

**GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM**  
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

---

# Scientific Technical Report

ISSN 1610-0956

# Zur Theorie der Multipole und Ihre Anwendung bei der Schwerefeldberechnung

Volker Grund

GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ), Department 1: Geodesy and Remote Sensing,  
Telegrafenberg A17, 14473 Potsdam

## Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht die Möglichkeiten einer Anwendung der Aerogravimetrie bei der Schwerefeldberechnung. Aus fluggestützten Messungen werden Schwerestörungen berechnet, die der Bestimmung regionaler Geoidlösungen dienen. Zunächst wird das Messgerät und seine Funktionsweise erläutert. Anschließend werden drei Verfahren zur Geoidberechnung verglichen, die sich unterschiedlicher Konzepte bedienen: ein Integralverfahren mit abgewandeltem Stokes-Kern, die schwerpunktmäßig behandelte Methode der Multipole sowie das Kollokationsverfahren. Im Gegensatz zum Integralverfahren arbeiten die Verfahren der Multipole sowie das der Kollokation ohne eine Feldfortsetzung nach unten. Im praktischen Teil der Arbeit werden die Verfahren auf den CHICAGO-Datensatz angewendet, der im Herbst 2002 in Südchile gemessen wurde. Die Genauigkeit sowohl der Messwerte als auch die der Geoidlösungen wird durch einen Vergleich mit unabhängigen Daten untersucht. Es stellt sich heraus, dass alle Verfahren im Rahmen der Genauigkeit zu akzeptablen Lösungen führen. Außerdem wird festgestellt, dass für niedrige Flughöhen der Einfluss der Feldfortsetzung vernachlässigt werden kann.

## Schlagwörter

Aerogravimetrie, Schwerestörung, Schwerefeld, Geoid, Geoidundulation, Höhenanomalie, Multipol, Integration, Kollokation, Feldfortsetzung

## Abstract

This thesis investigates in how far airborne gravimetry measurements can be applied to local geoid computation. First of all, the gravity meter and its mode of operation is explained. For geoid computation three methods using different concepts are compared: an integration method using a modified Stokes kernel, the sequential multipole analysis, which is focused on, and a collocation method. In contrast to the integration method the sequential multipole analysis and collocation method do without downward continuation. As practical work the three methods were applied to the CHICAGO dataset which was measured in autumn 2002 offshore southern Chile. The accuracy of these measurements as well as of the geoid computations is guaranteed by the comparison with independent data. One may conclude that all methods lead to useful solutions. Furthermore, the influence of downward continuation can be neglected when using such small flight heights.

## Keywords

airborne gravimetry, gravity disturbance, gravity field, geoid, geoid undulation, height anomaly, multipole, integration, collocation, downward continuation

## **Danksagung**

Ich danke Prof. Dieter Lelgemann (TU Berlin) und Dr. Peter Schwintzer (GFZ) für die wertvollen Ratschläge während der Betreuung meiner Diplomarbeit. Mein besonderer Dank gilt Dr. Uwe Meyer (GFZ), der mit vielfältigen Anregungen und der Bereitstellung von Daten den Fortgang der Arbeit positiv beeinflusste. Weiterhin schulde ich Dmitriy Marchenko (GFZ) und Dr. Pavel Novak (Universität Prag) Dank für die förderliche Zuarbeit. Für weiterführende Gespräche und nützliche Hinweise bedanke ich mich bei Dr. Franz Barthelmes (GFZ). Schließlich gebührt meinen Eltern ein großer Dank für Ihre weitreichende Unterstützung während meines Studiums.

Volker Grund

Berlin, 21. September 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung und Problemstellung</b>	<b>7</b>
1.1	Einleitung . . . . .	7
1.2	Erläuterung der Problemstellung . . . . .	8
1.3	CHICAGO-Messkampagne . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Messsysteme</b>	<b>10</b>
2.1	Installation der Messsysteme . . . . .	11
2.2	Aufbau und Funktionsweise des Gravimeters . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Konzepte der Geoidberechnung</b>	<b>15</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	15
3.1.1	Laplacesche Differentialgleichung und Lösungen . . . . .	15
3.1.2	Störpotential, Schwerestörung und Schwereanomalie . . . . .	17
3.1.3	Schwerefortsetzung und Einfluss der Topographie . . . . .	18
3.1.4	Remove-Restore-Technik . . . . .	19
3.1.5	Kernfunktionen . . . . .	20
3.2	Randwertproblem und Integrallösung . . . . .	22
3.2.1	Ablauf des Integrationsverfahrens . . . . .	23
3.3	Approximation durch Multipole . . . . .	26
3.3.1	Punktmassen, Dipole und Multipole $n$ -ten Grades . . . . .	26
3.3.2	Multipolpotentiale niederen Grades . . . . .	28
3.3.3	Maxwellsche Darstellung der Kugelfunktionen . . . . .	31
3.3.3.1	Zonale Kugelflächenfunktionen . . . . .	31
3.3.3.2	Tesserales und sektorielle Kugelflächenfunktionen . . . . .	32

3.3.4	Radiale Multipole nach Alexander N. Marchenko . . . . .	33
3.3.4.1	Potentialverlauf exzentrischer, radialer Multipole . . . . .	35
3.3.4.2	Approximation des Störpotentials . . . . .	36
3.3.4.3	Isotrope Funktionen und Parameterschätzung . . . . .	37
3.3.4.4	Ablauf der sequentiellen Multipol-Analyse . . . . .	38
3.3.4.5	Geoidbestimmung . . . . .	39
3.3.5	Punktmassen- und Dipolpotentiale . . . . .	39
3.4	Kollokationsverfahren . . . . .	40
3.4.1	Mittelwert und Kovarianzfunktion . . . . .	40
3.4.2	Abgeleitete Kovarianzfunktionen . . . . .	41
3.4.3	Kollokationsansatz und Schätzung der Höhenanomalien . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Vorverarbeitung der Rohdaten</b>	<b>43</b>
4.1	Generierung von Schwerestörungen . . . . .	43
4.1.1	Differentielles, kinematisches GPS . . . . .	45
4.1.2	Fliehkraft- und Corioliskraft-Korrektur . . . . .	46
4.2	Ergebnisse der Vorverarbeitung . . . . .	47
4.2.1	Räumliche Auflösung und Genauigkeitsabschätzungen . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Vergleich der Ergebnisse zur Geoidberechnung</b>	<b>49</b>
5.1	Zusammenstellung der Daten . . . . .	49
5.2	Vergleich mit den unabhängigen Daten . . . . .	50
5.3	Gegenüberstellung der Ergebnisse . . . . .	51
5.4	Schlussfolgerungen . . . . .	55
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>55</b>
	<b>Anhang</b>	<b>57</b>
	<b>A Profil: ANGEL-02-02-01</b>	<b>58</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	CHICAGO-Messkampagne . . . . .	9
2.1	Einrüstung in das Flugzeug . . . . .	11
2.2	LaCoste & Romberg-Gravimeter S124b . . . . .	12
3.1	Erdschwere- und Normalschwerefeld . . . . .	17
3.2	Schwerefortsetzung . . . . .	19
3.3	Einfluss der Topographie . . . . .	19
3.4	Erläuterung der Kernfunktion . . . . .	22
3.5	Randwertaufgabe auf der Kugel . . . . .	23
3.6	Lage der Bezugsflächen aus (Novak u. a., 2002b) . . . . .	24
3.7	Schema des One-Step-Verfahrens . . . . .	25
3.8	Herleitung des Dipolpotentials . . . . .	27
3.9	Dipol $v_1 = c_i = [-0.01, -0.002, 0, 0.002, 0.01]$ mit $M_1 = 1 \text{ m}^4/\text{s}^2$ . . . . .	28
3.10	radialer Quadrupol $v_2 = c_i = [-0.01, 0, 0.01]$ mit $M_2 = 1 \text{ m}^5/\text{s}^2$ . . . . .	29
3.11	orthogonaler Quadrupol $v_2 = c_i = [-0.005, 0, 0.005]$ mit $M_2 = 1 \text{ m}^5/\text{s}^2$ . . . . .	30
3.12	Quadrupolpotentiale (rot=rad., grau=orth.), $M_2 = 1 \text{ m}^5/\text{s}^2$ , $r=10 \text{ m}$ . . . . .	30
3.13	Potential eines Multipols 5-ten Grades . . . . .	32
3.14	Multipol 6-ten Grades mit Multipolachsen . . . . .	33
3.15	$P_{6,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$ . . . . .	33
3.16	$P_{3,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$ . . . . .	33
3.17	Exzentrischer, radialer Multipol i . . . . .	34
3.18	Potentiale radialer Multipole $v_n^i$ mit $r = 5000 \text{ m}$ und $d_i = r - 500 \text{ m}$ . . . . .	35
3.19	Erdoberfläche $\tau$ , Bjerhammerkugel $\sigma_B$ , Hilfsfläche $\sigma_A$ . . . . .	37

3.20	Essentielle Parameter . . . . .	37
3.21	Schema zur sequentiellen Multipol-Analyse . . . . .	38
3.22	Multipolpotentiale nullten und 1-ten Grades . . . . .	40
4.1	Generierung der Schwerestörungen . . . . .	44
4.2	Kinematisches, differentielles GPS . . . . .	45
4.3	Differenz der Antennen 1 und 2 . . . . .	45
4.4	CHICAGO-Schwerestörungen . . . . .	48
4.5	Vergleich mit SPOC-Profil . . . . .	48
5.1	Datenraster . . . . .	50
5.2	Datenformat . . . . .	50
5.3	Multipol-Analyse (SMA) . . . . .	51
5.4	Kollokationsverfahren (LSC) . . . . .	51
5.5	Integralmethode (INT) . . . . .	52
5.6	Differenz SMA - INT . . . . .	52
5.7	Differenz LSC - INT . . . . .	52
5.8	Differenz SMA - LSC . . . . .	52
5.9	Differenz SMA - KMS . . . . .	53
5.10	Differenz LSC - KMS . . . . .	53
5.11	Differenz INT - KMS . . . . .	53
5.12	Differenz KMS - AVISO . . . . .	53
A.1	Profil: ANGEL-02-02-01 . . . . .	59

# Kapitel 1

## Einführung und Problemstellung

### 1.1 Einleitung

Das Erdschwerefeld ist in vielen Gebieten der Naturwissenschaften Gegenstand von Untersuchungen. Es ist ein Kraftfeld, welches durch die Massenanziehung und Rotation der Erde hervorgerufen wird. Die Erforschung des Erdschwerefeldes ist unter anderem in der Geodäsie und der Geophysik von besonderem Interesse. In der Geodäsie deshalb, weil sich vielerlei Messungen auf das Schwerefeld der Erde beziehen oder von ihm abhängen. Beispielsweise ist die Positionierung über Satelliten oftmals nur dann möglich, wenn die Bahn der Satelliten, welche sich nach dem Erdschwerefeld richtet, bekannt ist. Auch ein präzises Nivellement setzt Kenntnisse über das Erdschwerefeld voraus. In der Geophysik dienen genaue hochaufgelöste Schwerefeldmodelle zusammen mit anderen Beobachtungstypen dazu, Dichtemodelle der Kruste und der Lithosphäre zu entwickeln, um die geologischen Strukturen unterhalb der Erdoberfläche zu modellieren. Daraus lassen sich tektonische Prozesse nachstellen und Einschätzungen des Erdbebenrisikos gefährdeter Regionen treffen. Außerdem sind diese Kenntnisse zu Explorationszwecken, das heißt zur Verifizierung und Lokalisierung von Bodenschätzen, bedeutsam.

