36
7200	8000	11	-25	36
6900	7690	7	-23	30
6000	6800	11	-17	28
5300	6030	9	-9	18
4200	4820	7	-6	13
2600	2750	4	-4	8
1900	1850	2	-0	3

Tab. D.12: Daten für Fonnes (60.79°N 4.98°E) (Hafsten, 1979; Kaland, 1984).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
14700	17600	12	-110	122
14000	16800	30	-102	132
12400	14340	25	-82	107
12400	14340	16	-82	98
12100	14100	16	-79	95
12030	14080	20	-78	98
12020	14070	20	-78	98
11700	13610	7	-73	80
11360	13340	4	-69	73
11300	13180	6	-68	74
7000	7810	15	-24	39
6000	6800	13	-17	30
5000	5730	10	-5	15
4000	4430	6	-7	13
3000	3200	2	-6	8
2000	1950	0	-1	1

Tab. D.13: Daten für Frederikshaven (57.45°N 10.52°E) (Tushingham & Peltier, 1993; Richardt, 1996).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10500	12690	170	-58	228
10300	12110	170	-56	226
10200	11930	154	-55	209
9700	11160	143	-49	192
9600	11060	119	-48	167
9500	10720	109	-47	156
8600	9540	91	-37	128
8500	9510	90	-37	127
8500	9510	83	-37	120
8300	9300	72	-35	107
8200	9130	72	-34	106
5900	6730	42	-16	58
4000	4430	27	-7	34

Tab. D.14: Daten für Frosta (63.63°N 10.91°E) (Svendsen & Mangerud, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10400	12340	45	-57	102
9700	11160	40	-49	89
9200	10330	27	-43	70
4900	5620	14	-5	19

Tab. D.15: Daten für Frøya (63.70°N 8.75°E) (Svendsen & Mangerud, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9000	10200	19	-41	60
8000	8990	18	-32	50
7000	7810	24	-24	48
6000	6800	23	-17	40
5000	5730	17	-5	22
4000	4430	13	-7	20
3000	3200	9	-6	15
2000	1950	6	-1	7
1000	950	1	4	-3

Tab. D.16: Daten für Göteborg (57.70°N 11.70°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7200	8000	114	-25	140
6500	7430	102	-20	122
6200	7160	106	-18	124
6000	6800	90	-17	107
5700	6470	83	-13	96
5500	6290	73	-11	84
5300	6030	63	-9	72
3900	4370	47	-7	54
3700	4040	50	-6	56
3400	3650	36	-6	42
2900	3010	27	-5	32
2300	2340	21	-2	23
1600	1510	9	1	8

Tab. D.17: Daten für Hälsingland (61.85°N 17.15°E) (Öster, 1943; Lundquist, 1962).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10200	11930	80	-55	135
9600	11060	45	-48	93
9300	10500	52	-44	97

Tab. D.18: Daten für Hangassuo (60.70°N 27.70°E) (Eronen, 1976).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9680	11160	100	-49	149
9420	10660	68	-46	114

Tab. D.19: Daten für Hardanger (60.43°N 6.98°E) (Helle *et al.*, 1997).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10224	11940	109	-55	164
10224	11940	94	-55	149
9972	11310	90	-52	142
9589	10970	67	-48	115
8950	10170	50	-41	91
8257	9260	37	-34	71
8000	8990	35	-32	67
7700	8438	35	-29	64
7449	8230	31	-27	58
7400	8190	35	-27	62
7300	8100	35	-26	61
7200	8000	35	-25	60
6950	7770	36	-23	59
6500	7430	34	-20	54
6100	6960	33	-18	51
5260	6000	28	-8	36
3766	4140	22	-6	28
1950	1880	11	-1	12

Tab. D.20: Daten für Helsinki (60.16°N 24.95°E) (Donner, 1964; Hyvärinen, 1980; Eronen & Haila, 1982; Glückert & Risaniemi, 1982).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
14080	16880	12	-103	115
13610	16340	15	-97	112
12770	15410	15	-87	102
12650	15290	12	-86	98
12520	14760	8	-84	92
12460	14340	7	-83	90
12370	14320	7	-82	89
12240	14160	10	-80	90
12230	14150	7	-80	87
12190	14130	11	-80	91
12130	14110	6	-79	85
12120	14110	9	-79	88
11980	14060	3	-77	80
11950	14030	6	-77	82
11950	14030	3	-77	80
11710	13690	7	-74	81

Tab. D.21: Daten für Hirtshals (57.56°N 10.08°E) (Richardt, 1996).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12000	14070	96	-77	173
9900	11240	76	-51	127
9800	11200	42	-50	92
9700	11160	59	-49	108
9545	10750	50	-47	97
9315	10520	39	-45	84
8780	9760	42	-39	82
7760	8530	28	-30	58
5200	5940	18	8	26

Tab. D.22: Daten für Hitra und Tjeldbergodden (63.52°N 8.95°E) (Svendsen & Mangerud, 1987; Solem & Solem, 1997).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11500	13460	129	-71	200
11400	13410	127	-69	196
11000	13000	124	-64	188
11000	13000	123	-64	187
10850	12910	120	-62	182
10550	12650	111	-59	170
10500	12690	109	-58	167
10300	12110	102	-56	157
10300	12110	102	-56	157
10300	12110	102	-56	157
10300	12110	101	-56	157
10200	11930	93	-55	148

Tab. D.23: Daten für Hunneberg (58.32°N 12.44°E) (Björck & Digerfeld, 1982).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7000	7810	30	-24	54
6000	6800	24	-17	41
5000	5730	19	-5	24
4000	4430	13	-7	20
3000	3200	9	-6	15

Tab. D.24: Daten für Ingøya (71.06°N 24.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
13200	15870	14	-92	106
13100	15750	16	-91	107
11400	13410	14	-69	83
10800	12890	20	-62	82
10500	12690	6	-58	64
10500	12690	11	-58	69
10500	12690	16	-58	74
10250	11960	14	-55	70
10000	11340	5	-52	57
9900	11240	11	-51	62
9000	10200	1	-41	42
8000	8990	4	-32	36
4000	4430	4	-7	11
3000	3200	2	-6	8
2000	1950	1	-1	2
1000	950	1	4	-3

Tab. D.25: Daten für Jæren (59.00°N 5.50°E) (Thomsen, 1982; Anundsen, 1985; Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
6500	7430	42	-20	62

Tab. D.26: Daten für Kisko (60.38°N 23.77°E) (Eronen, 1974).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9500	10720	57	-47	104

Tab. D.27: Daten für Kola (69.00°N 35.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7000	7810	25	-24	49
6000	6800	24	-17	40
5000	5730	16	-5	21
4000	4430	13	-7	20
3000	3200	8	-6	14

Tab. D.28: Daten für Köpu (58.90°N 22.23°E) (Kessel & Raukas, 1979).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9180	10260	82	-43	125
9040	10210	99	-42	141
8820	9900	50	-40	90
8500	9510	43	-37	80
7720	8450	38	-30	68
6270	7230	29	-19	47
6110	6970	28	-18	45
4340	4870	18	-6	25
3830	4230	15	-7	22
3070	3320	15	-6	21
2750	2850	10	-5	15
2630	2750	8	-4	12

Tab. D.29: Daten für Kragerø (58.85°N 9.33°E) (Stabell, 1980; Anundsen, 1985).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
6855	7680	4	-23	27
6210	7170	6	-18	24
4760	5520	8	-6	14
1175	1060	3	3	0

Tab. D.30: Daten für Cape Krasny (68.73°N 37.46°E) (Snyder *et al.*, 1996).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8950	10170	180	-41	221
8257	9260	150	-34	184
7449	8230	90	-27	117
6950	7770	82	-23	105
5260	6000	67	-8	75
3766	4140	52	-6	58
1950	1880	27	-1	28

Tab. D.31: Daten für Kristiinankaupunki (62.27°N 21.38°E) (Donner, 1964).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11150	13140	140	-66	207
11050	13020	134	-65	199
11000	13000	135	-64	199
10800	12890	124	-62	186
10500	12690	122	-58	180
10300	12110	121	-56	177
10150	11800	112	-54	165
10150	11800	110	-54	163
10000	11340	98	-52	150
9800	11200	88	-50	138
9800	11200	78	-50	128

Tab. D.32: Daten für Kroppefjäll (58.63°N 12.27°E) (Björck & Digerfeldt, 1991).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7775	8558	90	-30	121

Tab. D.33: Daten für Kuortane (62.88°N 23.52°E) (Eronen, 1974).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11200	13160	60	-67	127
7000	7810	14	-24	38
6000	6800	14	-17	31
5000	5730	13	-5	18
4000	4430	8	-7	15
3000	3200	6	-6	12

Tab. D.34: Daten für Kvalvika (69.50°N 18.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9100	10230	167	-42	209
9020	10200	175	-41	216
8510	9510	144	-37	181
8230	9234	107	-34	140
8010	8990	94	-32	126
6590	7480	81	-21	102

Tab. D.35: Daten für Lauhanvuori (62.00°N 22.00°E) (Salomaa, 1982; Salomaa & Matiskainen, 1985).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12400	14340	18	-82	100
12200	14140	23	-80	103
12100	14100	17	-79	96
11500	13460	8	-71	79
10500	12690	7	-58	65