Ein Potentialfeld kann durch Flächen gleichen Potentials und durch seine Kraftlinien beschrieben werden. Eine spezielle Äquipotentialfläche wird als Referenzfläche festgelegt und als Geoid bezeichnet. Sie stimmt mit der Meeresoberfläche überein, sofern Gezeiten, Wellen und Strömungen von ihr entfernt werden. Die Kraftlinien kennzeichnen die Richtung der Erdbeschleunigung. Die Richtung der Kraftlinie in einem bestimmten Punkt kann mittels des Schwerkraftvektors, der senkrecht auf der Potentialfläche steht, beschrieben werden. Der Betrag des Schwerkraftvektors wird als Schwerebeschleunigung bezeichnet. Das Geoid kann aus Messungen bestimmt werden. Der globale, langwellige Teil wird aus Satellitenbahnstörungen und der höher aufgelöste, regionale bis lokale Teil aus gravimetrischen und altimetrischen Messungen bestimmt. Die Wellenlänge bezeichnet in diesem Zusammenhang die räumliche Auflösung von Schwerefeldgrößen und ist somit ein Maß der Detailliertheit. Als Messgröße zur Geoidbestimmung soll hier die Änderung der Erdschwerebeschleunigung genutzt werden. Dazu werden je nach Art der Vermessung spezielle Gravimeter als Messgeräte verwendet.

Diese Diplomarbeit wurde im Auftrag des GeoForschungsZentrums (GFZ) in Potsdam und des Sonderforschungsbereiches 267 der FU Berlin im Zuge der Auswertung der aerogravimetrischen Messkampagne<sup>1</sup> vor der Küste Südchiles erstellt. Gegenstand der Arbeit ist die Bestimmung einer regionalen bis lokalen Geoidlösung am Beispiel des CHICAGO-Datensatzes. Der Arbeitsbereich

---

<sup>1</sup>CHICAGO, **CHI**lean Coastal **Aero**Geophysical **O**bservation

Aerogravimetrie<sup>2</sup> der Sektion 1.3 des GFZ führte die dazu notwendigen Messungen im Herbst des Jahres 2002 durch.

## 1.2 Erläuterung der Problemstellung

Die Arbeit untersucht die Fragestellung, inwieweit die Aerogravimetrie zur Geoidberechnung und Geoidverdichtung beitragen kann. Aufgabe ist es, aus aerogravimetrischen Messungen regionale Geoidlösungen zu bestimmen. Hierzu sollen drei Verfahren verglichen werden, die sich unterschiedlicher Konzepte bedienen.

- Zunächst wird das Integralverfahren erläutert, das als Weiterentwicklung der klassischen Stokes-Lösung betrachtet werden kann. Eine Darstellung dieses Verfahrens wird aufgrund seiner Bedeutung zur theoretischen Erschließung der Problemstellung den anderen Verfahren vorangestellt.
- Die Erläuterung der Theorie der Multipole und ihre Anwendung in der Geoidberechnung bilden den Schwerpunkt des theoretischen Teils dieser Arbeit. Das Wesen dieser Methode besteht darin, das Gravitationspotential der Erde durch Multipole und ihre Potentiale zu beschreiben.
- Als drittes Verfahren zum Vergleich dient das Verfahren der Kollokation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dieses Verfahren nutzt zur Berechnung empirische Kovarianzfunktionen.

Die Messung kann in der Regel nicht am Geoid stattfinden. Grundsätzlich ist es zur Berechnung des Geoids jedoch notwendig, die Messungen auf diese Äquipotentialfläche zu beziehen. Um Schwerefeldgrößen in der Höhe zu versetzen, wird die sog. Feldfortsetzung angewendet. Die Methode der Multipole sowie die Methode der Kollokation arbeiten ohne eine Schwerefeldfortsetzung. Im Gegensatz dazu beinhaltet das Integralverfahren eine Feldfortsetzung.

Im praktischen Teil dieser Arbeit werden die Ergebnisse der Verfahren gegenübergestellt und verglichen, um Aussagen hinsichtlich der Qualität treffen zu können. Eine weitere Möglichkeit, die Ergebnisse zu bewerten, besteht im Vergleich mit unabhängigen Daten. Hierzu eignen sich im marinen Bereich beispielsweise aus Altimeterdaten abgeleitete mittlere Meereshöhen. Zudem ist eine Aussage darüber möglich, ob eine Schwerefeldfortsetzung im Rahmen dieser Untersuchung zu maßgeblichen Unterschieden in den Ergebnissen führt.

## 1.3 CHICAGO-Messkampagne

Ziel der Messkampagne, deren erster Teil im Herbst 2002 stattfand, war die nähere Untersuchung des Kontinentalrandes entlang der Südanden. Dieser zieht sich entlang der Westküste Südamerikas, von Kolumbien bis nach Feuerland. Die ozeanische Nazca-Platte drückt gegen die kontinentale Südamerikanische Platte und wird dabei mit einer Geschwindigkeit von ca. 65 mm pro Jahr unter die kontinentale Platte subduziert. Der Bereich, wo die Nazca-Platte unter die kontinentale Platte abtaucht, wird aufgrund seiner Tiefe auch als Graben bezeichnet. Generell werden an konvergenten Plattenrändern über 90% aller Erdbeben hervorgerufen. Deshalb ist es

---

<sup>2</sup>(engl. aerogravimetry), Fluggravimetrie, Messung der Erdschwerebeschleunigung aus dem Flugzeug

von besonderer Bedeutung, die Vorgänge an Kontinentalrändern genauer zu erforschen. Ziel der Expedition ist die Erstellung eines Geoidmodells für die Anden und ferner die Modellierung der Tiefenstruktur der Anden. Von besonderem Interesse ist das Gebiet um den Graben, die Mocha- und die Valdivia-Bruchzone, wo erforscht werden soll, wie sich der Verlauf der Bruchzonen im Bereich des Grabens gestaltet. Weiterführendes Ziel der Wissenschaftler ist es, zusammen mit dem Arbeitskreis SFB-267 der Freien Universität Berlin ein sog. Asperity<sup>3</sup>-Modell der Südanden zu entwickeln. Als Asperities bezeichnet man topographische Strukturen der Kontinentalplatten, die ein reibungsfreies Abtauchen verhindern. Es wird davon ausgegangen, dass sich aufgrund der Asperities im Subduktionskanal Spannungen aufbauen, die schließlich durch schwere Erdbeben abgebaut werden. Zur Lokalisierung der Asperities stellen Geoidmodelle zusammen mit seismologischen Beobachtungen ein geeignetes Hilfsmittel dar.

Das Gesamtprojekt wurde in zwei Expeditionen unterteilt. Der weiß schraffierte Bereich in Abb. 1.1(a) ist im Herbst 2002 vermessen worden und bildet die Datengrundlage für die Auswertungen innerhalb dieser Arbeit (Meyer und Pflug, 2003). Der orange schraffierte Bereich kennzeichnet das Gebiet, das in der zweiten Expedition vermessen werden soll. Ein Termin dafür steht allerdings noch aus. Die geplanten Flugprofile der ersten Expedition sind in Abb. 1.1(b) detailliert hervorgehoben. Zwei Profile wurden beispielhaft mit ihrer Kennung versehen. Mit der Abkürzung ANGEL<sup>4</sup> beginnen die Profilenames. Die Zahl 10 steht für die laufende Nummer des Flugtages und die Nummern 01 und 02 kennzeichnen die einzelnen Profile entsprechend der Reihenfolge während des Fluges. Der Abstand der in Ost- West- Richtung verlaufenden Flugprofile beträgt ca. 11 km.

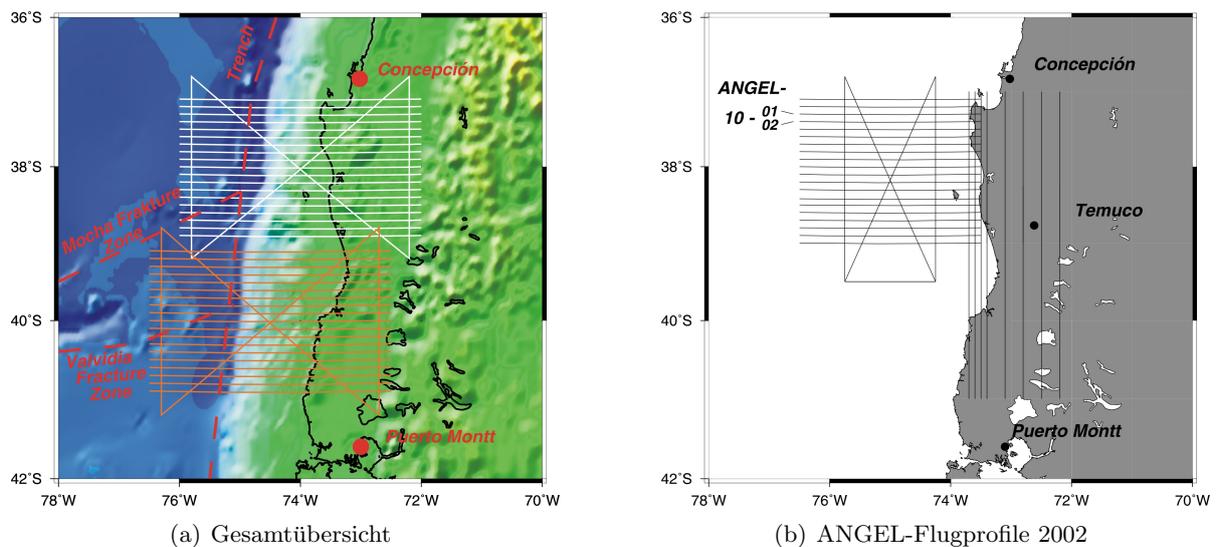


Abb. 1.1: CHICAGO-Messkampagne

<sup>3</sup>(dt. Schroffheit, Rauigkeit)

<sup>4</sup>Airborne Navigation and Gravity Ensemble & Laboratory

# Kapitel 2

## Messsysteme

Im folgenden Kapitel soll näher auf den Aufbau und die Funktionsweise des LaCoste & Romberg-Gravimeters (LCR-Gravimeter) eingegangen werden (LaCoste and Romberg, LLC, 1998). Fluggravimeter müssen sehr sensibel auf Schwereänderungen reagieren können und störende Flugzeugbeschleunigungen reduzieren. Dazu sind spezielle Eigenschaften des Messsystems erforderlich. Diese werden aufgrund ihrer großen Bedeutung ausführlicher beschrieben. Vorerst soll jedoch das allgemeine Prinzip der Aerogravimetrie herausgestellt werden:

$$g = f_s - \ddot{z} \quad (2.1)$$

Um die Schwerebeschleunigung  $g$  zu isolieren, muss die Beschleunigung des Sensors  $\ddot{z}$  von den Gravimetermessungen  $f_s$  subtrahiert werden. Moderne GPS<sup>1</sup>-Auswerteverfahren ermöglichen die Berechnung der Beschleunigung des Sensors. Im Abschnitt 2.2 wird das Vorgehen zur Ableitung der Beschleunigung aus dem Gravimetersensor anschaulich dargestellt.

Es existieren je nach Zielsetzung und Art der Vermessung verschiedene Typen von Gravimetern. Sie können entweder den portablen oder den feststehenden Instrumenten zugeordnet werden. Die klassischen Landgravimeter sowie Flug- und Schiffsgravimeter gehören zur Gruppe der portablen Instrumente. Die hochgenauen Supraleitgravimeter sind am jeweiligen Ort fest installiert. Portable Geräte können plattformgebunden, das heißt fest mit dem Boden des Flugzeugs verschraubt oder auf einer stabilisierten Plattform installiert werden.