Tab. D.36: Daten für Leinøy (62.33°N 5.70°E) (Svendsen & Mangerud, 1987, 1990).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9000	10200	-11	-41	30
8000	8990	-8	-32	24
7000	7810	2	-24	26
6000	6800	3	-17	20
5000	5730	3	-5	8
4000	4430	7	-7	14
3000	3200	3	-6	9
2000	1950	2	-1	3
1000	950	1	4	-3

Tab. D.37: Daten für Lista (58.14°N 6.73°E) (Tushingham & Pel-tier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8350	9420	-2	-35	33
8040	9000	-1	-32	31
5980	6780	7	-17	24
5800	6630	7	-15	22
5250	6000	8	-8	16
4910	5630	8	-5	13
4740	5490	8	-6	13
4000	4430	7	-7	14
2460	2480	8	-3	11
2330	2350	8	-2	10
2060	2000	8	-1	9

Tab. D.38: Daten für den Lofoten (68.09°N 13.56°E) (Møller, 1984; Vorren & Moe, 1986).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12200	14140	5	-80	85
10400	12340	30	-57	87
9800	11200	27	-50	77
9700	11160	25	-49	74
9400	10580	23	-46	68
9000	10190	20	-41	61
6600	7480	11	-21	32
6100	6960	13	-18	31
5600	6390	13	-12	25
4700	5460	12	-6	17
4000	4430	8	-7	14
2000	1950	5	-1	6

Tab. D.39: Daten für Lyfjord (69.77°N 18.73°E) (Hald & Vorren, 1983).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
14650	17540	2	-109	111
14270	17100	8	-105	113
13900	16670	22	-101	123

Tab. D.40: Daten für /*Nørre*/ Lyngby (57.43°N 9.76°E) (Richardt, 1996).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
6800	7660	8	-22	30
3100	3330	4	-6	10

Tab. D.41: Daten für Mandal (58.02°N 7.70°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10340	12290	123	-56	179
9230	10400	111	-44	155
8950	10160	92	-41	133
8680	9580	66	-38	104
8450	9490	103	-36	139
7085	7940	52	-24	76
7080	7930	48	-24	72
6180	7040	52	-18	70
4245	4830	18	-6	24
3750	4090	18	-6	24
1570	1430	7	1	6
1545	1410	7	1	6

Tab. D.42: Daten für Nærøy (64.85°N 11.44°E) (Ramfjord, 1982).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7000	7810	8	-24	32
6000	6800	10	-17	27
5000	5730	8	-5	13
4000	4430	5	-7	12
3000	3200	2	-6	8

Tab. D.43: Daten für Narva (59.34°N 28.17°E) (Kessel & Raukas, 1979; Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9000	10190	8	-41	49
8000	8990	15	-32	47
7000	7810	19	-24	43
6000	6800	16	-17	33
5000	5730	9	-5	14
4000	4430	10	-7	17
3000	3200	7	-6	13
2000	1950	4	-1	5
1000	950	1	4	-3

Tab. D.44: Daten für Onsala (57.34°N 12.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10240	11950	221	-52	273
9350	10560	142	-45	187
8140	9038	75	-33	108
5000	5728	26	-5	31
2480	2543	9	-3	12

Tab. D.45: Daten für Oslo (59.94°N 10.72°E) (Hafsten, 1956, 1979).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10240	11950	185	-55	240
9350	10560	115	-45	160
8140	9038	60	-33	93
5000	5728	20	-5	25
2480	2543	8	-3	11

Tab. D.46: Daten für Ostfold (59.14°N 10.99°E) (Hafsten, 1979).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8850	9920	58	-40	98
8000	8990	47	-32	79
5900	6730	32	-16	48
3750	4090	20	-6	26
2360	2350	7	-3	10

Tab. D.47: Daten für Porsgrunn (59.08°N 9.75°E) (Stabell, 1980).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8420	9470	92	-36	127
7835	8600	88	-31	118
7400	8180	86	-27	113
7175	7970	80	-25	106
6915	7720	72	-23	95
6515	7430	56	-20	77

Tab. D.48: Daten für Rejmyra (58.77°N 15.99°E) (Persson, 1979).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11800	13820	109	-75	184
11500	13460	108	-71	179
10700	12850	89	-61	150
10200	11930	73	-55	128
10100	11660	64	-53	117
10100	11660	62	-53	115
10050	11560	51	-53	104
10000	11340	48	-52	100
9850	11220	51	-50	101
9850	11220	51	-50	101
9700	11160	48	-49	97
9600	11060	37	-48	85

Tab. D.49: Daten für Risveden (57.92°N 12.17°E) (Svedhage, 1985).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9070	10220	207	-42	249
9290	10500	188	-44	232
8850	9920	197	-40	237
8700	9650	142	-38	180
8420	9470	116	-36	152
8020	8990	110	-32	142
7810	8590	92	-30	122
7000	7810	90	-24	114
6250	7190	79	-19	98
5220	5950	70	-8	77
3500	3770	35	-6	41

Tab. D.50: Daten für Rovaniemi (66.50°N 25.00°E) (Saarnisto, 1981).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
3900	4370	12	-7	18

Tab. D.51: Daten für Saaremaa (58.29°N 22.50°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12350	14310	78	-82	159
12150	14120	72	-79	151
12000	14070	68	-77	146
11800	13820	64	-75	138
11250	13170	51	-68	119
11100	13130	46	-66	112
10900	12940	43	-63	106
10900	12940	42	-63	106
10100	11660	31	-53	84
9800	11200	17	-50	67

Tab. D.52: Daten für Sandsjöbacka (57.57°N 12.10°E) (Pässe, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10400	12340	186	-57	243
9600	11060	146	-48	194
9200	10330	120	-43	163
8800	9860	80	-39	119
8100	9010	80	-33	113
6400	7320	53	-20	73
5500	6290	44	-11	55
3400	3650	24	-6	30

Tab. D.53: Daten für Ski (59.71°N 10.85°E) (Sørensen, 1979; Hafsten, 1979).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7000	7810	4	-24	28
6000	6800	5	-17	22
5000	5730	8	-5	13
4000	4430	6	-7	13
3000	3200	5	-6	11

Tab. D.54: Daten für Skjaefassen (70.00°N 21.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9500	10720	9	-47	56
7300	8100	9	-26	35

Tab. D.55: Daten für Skuloy (62.70°N 6.20°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12200	14140	103	-80	183
12100	14100	94	-79	172
11800	13820	86	-75	161
11300	13180	77	-68	145
11100	13130	74	-66	140
11000	13000	70	-64	134
10850	12910	68	-62	130
10500	12690	62	-58	120
10300	12110	59	-56	114
10300	12110	54	-56	110
10300	12110	44	-56	100
10300	12110	41	-56	97
10300	12110	59	-56	115
10300	12110	59	-56	115
10300	12110	59	-56	115
10300	12110	59	-56	115
10300	12110	59	-56	115
10250	11960	32	-55	87
10150	11800	28	-54	82
10000	11340	19	-52	71
10000	11340	16	-52	68
10000	11340	11	-52	63
10000	11340	1	-52	53
9950	11280	26	-52	78
9900	11240	26	-51	77
9600	11060	19	-48	67
9600	11060	17	-48	64
9550	10760	19	-47	66
9500	10720	26	-47	73
9470	10710	26	-46	72
9300	10500	29	-44	73
9300	10500	29	-44	73
9270	10480	26	-44	70
8950	10170	20	-41	61
8440	9480	17	-36	53

Tab. D.56: Daten für Skvarran (57.19°N 16.15°E) (Svensson, 1991).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
7000	7810	3	-24	26
6000	6800	4	-17	21
5000	5730	3	-5	8
4000	4430	3	-7	9
3000	3200	2	-6	8
2000	1950	1	-1	2
1000	950	0	4	-3

Tab. D.57: Daten für Soborg (56.50°N 13.00°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9900	11240	110	-51	161
9000	10190	82	-41	123
9000	10190	78	-41	119
8700	9650	69	-38	107
8600	9540	62	-37	99
8300	9300	54	-35	89
7500	8340	52	-28	80
6500	7430	41	-20	61
6100	6960	45	-18	63
5600	6390	36	-12	48
4900	5620	32	-5	37
4700	5460	28	-6	34
4700	5460	23	-6	29
3800	4160	24	-7	31
3700	4040	23	-6	29
2600	2750	10	-4	14

Tab. D.58: Daten für Södertörn (59.16°N 18.04°E) (Florin, 1957; Risberg & Karlson, 1989; Risberg *et al.*, 1991; Risberg, 1991).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12200	14140	48	-80	128
10200	11930	39	-55	94

Tab. D.59: Daten für Stette (62.49°N 6.63°E) (Svendsen & Mangerud, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8950	10160	88	-41	129
6170	7020	54	-18	73
5200	5930	41	-8	49
5160	5920	35	-7	42
5020	5740	36	-5	42
4900	5610	30	-5	35
4800	5580	31	-5	37
4240	4830	24	-6	30
4235	4830	23	-6	30
3995	4430	18	-7	24
3750	4090	21	-6	28
3120	3360	16	-6	21
2660	2760	14	-4	18
2160	2140	10	-2	11
2070	2020	7	-1	8
1940	1880	7	-0	7
1380	1290	5	2	3