Die Aerogravimetrie beschäftigt sich mit der Bestimmung der Erdschwerebeschleunigung oder Änderung derselben aus einem Flugzeug. Die Fluggravimetrie bedient sich relativ junger Verfahren, da neuere technische Entwicklungen die Anwendung solcher Messsysteme erst ermöglichten. Heute nimmt die fluggestützte Messung einen festen Platz innerhalb der Methoden der Schwere-messung ein. Dafür gibt es mehrere Gründe. Mit einem Flugzeug ist es möglich, in kurzer Zeit große Flächen abzudecken und schwer zugängliche Gebiete wie Ozeane, Polregionen, Hochgebirge oder tropische Regenwälder zu überfliegen. Dagegen ist es unmöglich, einen Kontinentalrand zu Fuß und vom Schiff aus sinnvoll und in angemessener Zeit zu vermessen. Satellitendaten sind ebenso nur begrenzt nutzbar, da die Geophysik an dem Bereich der mittleren und kurzen Wellenlängen, welche sich nicht aus den Satellitendaten ablesen lassen, interessiert ist. Im Gegensatz zu den aus Satellitendaten gewonnenen Schwerefeldinformationen, die eine maximale Auflösung von etwa 55 km Halbwellenlänge liefern, können konventionell genutzte Flugzeuggravimeter eine Auflösung von etwa 6–12 km Halbwellenlänge erreichen. Mit sog. plattformgebunden<sup>2</sup> Systemen kann sie u. U. noch höher sein.

---

<sup>1</sup>Global Positioning System, satellitengestütztes Navigationssystem

<sup>2</sup>(engl. strapdown)

## 2.1 Installation der Messsysteme

Aus Abb. 2.1 wird ersichtlich, dass vielfältige Messinstrumente in das Flugzeug<sup>3</sup> eingerüstet worden sind. Dazu zählen neben dem LCR-Gravimeter auf einer stabilisierten Plattform ein

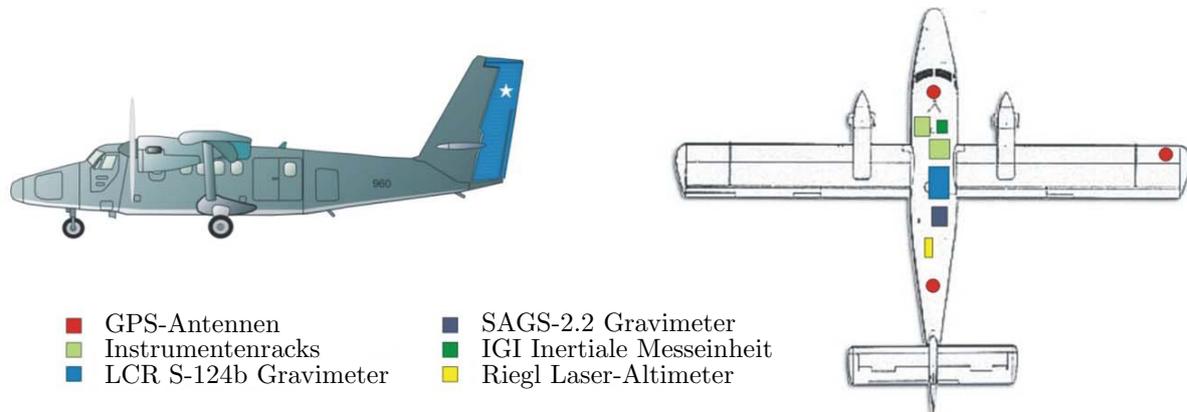


Abb. 2.1: Einrüstung in das Flugzeug

plattformgebundenes Gravimeter<sup>4</sup> aus Beschleunigungsmessern, eine Inertiale Messeinheit<sup>5</sup> zur Gewinnung der Orientierungswinkel des Flugzeugs, ein Laseraltimeter, drei GPS-Antennen und zahlreiche Registrierungseinheiten im Instrumentenrack. Die Inertiale Messeinheit setzt sich aus drei Beschleunigungsmessern und drei Kreiseln zusammen, die jeweils senkrecht zueinander stehen. Es handelt sich hierbei ebenfalls um ein plattformgebundenes Messsystem. Mit solchen Geräten lassen sich Winkelraten und Beschleunigungen messen. Nicht alle Messdaten wurden für die Bearbeitung im Rahmen dieser Arbeit genutzt. Der Schwerpunkt liegt auf dem LCR-Gravimeter und dem GPS-System. Diese bilden ein mögliches Grundsystem für die moderne Aerogravimetrie. Aufgrund der großen Bedeutung des GPS in der Fluggravimetrie wird dieses Thema im Abschnitt 4.1 gesondert erläutert.

## 2.2 Aufbau und Funktionsweise des Gravimeters

Das LCR-Gravimeter S124b ist für den Betrieb auf bewegten Plattformen konzipiert, womit es gleichermaßen für den Einsatz auf einem Schiff geeignet ist. Den Kern des Gerätes bildet eine hochempfindliche Feder, die mit einem Balken verbunden ist und an dessen Ende eine Testmasse befestigt wird. Der Balken ist am anderen Ende drehbar gelagert (Abb. 2.2(b)). Die auftretende Dynamik bei der flugzeuggestützten Messung erfordert eine gedämpfte, aktiv stabilisierte Plattform. Außerdem muss der Hebelarm ständig gedämpft werden. Zu diesem Zweck wurden in das Gravimeter zwei Luftdämpfer eingebaut, die die heftigen Störbewegungen des Balkens infolge der Flugzeugbewegung reduzieren sollen. Das Federgravimeter beruht auf dem Prinzip der Federwaage. Bei einer Schwereänderung ändert sich die Länge der Feder bis sich das statische Gleichgewicht einstellt. Aus dem Hookschen Gesetz folgt, dass die Dehnung der Feder für kleine Auslenkungen proportional zur Kraftänderung ist. Wenn sich die Schwerebeschleunigung verändert, wird die Feder stärker oder schwächer ausgelenkt und es muss eine Gegenkraft aufgebracht werden, um die Testmasse wieder in die Nulllage zu bringen. Die dazu notwendige Kraft

<sup>3</sup>Typ: De Havilland DH- C6, Twin Otter

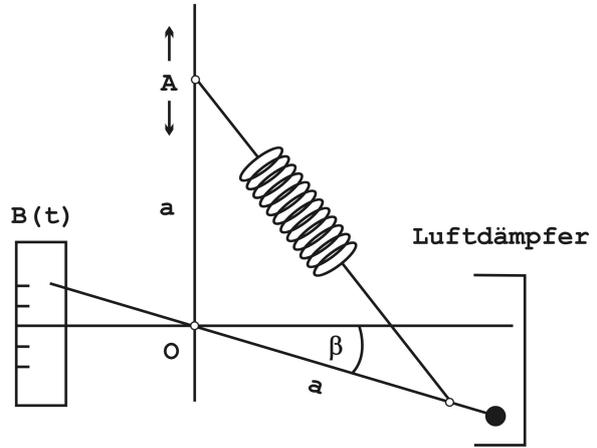
<sup>4</sup>SAGS, Strap-down AeroGravimetry System)

<sup>5</sup>IMU, Inertial Measurement Unit

wird durch Registrierung einer Federvorspannung gemessen. Änderungen der Schwere werden somit über die Änderung der Gegenkraft beobachtet<sup>6</sup> und mittels einer Kalibrierfunktion in die Schwere-Einheit transformiert. Man unterscheidet zwischen Translations- und Rotationssystemen. Ein senkrecht aufgehängtes Feder-Masse-System wird als Translationssystem bezeichnet. Das LCR-Gravimeter beruht auf dem Prinzip der Rotation. In Abb. 2.2(b) ist ein solches Ro-



(a) Installation im Flugzeug



(b) Funktionsweise

Abb. 2.2: LaCoste & Romberg-Gravimeter S124b

tationssystem stark vereinfacht dargestellt. Diese Systeme sind den Translationsystemen wegen ihres höheren Auflösungsvermögens der Schwereunterschiede bei gleicher Ablesegenauigkeit überlegen. Eine entsprechende Ableitung des Differentialquotienten wird in Gl. 2.6 angegeben. Im Folgenden wird auf die Bewegungsgleichung dieses Feder-Masse-Systems und seine besonderen Eigenschaften eingegangen, um die Formel zur Berechnung der Beschleunigung im Sensor ableiten zu können. Allgemein beschreibt

$$g + \ddot{z} - ST = \ddot{B} + 2\delta\dot{B} + \omega_0^2 B \quad (2.2)$$

die Bewegung einer Testmasse, die an einer Feder im Erdschwerefeld  $g$  aufgehängt wurde und zusätzlich unter dem Einfluss der Trägersystembeschleunigung und eines gedämpften und harmonischen Oszillators steht (Torge, 1989). Die Federvorspannung<sup>7</sup>  $ST$  kennzeichnet eine Kraft pro Masseneinheit. Der Abstand  $B$  des Balkens von der Horizontalen wird kapazitiv in Volt gemessen. Aufgrund der Störbeschleunigungen, die aus der Flugzeugbewegung resultieren, und der deswegen eingebauten Luftdämpfer führt der Balken ständig eine gedämpfte Schwingung durch. Im praktischen Betrieb ist es nicht möglich, den Balken vor der Ablesung in die Nullposition zu bringen. Deshalb muss die Bewegungsgleichung um die Schwingungsterme  $\ddot{B}$ ,  $2\delta\dot{B}$  und  $\omega_0^2 B$  erweitert werden. Die Konstante  $\delta$  beschreibt die viskose Dämpfung und  $\omega_0$  die Eigenkreisfrequenz des Schwingers. Die Größe  $\ddot{z}$  in Gl. 2.2 stellt die Vertikalbeschleunigung des Sensors dar, die durch die Bewegung des Flugzeugs hervorgerufen wird. Um die Eigenschaften dieses Feder-Masse-Systems zu verstehen, sind einige theoretische Ausführungen hinsichtlich der Empfindlichkeit notwendig. Dazu soll folgendes Momentengleichgewicht betrachtet werden. Die Gleichung

$$M = M_g - M_R = amg \cos(\beta) - ak(l - l_0) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = 0 \quad (2.3)$$

<sup>6</sup>Feedback-Systeme

<sup>7</sup>(engl. Spring Tension)

beschreibt die Summe der Momente aus Rückstellkraft  $M_R$  und der Schwerebeschleunigung  $M_g$ . Ein Abgleichen dieser Momente aufeinander bezeichnet man als Astation (Torge, 1989). Damit kann eine Steigerung der Empfindlichkeit erreicht werden. In Gl. 2.3 bezeichnen  $k$  die Federkonstante,  $m$  die Masse und  $l$  bzw.  $l_0$  die Länge der Feder im gedehnten bzw. ungedehnten Zustand. Die Größe  $a$  steht für den Abstand zwischen dem Drehpunkt und dem Angriffspunkt der Feder am Balken (Abb. 2.2(b)). Es sei darauf hingewiesen, dass im Folgenden der Auslenkwinkel  $\beta$  anstelle des Abstandes  $B$  als Maß für die Auslenkung genutzt wird. Schrittweises differenzieren nach  $\beta$  und  $g$  liefert die Formel für die Empfindlichkeit. Die Länge der Feder  $l$  ist ebenfalls eine Funktion des Auslenkwinkels  $\beta$ :

$$l^2 = 2a^2(1 - \cos(\frac{\pi}{2} + \beta)) \quad (2.4)$$

$$dl = -\frac{a^2}{l} \sin(\frac{\pi}{2} + \beta) d\beta \quad (2.5)$$

Schließlich kann die Empfindlichkeit des Feder-Masse-Systems über den Differentialquotienten

$$\frac{d\beta}{dg} = -\frac{\partial_g M}{\partial_\beta M} = \frac{-am \cos(\beta)}{\frac{1}{2}ak \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})(l - l_0) - \frac{a^3k \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}) \cos(\beta)}{l} - agm \sin(\beta)} \quad (2.6)$$

ausgedrückt werden. Eine hohe Empfindlichkeit bedeutet, dass durch sehr kleine Änderungen in der Schwerebeschleunigung  $g$  relativ große Änderungen des Auslenkwinkels  $\beta$  verursacht werden.

Durch Festlegen von Systemparametern kann die Empfindlichkeit erheblich gesteigert werden. Zunächst lässt sich anhand Gl. 2.6 feststellen, dass für die Nulllänge  $l_0 = 0$  der Feder die Sensitivität am größten ist. Eine Nulllängen-Feder ist eine Feder, die im ungedehnten Zustand die Länge Null hat. Bei gewöhnlichen helixförmigen Federn ist das jedoch praktisch nicht möglich, da die Windungen vorher aneinander stoßen würden. Kann der Graph im Kraft-Dehnungs-Diagramm durch Null extrapoliert werden, spricht man ebenfalls von einer Nulllängenfeder. Diese Entdeckung geht auf L. J. B. LaCoste zurück. Wenn die Nulllänge der Feder  $l_0 = 0$  gesetzt wird, liefert Gl. 2.6 den Grenzwert:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{d\beta}{dg} = \infty \quad (2.7)$$

Bis hierhin kann festgestellt werden, dass durch eine spezielle Geometrie, das Verwenden einer Nulllängenfeder und das Einhalten des Arbeitsbereiches  $\beta \approx 0$  maximale Sensitivität geschaffen wird. An dieser Stelle soll der Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer der Feder und der Empfindlichkeit dargelegt werden. Dazu wird ein Ansatz über die Bewegungsgleichung

$$J_0 \ddot{\beta} + M(\beta) = 0 \quad (2.8)$$

im Rotationsystem gewählt (Torge, 1989). Dabei bezeichnet  $J_0$  das Trägheitsmoment. Eine Taylorentwicklung von  $M(\beta)$  bis zum ersten Grad und Einsetzen dieser in Gl. 2.8 liefert die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\beta} - \frac{\partial_\beta M|_0}{J_0} \beta = 0 \quad (2.9)$$

Der nullte Term der Entwicklung ist wegen Gl. 2.3 gleich Null. Der Term vor dem Auslenkwinkel  $\beta$  wird als Eigen-Kreisfrequenz  $\omega_0^2$  bezeichnet. Mit der Gl. 2.6 ergibt sich für die Schwingungsdauer  $T_0$  der Ausdruck:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = 4\pi^2 \frac{J_0}{\partial_\beta M|_0} \frac{d\beta}{dg} \quad (2.10)$$

Die Schwingungsdauer ist proportional zur Empfindlichkeit der Feder. Eine unendlich hohe Empfindlichkeit ist gleichbedeutend mit einer unendlich großen Schwingungsdauer. Im Grenzfall schwingt die Feder nicht. Der Begriff der unendlichen Schwingungsdauer ist in der Literatur

häufig zu finden (Meyer u. a., 2003). Jedoch lassen sich die beschriebenen Eigenschaften praktisch nicht exakt realisieren. In Abb. 2.2(b) geht man davon aus, dass  $OA$  genau in Lotrichtung aufgebaut ist. Ebenso wenig kann der Balken ständig in der Horizontalen gehalten werden ( $\beta = 0$ ). Außerdem verändern sich die Eigenschaften einer Feder im Laufe der Zeit durch sog. Kriechen. Zusammenfassend kann jedoch festgestellt werden, dass sich die Empfindlichkeit des Systems, im Vergleich zu linearen Federkraftmessern, erheblich steigern lässt.

Schließlich kann die ursprüngliche Bewegungsgleichung 2.2 für die praktische Anwendung vereinfacht werden. Da der Balken sehr stark gedämpft wird, muss der Term  $\ddot{B}$  nicht berücksichtigt werden. Der positionsabhängige Ausdruck  $\omega_0^2 B$  wird ebenso vernachlässigt, da es sich um ein hochsensitives System handelt ( $\omega_0^2 \rightarrow 0$ ). Die endgültige Vorschrift zur Berechnung der Beschleunigung im Gravimeter wird folgendermaßen angegeben (LaCoste and Romberg, LLC, 1998):

$$f_s = g + \ddot{z} = S(ST + K\dot{B} + CC) \quad (2.11)$$

Eine Konstante  $K$  wird als Funktion der Empfindlichkeit des Balkens und der Dämpfung desselben berechnet und an die Ablesung  $\dot{B}$  angebracht. Darüber hinaus muss zusätzlich ein Skalenfaktor  $S$  berücksichtigt werden, der die Messungen von der Einheit Skalenteile (Skt) in die Einheit Milligal<sup>8</sup> konvertiert. Außerdem wurde Gl. 2.11 um einen Korrekturterm  $CC$  erweitert, der die sog. Kreuzkopplung<sup>9</sup> beschreibt. Damit wird das Übersprechen einer Horizontalbeschleunigung in die Vertikalkomponente berücksichtigt. Dies ist aufgrund der Bauweise möglich, muss jedoch verständlicherweise korrigiert werden (Meyer u. a., 2003). Dieser Fehlereinfluss kann durch die Reihenentwicklung

$$CC = X_{ACC}^2 \langle \ddot{x}^2 \rangle + L_{ACC}^2 \langle \ddot{y}^2 \rangle + V_E \langle \dot{z}^2 \rangle + V_{CC} \langle \dot{y}z \rangle + A_X \langle \ddot{x}\dot{z} \rangle + A_L \langle \dot{y}\dot{z} \rangle + A_X^2 \langle \ddot{x}^2 \dot{z} \rangle \quad (2.12)$$

beschrieben werden. Darin sind die signifikanten Terme für die Korrektur dieses Gravimeters berücksichtigt. Die Koeffizienten  $X_{ACC}^2$ ,  $L_{ACC}^2$ ,  $V_E$ ,  $V_{CC}$ ,  $A_X$ ,  $A_L$  und  $A_X^2$  müssen im Labor bestimmt und regelmäßig überprüft werden. Die Größen  $\ddot{x}$  und  $\ddot{y}$  stellen die Ablesungen der quergestellten bzw. längsgestellten Beschleunigungsmesser auf dem Gravimeter dar. Die Position  $z$  und die Geschwindigkeit  $\dot{z}$  des Balkens wurden in Gl. 2.2 mit  $B$  und  $\dot{B}$  bezeichnet.

---

<sup>8</sup>Einheit der Beschleunigung,  $10^5 \text{ mGal} = 1 \text{ m/s}^2$

<sup>9</sup>(engl. Cross Coupling)

# Kapitel 3

## Konzepte der Geoidberechnung

Die lokale Schwerefeldberechnung beschäftigt sich mit der Berechnung von Geoidundulationen höherer Genauigkeit innerhalb eines begrenzten Gebietes. In diesem Kapitel werden drei Herangehensweisen der lokalen Geoidberechnung näher erläutert. Dazu ist es zunächst notwendig, die theoretischen Grundlagen zu beschreiben. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die Integralmethode (Abschnitt 3.2), die Methode der Multipole (Abschnitt 3.3) und die der Kollokation (Abschnitt 3.4) vorgestellt.

### 3.1 Grundlagen

#### 3.1.1 Laplacesche Differentialgleichung und Lösungen

Jeder Körper mit einer Masse ruft in seiner Umgebung ein Potentialfeld hervor. Die Stärke des Feldes ist abhängig von der relativen Position zum Körper. Das Gravitationspotential der Erde berechnet sich wie folgt:

$$V = k \iiint_{Erde} \frac{dm}{l} = k \iiint_{Erde} \frac{\rho}{l} dV \quad (3.1)$$

Zur Berechnung des Potentials muss über das differentielle Massenelement  $dm$  integriert werden. Der Abstand  $l$  liegt zwischen dem Punkt  $P$ , an dem das Potential berechnet werden soll und dem Quellpunkt der Integration  $Q$ . Die Größe  $k$  steht für die Gravitationskonstante. Eine bestimmte Massenverteilung ruft im Außenraum ein einziges Potential hervor. Diese Zuordnung ist eindeutig. Im Gegensatz dazu kann von einer Potentialfunktion nicht eindeutig auf eine Dichteverteilung im Erdinnern geschlossen werden. Wäre die Dichtefunktion  $\rho$  überall in der Erde bekannt, könnte das Gravitationspotential mit Gl. 3.1 berechnet werden. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es kann außerhalb der Erdoberfläche in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt werden. Im Folgenden werden die Herkunft und der Aufbau einer Kugelfunktionsentwicklung näher erläutert.

Das Gravitationspotential der Erde stellt im Außenraum eine harmonische Funktion dar. Die Laplacesche Differentialgleichung gilt für alle harmonische Funktionen. Sie stellt den Ausgangspunkt bei der Suche nach Funktionen dar, die das Gravitationspotential approximieren sollen. Für den Außenraum entsteht sie durch zweifache Differentiation des Potentials bezüglich der Koordinaten des verwendeten Systems. Angewendet auf Gl. 3.1 ergibt sich in kartesischen Ko-

ordinaten:

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \quad (3.2)$$

Alle Funktionen, die das Gravitationspotential der Erde beschreiben sollen, müssen im Außenraum dieser Bedingung genügen. Die Lösung gelingt über einen Ansatz nach der Separation der Variablen:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)Y(\theta, \lambda) = f(r)g(\theta)h(\lambda) \quad (3.3)$$

Nach dem Einsetzen der entsprechenden Ableitung in die Laplacesche Differentialgleichung ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{r^{n+1}} \\ g(\theta) &= P_{nm}(\cos \theta) \\ h_1(\lambda) &= \cos(m\lambda) \\ h_2(\lambda) &= \sin(m\lambda) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Funktionen  $P_{nm}$  heißen zugeordnete Legendresche Funktionen und werden in Gl. 3.8 definiert. Gemäß dem Superpositionsprinzip bilden alle Linearkombinationen die Lösung für den Außenraum. Die Reihenentwicklung

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda) \quad (3.5)$$

bezeichnet man als Kugelfunktionsentwicklung. Die Reihe wurde an der Stelle  $r = R$  entwickelt und konvergiert nur im Außenraum der Kugel. Die sog. Kugelflächenfunktionen  $Y_n$  haben nach Aufsummierung sämtlicher Linearkombinationen die generelle Form:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [a_{nm}P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda)] \quad (3.6)$$

Die Größen  $a_{nm}$  und  $b_{nm}$  repräsentieren eine Vielzahl von Konstanten. Eine Aufgabe der Geodäsie besteht darin, diese Koeffizienten zu bestimmen. Die Kugelfunktionen werden in der Geodäsie häufig genutzt, um den langwelligen Teil des Gravitationspotentials der Erde zu beschreiben. Dieses setzt jedoch eine globale Datenabdeckung voraus.