Tab. D.60: Daten für Stockholm (59.32°N 18.09°E) (Åse & Bergström, 1982).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
12700	15340	44	-86	130
11800	13820	36	-75	111
11100	13130	31	-66	97
10000	11340	26	-52	78
9700	11160	7	-49	56
8250	9260	1	-34	35
8200	9130	7	-34	41
7900	8650	13	-31	44
4200	4820	7	-6	13

Tab. D.61: Daten für Sula (62.43°N 6.25°E) (Svendsen & Man-gerud, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
9800	11200	10	-50	60
9600	11060	10	-48	58
8400	9450	17	-36	53
7500	8340	12	-28	40
7100	7940	23	-25	48
7000	7810	22	-24	46
6100	6960	7	-18	24
6000	6800	11	-17	28
6000	6800	21	-17	38
5000	5730	15	-5	20
4000	4430	11	-7	18
3000	3200	7	-6	13

Tab. D.62: Daten für Tallinn (59.36°N 24.81°E) (Kessel & Rau-
kas, 1979; Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11800	13820	113	-75	188
10600	12790	90	-59	149

Tab. D.63: Daten für Tingvoll (62.91°N 8.25°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
11050	13020	66	-65	131
10800	12890	63	-62	125
10300	12110	54	-56	110
10300	12110	42	-56	98
10300	12110	57	-56	113
10300	12110	57	-56	113
10300	12110	57	-56	113
10300	12110	57	-56	113
10300	12110	58	-56	114
10300	12110	58	-56	114
10300	12110	58	-56	114
10300	12110	57	-56	113
10300	12110	57	-56	113
10250	11960	32	-55	87
10200	11930	29	-54	83
10050	11560	26	-52	78
10050	11560	23	-52	75
10000	11340	11	-52	63
10000	11340	3	-52	55
9600	11060	12	-48	60
9500	10720	23	-47	70
9350	10560	27	-45	72
9300	10500	27	-44	71
9300	10500	28	-44	72
9300	10500	26	-44	70
9300	10500	28	-44	72
9100	10230	23	-42	66
9000	10190	19	-41	60
8700	9650	15	-38	53

Tab. D.64: Daten für Torsburgen (57.41°N 18.73°E) (Svensson, 1991).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8100	9010	-4	-33	29
7900	8650	-6	-31	26

Tab. D.65: Daten für Trelleborg (55.36°N 13.40°E) (Tushingham & Peltier, 1993).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
8780	9760	34	-39	73
7750	8530	24	-30	54
5620	6400	23	-12	35

Tab. D.66: Daten für Varanger (70.00°N 29.00°E) (Donner *et al.*, 1977).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
-	8900	177	-40	217
-	8646	163	-38	201
-	6321	84	-19	103
-	3100	29	-6	35

Tab. D.67: Daten für Västerbotten (63.97°N 19.88°E) (Granlund, 1943; Renberg & Segerström, 1981). (Die Datierung beruht auf der Warvenchronologie, eine ^{14}C -Korrektur ist daher nicht notwendig.)

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10000	11340	183	-52	235
9900	11240	185	-51	236
9900	11240	173	-51	224
8800	9860	90	-39	129
8200	9130	72	-34	106
8000	8990	72	-32	104
7500	8340	67	-28	95
6100	6960	49	-18	67
3800	4160	24	-7	31
1600	1510	10	1	9

Tab. D.68: Daten für Verdalsøra (63.80°N 11.48°E) (Svendsen & Mangerud, 1987).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
10280	12090	143	-56	198
9340	10560	88	-45	133
8710	9680	62	-38	101
8000	8990	50	-32	82
7900	8650	50	-31	81
5570	6320	32	-12	43
5460	6280	32	-11	42
5280	6010	26	-8	35
4340	4870	26	-6	32
4120	4590	26	-7	33
2920	3080	13	-5	18
2425	2380	8	-3	11
2400	2360	11	-3	14
2260	2320	8	-2	10
1200	1130	3	3	1

Tab. D.69: Daten für Vestfold (59.16°N 10.22°E) (Henningsmoen, 1979).

Δt_{14C} (a BP)	Δt (a BP)	h_{RSL} (m)	e_{eu} (m)	h_{obs} (m)
6480	7422	94	-20	114

Tab. D.70: Daten für Ylikiiminki (64.93°N 26.50°E) (Eronen, 1974).

D.2 Beobachtete Landhebungsgeschwindigkeit

Im folgenden ist die Landhebungsgeschwindigkeit für Fennoskandien tabelliert.