Die Legendreschen Polynome  $P_n(t = \cos \theta)$  können mit der Rekursionsformel

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n}P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n}tP_{n-1}(t) \quad (3.7)$$

durch Vorgabe des ersten  $P_0 = 1$  und des zweiten Polynoms  $P_1 = t$  berechnet werden. Daraus werden die zugeordneten Funktionen durch

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (3.8)$$

gebildet. Eine wichtige Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen 3.6 besteht in der folgenden Transformation (Heiskanen und Moritz, 1967):

$$\begin{aligned} Y_n(\theta_P, \lambda_P) &= \sum_{m=0}^n [a_{nm}P_{nm}(\cos \theta_P) \cos(m\lambda_P) + b_{nm}P_{nm}(\cos \theta_P) \sin(m\lambda_P)] \\ &= \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\theta_Q, \lambda_Q) P_n(\cos \psi_{PQ}) d\sigma \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese wird zur Herleitung der Integrationsmethode in Abschnitt 3.2 verwendet.

### 3.1.2 Störpotential, Schwerestörung und Schwereanomalie

Alle Verfahren nutzen sog. Schwerestörungen als Ausgangsgrößen der Geoidberechnung. Störgrößen entstehen durch die Differenz zu einem mathematischen Modell. Dazu eignet sich ein Potential, das durch ein rotierendes Ellipsoid hervorgerufen wird. Die Erde besitzt in zweiter Näherung die Form eines solchen Körpers, da sie nicht starr ist und somit aufgrund der Rotation an den Polen abgeplattet wird. Das Störpotential der Erde  $T$  ist durch die Differenz des realen Schwerepotentials  $W$  zum Normalpotential  $U$  definiert:

$$T = W - U \quad (3.10)$$

Eine spezielle Potentialfläche des Erdschwerefeldes wird durch Festlegung eines bestimmten Wertes  $W_0$  definiert. Diejenige Fläche, die mit der ideellen Meeresoberfläche übereinstimmt, wird als Geoid bezeichnet. Diese Fläche kann man sich als geschlossen unter der Erdoberfläche fortgesetzt vorstellen.

Das Normalpotential wird durch die Massenanziehung und Rotation eines bestimmten Ellipsoids hervorgerufen. Durch die Bestimmung von vier Parametern (Tab. 4.1) ist die Gestalt des Ellipsoids und die des Normalpotentials im gesamten Raum festgelegt. Die Normalschwerebeschleunigung  $\gamma$  geht durch Gradientenbildung aus dem Normalpotential hervor. Für das Normalpotential kann ebenso eine Referenzfläche  $U_0$  definiert werden. Der Zahlenwert dieser Äquipotentialfläche kann gleich dem der realen Referenzfläche gesetzt werden ( $U_0 = W_0$ ). Das Ellipsoid ist so bemessen, dass der Abstand zum Geoid maximal  $N = \pm 100\text{m}$  beträgt (Abb. 3.1(a)). Dieser Abstand wird als Geoidundulation bezeichnet.

Die Schwerestörung

$$\delta g = g_P - \gamma_P = \nabla T = -\frac{\partial T}{\partial h} \quad (3.11)$$

lässt sich über den Gradienten des Störpotentials  $T$  oder über die Differenz der Schwerebeschleunigung  $g$  zur Normalschwerebeschleunigung  $\gamma$  im selben Punkt  $P$  berechnen (Heiskanen und Moritz, 1967).

Die Schwereanomalie  $\Delta g = g_P - \gamma_Q$  bezeichnet ein anderes Maß der Störbeschleunigung. Sie bezieht sich entgegen der Festlegung der Schwerestörung nicht auf die gleiche Höhe  $P$ , sondern geht durch Differenz zur Normalschwerebeschleunigung im Punkt  $Q$  hervor (Abb. 3.1(b)). Die Poten-

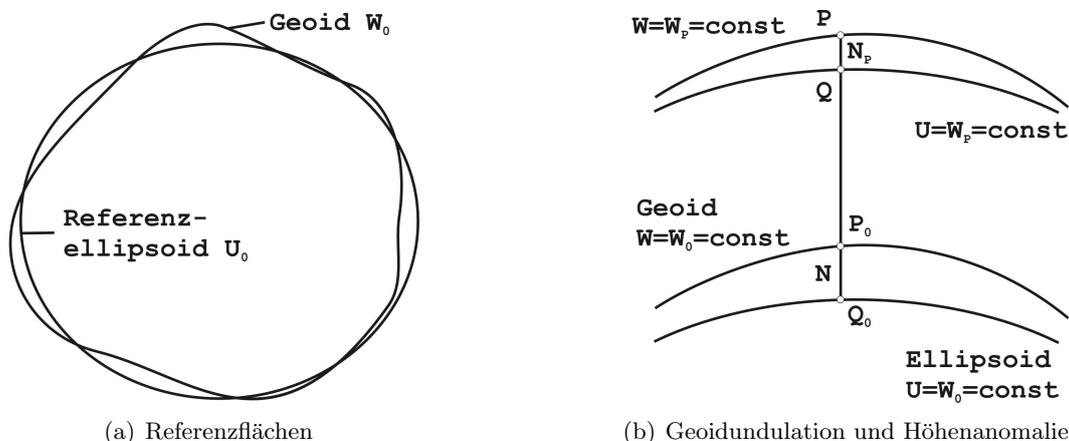


Abb. 3.1: Erdschwere- und Normalschwerefeld

tialflächen des Normalpotentials im Punkt  $Q$  und des realen Schwerepotentials in  $P$  besitzen den gleichen Zahlenwert ( $U_Q = W_P$ ). Der Höhenversatz zwischen diesen beiden Flächen entspricht der Höhenanomalie  $N_P$ . Der Abstand der Referenzflächen  $U_0 = W_0$  hingegen wird als Geoidundulation  $N$  bezeichnet. Der Unterschied zwischen der Höhenanomalie und der Geoidundulation ist genau der der Schwerefeldfortsetzung. In Abhängigkeit der Höhe und der Genauigkeit kann u. U. auf eine Feldfortsetzung verzichtet werden. Das Störpotential am Geoid wird über Bruns' verallgemeinertes Theorem in die Geoidundulation umgerechnet (Heiskanen und Moritz, 1967).

$$N = \frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \quad (3.12)$$

Dafür muss die Normalschwerebeschleunigung  $\gamma$  am Referenzellipsoid genutzt werden. Der zweite Term in Gl. 3.12 ist nur dann ungleich Null, wenn das Normalpotential am Referenzellipsoid  $U_0$  vom Schwerepotential  $W_0$  abweicht. Das Störpotential wird nach der Gl. 3.10 aus dem unbekanntem Schwerepotential berechnet und kann somit ebenfalls als Kugelfunktionsentwicklung ausgedrückt werden. Die Entwicklung lautet entsprechend Gl. 3.5 in verkürzter Form (Heiskanen und Moritz, 1967):

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda) \quad (3.13)$$

Diese Reihendarstellung entspricht weitestgehend der für das Gravitationspotential 3.6. Nur bestimmte Koeffizienten besitzen einen anderen Zahlenwert. Die Entwicklung 3.13 beginnt in der Regel mit dem Grad  $n = 2$ , da Massengleichheit von Ellipsoid und Erdkörper und das Zusammenfallen der beiden Schwerpunkte vorausgesetzt wird.

### 3.1.3 Schwerefortsetzung und Einfluss der Topographie

Mit Schwerefortsetzung bezeichnet man das Vorgehen, Schwerefeldgrößen in ihrer Höhe zu versetzen. Dies ist zum einen nach oben,<sup>1</sup> und zum anderen nach unten<sup>2</sup> möglich. Messungen können in der Regel nicht exakt am Geoid durchgeführt werden. Für die Berechnung der Geoidundulation ist es jedoch notwendig, das Störpotential am Geoid zu kennen. In der Praxis ist eine Schwerefortsetzung durchaus problematisch, da Messungen immer fehlerbehaftet sind. Für praktische Anwendungen kann in Abhängigkeit der Genauigkeit und der Höhe der Messdaten auf eine Schwerefeldfortsetzung verzichtet werden. Die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren der Multipole und der Kollokation arbeiten ohne eine Schwerefortsetzung. Das Integralverfahren beinhaltet die Fortsetzung des Schwerefeldes. Strenggenommen können Geoidundulationen nur mit diesem Verfahren berechnet werden. Die Fortsetzung einer Funktion nach außen wird auch als erstes Randwertproblem oder Dirichlet-Problem bezeichnet. Betrachtet man die Potentialfunktion 3.5, kann  $Y_n$  über die Beziehung 3.9 ausgedrückt werden. Nach einem Integralansatz lässt sich die Feldfortsetzung dann durch

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} V(R, \theta', \lambda') \mathcal{P}(\psi) d\sigma. \quad (3.14)$$

ausdrücken. Die Poissonsche Kernfunktion

$$\mathcal{P}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)) = \frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} \quad (3.15)$$

---

<sup>1</sup>(engl. upward continuation)

<sup>2</sup>(engl. downward continuation)

kann in geschlossener Form ausgedrückt werden. Gl. 3.14 beschreibt eine Fortsetzung der Potentialfunktion  $V(R, \theta', \lambda')$ , die am Rand mit dem Radius  $R$  gegeben ist, nach oben. Auf der Kugelfläche mit dem Radius  $r$  ergeben sich dann die fortgesetzten Potentialwerte  $V(r, \theta, \lambda)$ . Die Gestalt der Kernfunktion ist zum einen von der Richtung der Feldfortsetzung abhängig, und zum anderen davon, welche Schwerefeldgrößen genutzt werden (Abschnitt 3.2). Die Fortsetzung

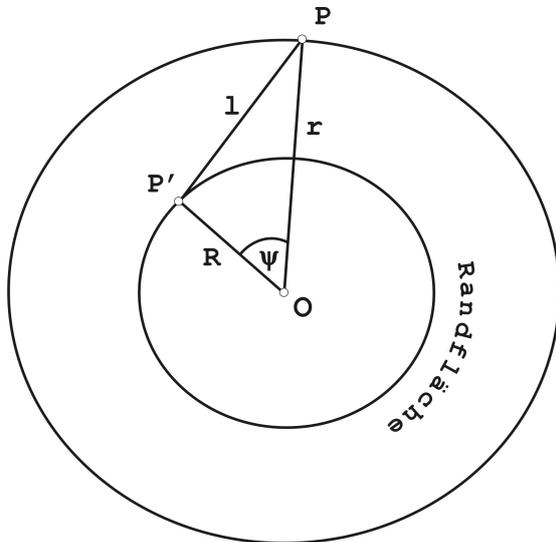


Abb. 3.2: Schwerefortsetzung

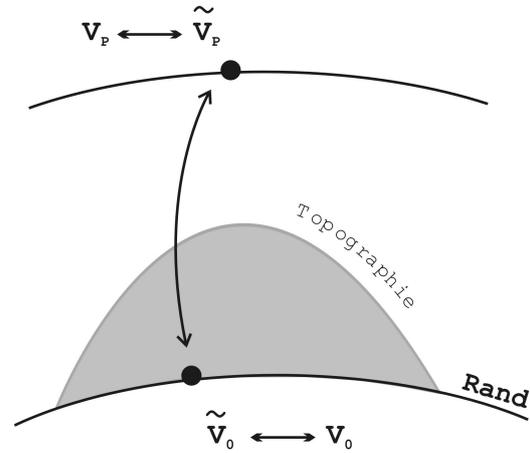


Abb. 3.3: Einfluss der Topographie

ist entsprechend der Potentialtheorie nur dann möglich, wenn sich außerhalb des Randes keine Massen befinden. Aus diesem Grund muss der Einfluss der Topographie vorher beseitigt werden. Der kurzwellige Anteil des Schwerefeldes wird von der Gravitation der topographischen Massen beeinflusst. Eine Reduktion der Messwerte um den Anteil der Topographie führt zu einer Glättung des Signals, wodurch die Schwerefeldberechnung erleichtert wird (Torge, 2003). Die Korrektur aufgrund der topographischen Massen ist am Beispiel des Potentials  $V$  in Abb. 3.3 veranschaulicht. Aus der Ausgangsgröße  $V_P$  muss zunächst der Einfluss der Topographie beseitigt werden. Die Gravitation der Topographie kann man beispielsweise über eine Zerlegung derselben in Quader berechnen (Heiskanen und Moritz, 1967). Die reduzierte Größe  $\tilde{V}_P$  kann anschließend fortgesetzt werden. Am Rand ist der Einfluss der Topographie wieder zu berücksichtigen, indem der Einfluss der Massen wieder hinzugefügt wird. Erst dann erhält man den exakten Wert für das Potential  $V_0$ , aus dem beispielsweise das Störpotential  $T$  und die Geoidundulation  $N$  berechnet werden können. Diese Vorgehensweise ist allgemeingültig. In der Praxis werden jedoch unterschiedliche Methoden zur Berücksichtigung der Topographie angewendet.