Ort	Latitude (°)	Longitude (°)	Landhebungsrate (mm/a)
Liepaja	56.5333	20.9833	-0.30
Kronstadt	59.9833	29.7833	0.09
Hamina	60.5667	27.1833	1.67
Helsinki	60.1500	24.9667	2.28
Hanko	59.8167	22.9667	2.99
Turku	60.4167	22.1000	4.05
Degerby	60.0333	20.3833	4.11
Lemström	60.1000	20.0167	4.57
Lyyprtti	60.6000	21.2333	5.06
Rauma	61.1333	21.4833	5.22
Mäntyluoto	61.6000	21.4833	6.31
Kaskinen	62.3833	21.2167	7.11
Vaasa	63.1000	21.5667	7.62
Pietarsaari	63.7000	22.7000	8.04
Raahe	64.7000	24.5000	7.54
Oulu	65.0333	25.4333	6.66
Kemi	65.7333	24.5500	7.14
Furuögrund	64.9167	21.2333	8.75
Ratan	64.0000	20.9167	8.16
Draghällan	62.3333	17.4667	7.57
Gävle	60.6833	17.1667	5.90
Björn	60.6333	17.9667	5.95
Stockholm	59.3167	18.0833	3.98
Grönskär	59.2667	19.0333	3.97
Södertälje	59.2000	17.6333	3.66
Landsort	58.7500	17.8667	3.06
Visby	57.6500	18.3000	1.45
Ölands	57.3667	17.1000	1.29
Kungsholmsfort	56.1000	15.5833	0.20
Ystad	55.4167	13.8167	-0.62
Klagshamn	55.5167	12.9167	-0.04
Varberg	57.1000	12.2167	0.77
Smögen	58.3667	11.2167	1.99
Oslo	59.9000	10.7500	4.10
Nevlunghavn	58.9667	9.8833	1.56
Tregde	58.0000	7.5667	-0.05
Stavanger	58.9667	5.7333	-0.19
Bergen	60.4000	5.3000	0.24
Heimsjø	63.4333	9.0667	1.47
Narvik	68.4333	17.4167	3.06
Vardo	70.3333	31.1000	0.81
Esbjerg	55.4667	8.4500	-1.04
Hirtshals	57.6000	9.9500	0.38
Frederikshavn	57.4333	10.5667	0.49
Århus	56.1500	10.2167	-0.49
Fredericia	55.5667	9.7667	-0.96
Slipshavn	55.2833	10.8333	-0.83
Korsør	55.3333	11.1333	-0.61
Hornbæk	56.1000	12.4667	-0.08
København	55.6833	12.6000	-0.24

Ort	Latitude (°)	Longitude (°)	Landhebungsrate (mm/a)
Gedser	54.5667	11.9667	-0.94
Marienleuchte	54.5000	11.2500	-0.72
Travemünde	53.9667	10.8667	-1.80
Wismar	53.9000	11.4667	-1.31
Warnemünde	54.1833	12.0833	-1.06
Swinwünde	53.9167	14.2667	-0.77
Kolberg	54.1833	15.5667	-0.95
Pillau	54.6500	19.9000	-1.22

Tab. D.71: Landhebungsgeschwindigkeit für Fennoskandien (Ekman, 1996, 1998; Pan & Sjöberg, 1999).

E. Symbolverzeichnis

E.1 Verzeichnis der lateinischen Symbole

\mathcal{A}_i^n	Konvolution der Amplituden mit der zeitlichen Variation der Eismächtigkeit	2.3
${}^I\mathcal{A}_i^n$	Konvolution der Amplituden mit der zeitlichen Variation der Eismächtigkeit	2.3
${}^O\mathcal{A}_i^n$	Konvolution der Amplituden mit der zeitlichen Variation der Ozeanmächtigkeit	2.3
A_i	i -te Kreisfläche	6.1.3
A_O	Ozeanfläche	5.1
A_{ij}^n	Differential-Koeffizientenmatrix	2.3.1
${}^E A_i^n$	elastische Amplitude	2.3.1
${}^V A_i^n$	viskose Amplituden	2.3.1
B_i	Grenzflächenvektor	2.2.3
C_i^{nm}	Integrationskonstante	2.2.1
D^{nm}	Legendrekoeffizienten der Lastverteilung	2.3
${}^I D^{nm}$	Legendrekoeffizienten der Eisverteilung	2.3
${}^O D^{nm}$	Legendrekoeffizienten der Ozeanverteilung	2.3
d	Lastgeometrie	2.3
d_I	räumliche Verteilung des Eises	5.1
d_O	räumliche Verteilung der Ozeane	5.1
d_t	Operator der materiellen Ableitung bezüglich der aktuellen Zeit t	2.1.1
E_1	$:= 2(\beta - 1)^2 + (4 - 3\beta)(n + 1)$	2.2.1, A.2.3
E_2	$:= 2(\beta - 1)^2 - (4 - 3\beta)n$	2.2.1, A.2.3
e	Eulersche Zahl	2.3.1
e_r	Geoidhöhe	2.3.3
e_{eu}	eustatischer Meeresspiegelanstieg	5.1
e_{ij}	Dehnung	A.1.3
$f_{ij\dots}$	Tensorfeld	2.1.1
$\tilde{f}_{ij\dots}$	Laplace-Transformierte von $f_{ij\dots}$	2.1.4
$f_{ij\dots,k}$	Gradient von $f_{ij\dots}$ bezüglich X_k	2.1.1
$f_{ij\dots}^{(0)}$	Anfangswert von $f_{ij\dots}$	2.1.1
$f_{ij\dots}^{(\theta)}$	materielles Inkrement von $f_{ij\dots}$	2.1.1
$f_{ij\dots}^{(\Delta)}$	lokales Inkrement von $f_{ij\dots}$	2.1.1
$[f_{ij\dots}]_{-}^{+}$	Bedingungen von $f_{ij\dots}$ an einer Grenzfläche \mathcal{X}^2	2.1.1
g_i	Gravitationsbeschleunigung	2.1.2
H	Heaviside-Funktion	A.3
H_i	Höhe der i -ten Eislast	6.1.3
h	Lastgeschichte	2.3
h_0	axiale Lastmächtigkeit	3.1.2
h^l	Lovesche Zahl	2.3.2
h_{RSL}	relative Meeresspiegeländerung (relative sea level)	5.2
h_{obs}	$h_{\text{RSL}} - e_{eu}$, Strandlinienhöhe	6.2.1
h_I	zeitliche Variation der Eismächtigkeit	5.1
h_O	zeitliche Variation der Ozeanmächtigkeit	5.1
\hat{h}	Schichtmächtigkeit	3.1.1
i	$:= \sqrt{-1}$	
$I^m(y)$	Fourier-Integral zur Bestimmung der Lastkoeffizienten	2.4
j	$:= \det[r_{i,j}]$, Funktionaldeterminante	2.1.2
K	Anzahl der Schichten	2.2.3
K_i	Konstantenvektor	2.2.3
k	Index einer Kugelschale	2.1.6
k^n	Lovesche Zahl	2.3.2