### 3.1.4 Remove-Restore-Technik

Alle in dieser Arbeit getesteten Verfahren zur Geoidbestimmung nutzen die sog. Remove-Restore-Technik zur Geoidberechnung. Darunter versteht man die Entfernung (Remove) des globalen Anteils des Erdschwerefeldes aus den Messdaten. Die Geoidberechnung erfolgt dann mit den residualen Schwerefeldgrößen. Am Ende der Berechnungen muss der globale Anteil wieder zu den Ergebnissen hinzugefügt werden (Restore). Aufgrund der spektralen Beschaffenheit der Kugelfunktionsentwicklung ist es möglich, einen bestimmten Bereich zu subtrahieren. Davon wird in der modernen Aerogravimetrie Gebrauch gemacht. In Tab. 3.1 sind die Beziehungen zwischen dem Grad der Kugelfunktionsentwicklung und der entsprechenden Wellenlänge angegeben (Schwarz und Li, 1996). Als Referenzmodell, welches von den Messungen subtrahiert werden kann, eignet

Frequenzbereich	Grad $n$	Wellenlänge [km]
niedrig	$2 \sim 36$	$20000 \sim 1100$
niedrig-mittel	$37 \sim 180$	$1100 \sim 220$
mittel-hoch	$181 \sim 360$	$220 \sim 110$
hoch	$361 \sim 1800$	$110 \sim 22$

Tab. 3.1: Spektrale Beziehungen

sich z. B. das globale Modell EGM96<sup>3</sup> (Lemoine u. a., 1998). Dieses beruht auf sehr umfangreichen Datensätzen. Satellitentracking-Daten, Schwereanomalien und Satellitenaltimetrie-Daten wurden benutzt, um dieses Modell bis zum Grad  $n = 360$  zu determinieren. Es liegt als Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials  $V$  in Form der Koeffizienten vor. Wie der Tab. 3.1 zu entnehmen ist, entspricht die maximale Auflösung des globalen Modells  $x = 55$  km Halbwellenlänge. Da dieser Anteil des Erdschwerefeldes ausreichend bekannt ist, sollten die Messungen ausschließlich zur Determinierung höherer Spektralbereiche genutzt werden. Die Praxis der Remove-Restore-Technik besteht zunächst aus einer Entfernung des globalen Einflusses auf die Schwerefeldgrößen. Das ist symbolisch für die Schwerstörungen über die Differenzbildung

$$\delta g^b = \delta g - \sum_{n=0}^{n=k} \delta g_n \quad (3.16)$$

möglich. Wird das gesamte Modell EGM96 von den Messdaten subtrahiert, liegt die obere Summationsgrenze bei  $k = 360$ . Die bandbegrenzten Schwerstörungen  $\delta g^b$  werden im Anschluss daran für weitere Berechnungen verwendet. Je nach spektralem Gehalt oder räumlicher Auflösung der Messdaten liegen die isolierten mittel- bis hochfrequenten Schwerstörungen im Bereich  $k < n \leq l$ . Für eine angenommene minimale Halbwellenlänge von  $x = 11$  km liegt die obere Grenze bei  $l = 1800$ . Nach der Berechnung des residualen Geoids muss das Referenzfeld wieder addiert werden. Die Gesamtundulation des Geoids  $N_0^l$  setzt sich aus der Summe des globalen Anteils  $N_0^k$  und des berechneten mittel- bis hochfrequenten Anteils  $N_k^l$  zusammen:

$$N_0^l = N_0^k + N_k^l \quad (3.17)$$

Ein Vorteil der Remove-Restore-Technik besteht in der Verringerung des Rechenaufwandes und somit auch der Rechenzeit. Außerdem sind regionale und lokale Messungen nicht zur Bestimmung des globalen Anteils des Erdschwerefeldes geeignet.

### 3.1.5 Kernfunktionen

Die Kernfunktionen stellen eine Gruppe von Funktionen dar, welche in verschiedenen Bereichen der Geodäsie zum Einsatz kommen. So auch in allen drei Verfahren, die innerhalb dieser Arbeit erläutert werden. In Verbindung mit dem Verfahren der Kollokation werden die Kernfunktionen zur Beschreibung der Kovarianzfunktionen genutzt. Es ist ebenso möglich, die Potentiale der Multipole durch Kernfunktionen auszudrücken. Bei der Berechnung von Geoidgrößen durch Integration spielen die Kernfunktionen auch eine wichtige Rolle. Um die Herkunft dieser Funktionen zu verstehen, sind im Folgenden die wichtigsten Schritte aufgeführt.

Zunächst wird ein System von Funktionen festgelegt, das als Basis bei der Approximation dienen soll. Eine orthonormale Basis bilden die normalisierten räumlichen Kugelfunktionen (Tscherning,

<sup>3</sup>Earth Geoid Model 1996, joint geopotential model

1972):

$$v_{ij}(P) = \sigma_{ij} \left( \frac{R}{r} \right)^{i+1} \begin{cases} \bar{R}_{ij}(\theta, \lambda) & 0 \leq j \leq i \\ \bar{S}_{ij}(\theta, \lambda) & -i \leq j < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Der Grad der Kugelfunktion ist mit dem Index  $i$  gekennzeichnet und bewegt sich zwischen  $0 \leq i < \infty$ . Die zu bildende Ordnung  $j$  der Kugelflächenfunktion richtet sich nach dem Index  $i$ . Unter bestimmten Umständen kann man zu einem Basissystem eine Kernfunktion finden. Theoretisch entsteht sie nur bei Konvergenz der Aufsummierung des Produktes der Basisfunktionen an den Stellen  $P$  und  $Q$  (Tscherning, 1972):

$$K(P, Q) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(P)v_k(Q) \quad (3.19)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Kernfunktionen ist ihre Reproduzierbarkeit. Das bedeutet, dass sie durch das innere Produkt

$$T(P) = \langle T(Q), K(P, Q) \rangle \quad (3.20)$$

mit der Funktion  $T(Q)$  an der Stelle  $Q$  eine neue Funktion  $T(P)$  an der Stelle  $P$  bilden. Man vergleiche hierzu die Lösung der Integralmethode in Abschnitt 3.2. Wird das Basissystem 3.18 in Gl. 3.19 eingesetzt und die Substitution  $k_i = (2i + 1)\sigma_{ij}$  angewendet, lässt sich die Kernfunktion in die allgemeine Form

$$K(P, Q) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \sigma^{i+1} P_i(\cos(\psi_{PQ})) \quad (3.21)$$

bringen (Tscherning, 1972). Darin bezeichnen  $P_i(\cos(\psi_{PQ}))$  die Legendreschen Polynome vom Grad  $i$ . Der Abstand zum Punkt  $P$  wird mit  $r_P$ , der zum Punkt  $Q$  mit  $r_Q$  und der Radius der sog. Regularisierungskugel mit  $R$  bezeichnet. Die Größe  $\sigma$  steht folglich für den Quotienten:

$$\sigma = \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right) \quad (3.22)$$

Mit der Verfügung über den Koeffizienten  $k_i$  legt man die Kernfunktion fest. An dieser Stelle kann die Verbindung zu den Kovarianzfunktionen hergestellt werden (Abschnitt 3.4). Über die Koeffizienten kann man jedoch auch so verfügen, dass die Verbindung zu den Potentialen von Multipolen hergestellt werden kann (Abschnitt 3.3.4) (Lelgemann und Marchenko, 2001):

$$\tilde{v}_n(P, Q) = \sum_{m=i}^{\infty} \binom{m}{i} \sigma^{m+1} P_m(\cos(\psi_{PQ})) \quad (3.23)$$

Für  $i = 0$  entsteht nach Aufsummierung der Kern für das Potential einer Punktmasse, für  $i = 1$  der Kern eines Dipols und für  $i = n$  der eines Multipols  $n$ -ten Grades. Die Kerne für das Punktmasspotential und das Dipolpotential haben nach Aufsummierung die Form:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0(P, Q) &= \frac{\sigma}{L} \\ \tilde{v}_1(P, Q) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma(1 - \sigma^2)}{L^3} - \frac{\sigma}{L} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die dimensionslose Größe  $L^2 = 1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos(\psi_{PQ})$  entsteht durch Anwendung des Kosinussatzes auf die Seite  $r_i$  des Dreiecks  $\tilde{Q}OP$  (Abb. 3.4) und entspricht folglich dem Quotienten der beiden Abstände  $L = r_i/r$ . Wählt man den Radius der Bezugskugel  $R^2 = l_{\tilde{Q}} r_Q$ , vereinfacht sich die Darstellung der Kernfunktion in Gl. 3.21 und Gl. 3.23, weil  $\sigma = l_{\tilde{Q}}/r_P$  ist. Auf die Verbindung zu den Potentialen der Multipole wird an entsprechender Stelle in Abschnitt 3.3 hingewiesen.