\mathcal{L}^{-1}	inverse Laplace-Transformation	2.3
l^n	Lovesche Zahl	2.3.2
\mathcal{M}_{ij}	anisotropes Relaxationsfunktional	2.1.2
M_{ij}^n	Lösungsmatrix	2.2.1
${}^{(0 1)}M_{ij}^n$	Bestandteile der Lösungsmatrix im inkompressiblen Fall	2.2.1
m	Ordnung der Kugelflächenfunktion	2.1.8
N	$:= n(n+1)$	2.1.8
${}^{(0 1)}N_{ij}^n$	Bestandteile von $(M_{ij}^n)^{-1}$	A.2.3
n	Grad der Kugelflächenfunktion	2.1.8
n_i	Einheitsvektor senkrecht zu \mathcal{X}^2	2.1.1
P_{ij}^n	Schichtpropagator	2.2.3
${}^{\text{II}}P_{ij}^n$	Produkt von Schichtpropagatoren	2.2.3
P^{nm}	assoziierte Legendre-Polynome	A.1.2
P	Gesamtzahl der Nullstellen von $\det T_{ij}$	2.3.1
p	mechanischer Druck	2.1.3
Q^{nm}	Amplitude der Summe von Gravitationspotential, Gravitationsbeschleunigung und Tangentialverschiebung	2.1.8, A.1.4
R	Erdradius	2.2.3
R_i	Radius der i -ten Eislast	6.1.3
R_{ij}	Bestandteil der Lösungsmatrix im kompressiblen Fall	A.2.3
r	Radialabstand	2.1.5
r_0	Radialer Anteil der Lastverteilung	2.4
r_i	Radialabstand der i -ten Grenzfläche	2.1.6
r_K	Radialabstand der äußeren Grenzfläche (Erdradius)	2.2.3
\check{r}_i	aktuelle Position eines Teilchens	2.1.1
$\mathbf{S}_{(0 \pm 1)}^{nm}$	vektorielle Kugelflächenfunktionen	2.2.1, A.1.2
s	Laplace-Frequenz	2.1.4
s_p^n	Eigenwert (= Nullstelle von $\det T_{ij}$)	2.3.1
T_{ij}^n	Matrix, die die Konstante K_i mit den Randbedingungen verbindet	2.2.3
T_{rr}^{nm}	Amplitude der Radialspannung	2.1.8, A.1.4
$T_{r\theta}^{nm}$	Amplitude der Tangentialspannung in Richtung θ	2.1.8, A.1.4
$T_{r\varphi}^{nm}$	Amplitude der Tangentialspannung in Richtung φ	A.1.4
t	aktuelle Zeit	2.1.1
t'	Anregungszeit	2.1.1
t_{ij}	Cauchy-Spannung	2.1.2
Δt	siderisches Alter (bezüglich 1950 AD)	6.2.1
$\Delta t_{14\text{C}}$	^{14}C -Alter (bezüglich 1950 AD)	6.2.1
U^{nm}	Amplitude der Radialverschiebung	2.1.8, A.1.4
u_i	Verschiebung	2.1.1
V_{ij}^n	Bestandteil der Lösungsmatrix im kompressiblen Fall	A.2.3
V_{I}	Eisvolumen	5.1
V^{nm}	Amplitude der Tangentialverschiebung in Richtung θ	2.1.8, A.1.4
W_{ij}^n	Bestandteil der Lösungsmatrix im kompressiblen Fall	A.2.3
W^{nm}	Amplitude der Tangentialverschiebung in Richtung φ	2.1.8, A.1.4
W_i^n	Bestandteil des Lösungsvektors	2.2.3
\mathcal{X}^3	dreidimensionaler Raum	2.1.1
\mathcal{X}^2	Grenzfläche in \mathcal{X}^3	2.1.1
x	Divergenz der Verschiebung	A.1.1
X_i	Anfangsposition eines Teilchens	2.1.1
y	$:= \cos \theta$	2.4
y_0	$:= \cos \theta_0$	2.4
Y_i^{nm}	Lösungsvektor	2.1.8
Y^{nm}	skalare Kugelflächenfunktionen	2.3, A.1.2
Z_3^{nm}, Z_6^{nm}	Integrationskonstanten in der Lösung der Laplace-Gleichung	2.2.1, A.2.1
Z_{ij}^n	Lösungsmatrix für eine Kugel	2.2.3
z_1	$:= 3 - \beta - n + \tau$	A.2.3
z_2	$:= 4 - \beta + n + \tau$	A.2.3
z_3	$:= 1 + \beta + 2n$	A.2.3

z_4 $:= 1 - \beta + 2n$ A.2.3

E.2 Verzeichnis der griechischen Symbole

α	Anfangswert im Darwinschen Gesetz	2.1.5
β	Abklingkonstante im Darwinschen Gesetz	2.1.5
γ	Gravitationskonstante	2.1.2
∂_i	partielle Differentiation	2.1.1
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	2.1.2
ε	Anpassungsparameter	4.3
ζ	$:= \frac{1}{2} \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4N}$	2.2.1
η	Viskosität	2.3
θ	Latitude	2.3
θ_b	Latitude des Beobachtungspunktes	2.4.1
θ_d	Latitude des Zentrums einer Lastkappe	2.4.1
θ_0	$:= r_0/R$	2.4
κ	Kompressionsmodul	2.1.2
μ	Scherrelaxationsfunktion	2.1.2
μ^E	Schermodul	2.3
ξ	Zustandsfunktion	2.1.2
π	3.14159...	
ϖ	thermodynamischer Druck	2.1.2
ρ	Volumenmassendichte	2.1.2
ρ_L	Lastdichte	2.3
ρ_I	Eisdichte	5.1
ρ_O	Ozeandichte	5.1
Σ^{nm}	Legendre-Koeffizient (Amplitude) der Flächenmassendichte	2.1.8
$\mathfrak{g}\Sigma^n$	$:= -g_r^{(0)} \Sigma_n$, Legendre-Koeffizienten (Amplitude) des Auflastdrucks	2.2.3
σ	Flächenmassendichte	2.1.2
$\mathfrak{g}\sigma$	$:= -g^{(0)} \sigma$, Lastdruck	2.2.3
τ	$:= (\beta - 3)/2$	2.2.1
τ_{ij}	Piola-Spannung	2.1.2
v	Vektorpotential von $\rho^{(0)} \tilde{u}_i$	2.2.1
Φ^{nm}	Legendre-Koeffizient (Amplitude) der Potentialstörung	2.1.8, A.1.4
ϕ	Gravitationspotential	2.1.2
φ	Longitude	2.3
φ_b	Longitude eines Beobachtungspunktes	2.4.1
φ_d	Longitude des Zentrums einer Lastkappe	2.4.1
χ	Winkel zwischen der großen Halbachse einer elliptischen Eislast und der Nord-Süd-Achse	2.4.2