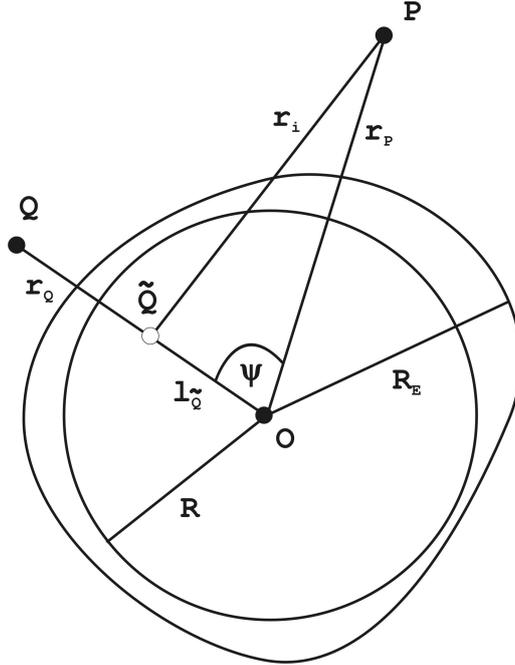


Abb. 3.4: Erläuterung der Kernfunktion

### 3.2 Randwertproblem und Integrallösung

Die Lösung einer geodätischen Randwertaufgabe beinhaltet die Bestimmung des äußeren Schwerfeldes auf oder in der Nähe der Erdoberfläche. Das Stokes-Problem ist jenes, welches sich mit dem Geoid als unbekannte Randfläche beschäftigt (Torge, 2003). Die Beobachtungen seien in Form von Schwerstörungen längs der Flugbahn gegeben. Da das Störpotential am Rand gesucht ist, muss die Rechnung eine Fortsetzung des Feldes nach unten beinhalten. Im Gegensatz zu den im Abschnitt 3.1.3 geschilderten Verfahren, findet hier zusätzlich zur Schwerefortsetzung ein Übergang zwischen Schwerstörungen und Störpotential statt. Dieses wird als Lösung der inversen zweiten Randwertaufgabe oder des inversen Neumannschen Problems bezeichnet. In diesem Abschnitt wird die Integralformel zur Lösung des Problems hergeleitet. Als Ausgangspunkt dient die Reihenentwicklung des Störpotentials:

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda) \quad (3.25)$$

Bildet man von dem Ausdruck 3.25 die Ableitung nach  $r$ , erhält man die Schwerstörung als Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen:

$$\delta g(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \delta g_n(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{n+1}{r} T_n(\theta, \lambda) \quad (3.26)$$

Durch einen Vergleich beider Seiten der Gl. 3.26 lässt sich diese nach  $T_n$  umstellen. Nach der Aufsummierung über alle  $n$  folgt die Gleichung für das Störpotential  $T$  am Rand:

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{r}{n+1} \delta g_n(r, \theta, \lambda) \quad (3.27)$$

Die Größe  $\delta g_n$  kann mit Hilfe der Transformationsformel 3.9 in den Integralausdruck

$$\delta g_n(r, \theta_P, \lambda_P) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g(r, \theta_Q, \lambda_Q) P_n(\cos(\psi_{PQ})) d\sigma. \quad (3.28)$$

umgewandelt werden. Schließlich wird Gl. 3.28 in Gl. 3.27 eingesetzt und nach Vertauschen von Summation und Integration entsteht die gesuchte Integralformel zur Lösung dieses Problems (Novak u. a., 2002b):

$$\begin{aligned} T(\theta, \lambda) &= \frac{r}{4\pi} \iint_{\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} P_n(\cos(\psi_{PQ})) \delta g(r, \theta_Q, \lambda_Q) d\sigma \\ &= \frac{r}{4\pi} \iint_{\sigma} \mathcal{K}(\psi) \delta g(r, \theta_Q, \lambda_Q) d\sigma \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Funktion  $\mathcal{K}(\psi)$  wird als Kernfunktion oder Kern des Integrals bezeichnet. Er ist dimensionslos und wirkt wie eine Gewichtsfunktion auf die Schwerestörungen. Der Kern hängt vom sphärischen Abstand  $\psi_{PQ}$  zwischen den beiden Punkten ab. Dieses Integral ist geeignet, aus

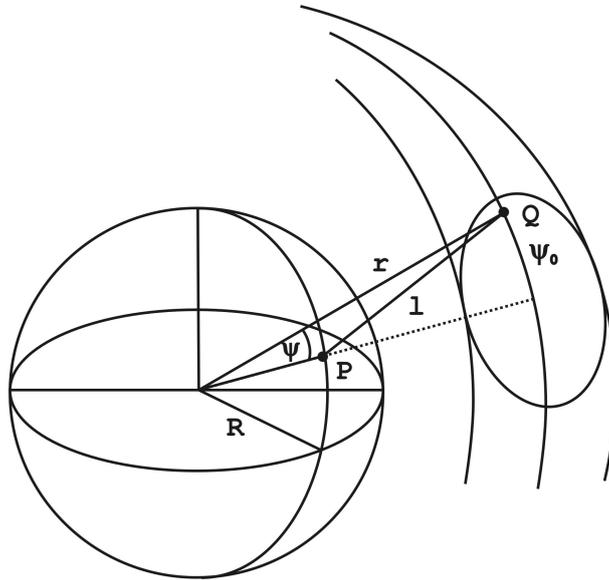


Abb. 3.5: Randwertaufgabe auf der Kugel

Schwerestörungen auf dem Radius  $r = R + D$  das Störpotential auf der Referenzkugel mit dem Radius  $R$  zu berechnen. Die Berechnung des Störpotentials und die Schwerefortsetzung nach unten erfolgen in einem Schritt. Aus Gl. 3.29 ist ersichtlich, dass für die Berechnung des Potentials  $T(\theta, \lambda)$  auf dem Rand  $r = R$  sämtliche Werte  $\delta g$  auf der Kugeloberfläche  $r = R + D$  benutzt werden. Aufgrund der Rechengenauigkeit wird die Integration in der Berechnungspraxis bei einem bestimmten  $\psi = \psi_0$  abgebrochen (Abb. 3.5). Ist das Störpotential am Rand bekannt, kann mittels Bruns' Theorem 3.12 die Geoidundulation berechnet werden. Damit ist die Geoidberechnung abgeschlossen.

### 3.2.1 Ablauf des Integrationsverfahrens

Der Kern dieses Verfahrens entspricht der im Abschnitt 3.2 hergeleiteten Integralformel 3.29. Diese Methode wird als One-Step-Verfahren (Novak u. a., 2002b) bezeichnet, weil die Schwe-

refortsetzung und die Berechnung des Störpotentials innerhalb einer Integration ablaufen. Im Folgenden werden die wesentlichen Punkte des Verfahrens kommentiert. Zunächst sind die wichtigsten Bezugsflächen in Abb. 3.6 schematisch dargestellt. Die Topographie wird durch eine zwei-

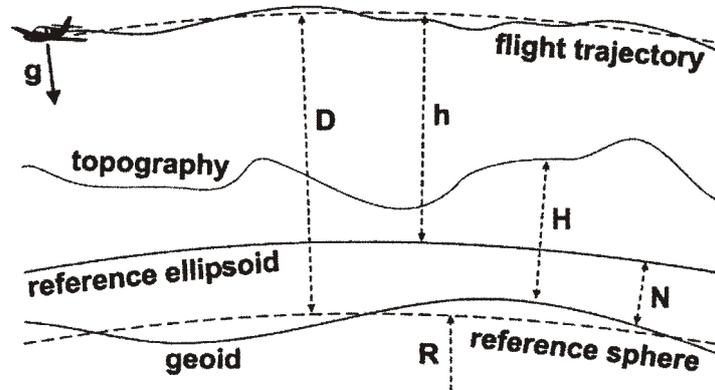


Abb. 3.6: Lage der Bezugsflächen aus (Novak u. a., 2002b)

dimensionale Funktion  $H(\lambda, \phi)$ , der orthometrischen Höhe, ausreichend beschrieben. Die Größe  $D$  steht für den Abstand zwischen der Referenzkugel und der Flugbahn. Die ellipsoidische Höhe  $h$  beschreibt die Flugbahn bezüglich des Ellipsoids. Der Radius der Referenzkugel ist mit  $R$  und die Geoidundulation mit  $N$  gekennzeichnet. Das gesamte Schema zur lokalen Geoidberechnung ist in Abb. 3.7 aufgeführt. Diese Übersicht stellt in Kurzform alle wesentlichen Punkte des One-Step-Verfahrens heraus.

Zu Beginn wird mit der Remove-Restore-Technik der globale Einfluss auf die Messungen beseitigt. Innerhalb dieses Verfahrens beträgt der Grad der Kugelfunktionsentwicklung des EGM96, welcher zur Reduktion benutzt wird,  $k - 1 = 120$ . Somit wird nicht das gesamte globale Modell von den Messungen subtrahiert. Die Schwerestörungen  $\delta g^b(R + D)$  liegen nun in bandbegrenzter Form vor. Es sind lediglich Wellenlängen im Bereich  $k$  bis  $l$  in den Messungen zurückgeblieben. Die obere Grenze entspricht der räumlichen Auflösung der Messdaten. In diesem Fall beträgt die Auflösung  $x = 11$  km Halbwellenlänge (Abschnitt 4.2.1) und demzufolge ist der Grad  $l = 1800$  (Tab. 3.1). Eine Harmonisierung des Schwerfeldes durch eine topographische Reduktion wird bei diesem Verfahren durch die Helmertsche Kondensationsmethode erreicht. Die Schwerestörungen  $\delta g^{h,b}$  im Helmert-Modell berechnet man mit der gleichnamigen Kondensationsmethode durch Anbringen des Direkten Topographischen Effekts (DTE) (Novak u. a., 2002a). Anschließend werden die Schwerestörungen  $\delta g^{h,b}(R + D)$  in das Störpotential  $T^{h,b}(R)$  integriert. Der gesamte Integrationsbereich  $\sigma$  der Kugel in Gl. 3.29 wird durch eine Kugelkappe mit dem Radius  $\psi_0$  ersetzt. Für diese Geoidberechnung wurde eine Kugelkappe  $\psi_0 = 1^\circ$  verwendet. Der Radius der Kugelkappe, der bei der Berechnung berücksichtigt wird, sollte der zu erwartenden Bandbreite der berechneten Geoidgrößen entsprechen. Je größer der Radius, desto länger die Wellenlängen, die mit dem Restgeoid bestimmt werden können. Schließlich können die bandbegrenzten Geoidundulationen über Bruns' Theorem 3.12 berechnet werden. Hier wird auch vom zweiten Term dieser Formel Gebrauch gemacht. Damit wird der indirekte topographische Effekt (ITE) der Helmertschen Kondensationsmethode berücksichtigt. Er beschreibt den Abstand zwischen Cogeoid und Geoid und ist somit nötig, um die residualen Geoidundulationen zu ermitteln. Um von den bandbegrenzten Geoidundulationen  $N^b$  auf die Gesamtundulation des Geoids  $N^l$  zu schließen, muss der globale Anteil wieder zu den residualen Geoidundulationen hinzugefügt werden.

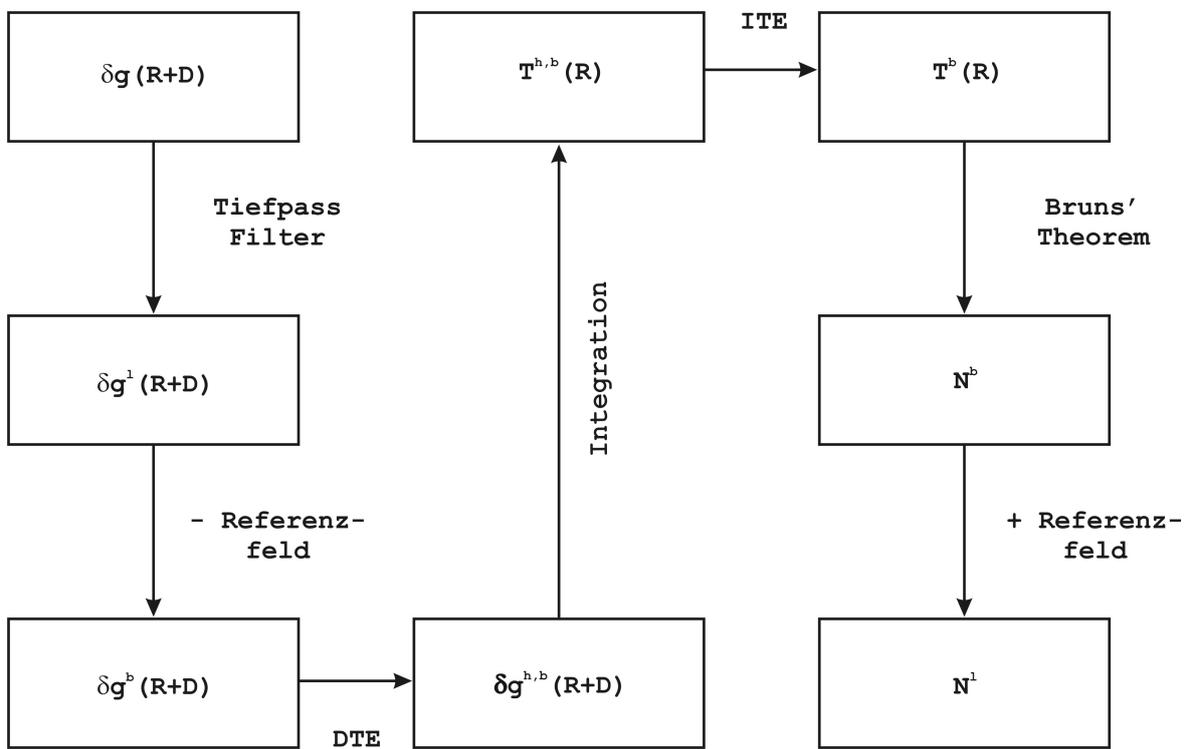


Abb. 3.7: Schema des One-Step-Verfahrens

### 3.3 Approximation durch Multipole

Die Darstellung der Theorie der Multipole bildet einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. Das Gravitationsfeld wird dabei durch Massensingularitäten beschrieben. Dazu zählen i. Allg. Punkt- und Liniensingularitäten. Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch lediglich die Punktsingularitäten, also Potentiale von Multipolen betrachtet. Wesentliche Unterschiede zu der in Abschnitt 3.2 erläuterten klassischen Herangehensweise und dem in Abschnitt 3.4 gegenübergestellten Kollokationsverfahren sollen dadurch ersichtlich werden. Ziel dieses Abschnittes ist eine allgemeine Einführung in die Theorie der Multipole sowie deren praktische Anwendung in der Geoidberechnung.

Die Nutzung der Multipoltheorie zur Geoidverbesserung und Geoidmodellierung ist relativ jung im Vergleich zu den anderen beiden Methoden. Der Grundstein wurde jedoch schon 1881 durch James Clarke Maxwell gelegt. Die meisten Arbeiten auf diesem Gebiet sind dennoch in der jüngeren Zeit verfasst worden. Am damaligen Zentralinstitut für Physik der Erde sind einige Veröffentlichungen z. B. von Franz Barthelmes zu dem Thema der Gravitationsfeldapproximation durch Punktmassen entstanden (Barthelmes, 1986). Diese dienten als Grundlage für neuere Schwerefeldberechnungen in der Region um Perth in West-Australien (Claessens u. a., 2001). Nach der Theorie der Multipole stellen Punktmassen einen Multipol nullten Grades dar. Die höheren Grade  $n = 1, 2, 3$  bezeichnen Dipole, Quadrupole und Oktupole. Diese Einteilung richtet sich nach dem von Alexander N. Marchenko verwendeten Bezeichnungen. In (Hofmann-Wellendorf, 1983) werden die Potentiale der Multipole  $N = 2, 3$  als Potentiale von Tripolen und Quadrupolen bezeichnet. Dieser Arbeit wird die erstgenannte Einteilung zugrunde gelegt.

Die im Abschnitt 3.3.4 erläuterten praktischen Verfahren basieren auf den von Alexander N. Marchenko entstandenen Forschungsarbeiten zu diesem Thema. Das Programmsystem AGF<sup>4</sup>, in welchem die Routinen zur SMA<sup>5</sup> verwirklicht sind, wurde am Laboratorium für theoretische Geodäsie an der Universität 'Lviv Polytechnic' in der Ukraine entwickelt. Der Algorithmus der SMA wird in Abschnitt 3.3.4.4 schematisch zusammengestellt. Die sequentielle Multipol-Analyse ist ein Verfahren, welches das Gravitationsfeld durch Platzieren von Multipolen mit bestimmten Eigenschaften approximiert. Dieses Verfahren wurde erfolgreich mit Aerogravimetrie-Datensätzen aus der Gegend um Skagerrak, zwischen Dänemark und Norwegen getestet (Marchenko u. a., 2001).

#### 3.3.1 Punktmassen, Dipole und Multipole $n$ -ten Grades

Für die Beschreibung des Gravitationspotentials der Erde stellen die Multipole genau wie die Kugelfunktionen lediglich ein mathematisches Hilfsmittel dar. Um den Begriff des Multipolpotentials verständlicher zu machen, können zunächst folgende Schritte zur Herleitung des Dipolpotentials unterschieden werden. Im Versuchsaufbau (Abb. 3.8) wurden zwei Punktmassen gleicher Masse und unterschiedlichen Vorzeichens im Abstand  $s$  voneinander positioniert. Das Potential einer Punktmasse wird als bekannt vorausgesetzt und kann mit

$$v_0 = \frac{M_0}{r} \tag{3.30}$$

berechnet werden. Die Größe  $M_0$  setzt sich aus dem Produkt der Gravitationskonstante  $k$  und der Masse  $m$  zusammen. Die Einheit folgt entsprechend zu  $[M_0] = m^3/s^2$ , so dass sich für

---

<sup>4</sup>AGF, Analysis of the Gravity Field

<sup>5</sup>SMA, Sequential Multipole Analysis

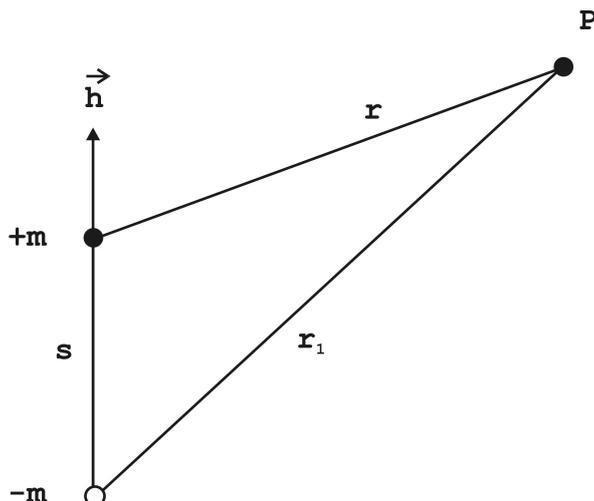


Abb. 3.8: Herleitung des Dipolpotentials

das Potential die korrekte Einheit  $[v_0] = m^2/s^2$  ergibt. Das Gesamtpotential  $V_D$  der beiden Punktmassen im Punkt  $P$  berechnet sich durch Addition:

$$V_D = v_{0+} + v_{0-} = M_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (3.31)$$

Der reziproke Abstand  $1/r_1$  in Gl. 3.31 muss im Zuge der Herleitung ersetzt werden. Dazu wird die folgende Reihenentwicklung angegeben (Heiskanen und Moritz, 1967):

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \vec{h}} \left( \frac{1}{r} \right) s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{h}^2} \left( \frac{1}{r} \right) s^2 + \dots + \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \vec{h}^N} \left( \frac{1}{r} \right) s^N \quad (3.32)$$

Zur Herleitung des Dipolpotentials wird folgender Grenzübergang notwendig: Lässt man den Abstand  $s$  unendlich klein werden, indem die beiden Punktmassen in Richtung  $\vec{h}$  unendlich dicht aufeinander zugeführt werden, und die Masse  $m$  gleichzeitig so ansteigen, dass das Produkt  $M_1 = kms$  einen endlichen Wert annimmt, ist der Grenzübergang vollzogen. Nun können höhere Terme ( $N > 1$ ) in Gl. 3.32 vernachlässigt werden. Einsetzen der ersten beiden Terme in Gl. 3.31 liefert die Formel

$$v_1 = -M_1 \frac{\partial}{\partial \vec{h}} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (3.33)$$

zur Berechnung des Dipolpotentials  $v_1$ . Die Größe  $M_1$  wird als Dipolmoment bezeichnet. Nach diesem Schema lassen sich Multipole höheren Grades ableiten. Dadurch entstehen Multipole des Grades  $n$  durch eine Annäherung von zwei Multipolen  $(n-1)$ -ten Grades aus der Hauptrichtung  $\vec{h}_n$ . Der sich daran anschließende Grenzübergang mündet in einer erneuten Richtungsdifferentiation bezüglich der Hauptrichtung  $\vec{h}_n$ . Demnach entspricht die Anzahl der Hauptachsen eines Multipols seinem Grad. So entsteht das Potential eines Quadrupols durch Differentiation, indem sich zwei Dipole unendlich dicht annähern und das eines Oktupols durch Verschmelzung zweier Quadrupole. Daher gibt es nach dieser Theorie und entsprechend der Namensgebung lediglich  $2^n$  Pole in den Gebilden der Multipole. So bestehen Dipole aus zwei, Quadrupole aus vier und Oktupole aus acht Polen. In diesem Zusammenhang kann die Dimension des Multipolmoments abgeleitet werden. Bei jedem Grenzübergang nähern sich zwei Multipole  $(n-1)$ -ten Grades an, indem der Abstand  $s \rightarrow 0$  so klein und das Moment  $M_{n-1} \rightarrow \infty$  so groß wird, dass das Produkt aus beiden einen endlichen Wert annimmt. Daher kann die Formel

$$M_n = M_{n-1} s = kms^n \quad (3.34)$$

zur Betrachtung der Dimension abgeleitet werden (Hobson, 1931). Die Einheit folgt durch Einsetzen der entsprechenden Größen zu  $[M_n] = m^{n+3}/s^2$  und damit die Einheit für das Potential  $[v_n] = m^2/s^2$ . Die Vorschrift zur Herleitung des Multipolpotentials durch  $n$ -fache Richtungsdifferentiation kann mathematisch folgendermaßen verallgemeinert werden (Hobson, 1931):

$$v_n = (-1)^n M_n \frac{\partial^n}{\partial \vec{h}_1 \partial \vec{h}_2 \dots \partial \vec{h}_n} \frac{1}{r} \quad (3.35)$$

Die Funktion in Gl. 3.35 kann als Potential eines Multipols gedeutet werden. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um Funktionen, welche durch Richtungsdifferentiation entstehen. Zu deren Bildung benötigt man den Nabla-Operator ( $\nabla$ ). Die Richtungsableitung führt im Fall  $n = 1$  auf das Skalarprodukt

$$\frac{\partial}{\partial \vec{h}_1} \frac{1}{r} = \left\langle \vec{h}_1^0, \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right\rangle = h_{11}^0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + h_{12}^0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + h_{13}^0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \quad (3.36)$$

zwischen dem normierten Richtungsvektor  $\vec{h}_1^0$  und dem Gradienten der skalaren Funktion. Beinhaltet die Gl. 3.35 zwei Differentiationsrichtungen, bildet die rechte Seite von Gl. 3.36 den Ausgangspunkt für die erneute Gradientenbildung. Diese Vorschrift kann für den Fall der  $n$ -fachen Richtungsdifferentiation durch den Tensorkalkül verallgemeinert werden. Der Operator der Richtungsdifferentiation ist ein  $n$ -fach skalares Produkt zweier Tensoren  $n$ -ter Stufe. Der erste Tensor ist das unbestimmte Produkt der Einheitsvektoren der  $n$  Differentiationsrichtungen und der zweite die  $n$ -te Potenz des vektoriiellen Nabla-Operators (Kautzleben, 1965).

### 3.3.2 Multipotentiale niederen Grades

Die Potentiale der verschiedenen Multipole können für kleine Grade veranschaulicht werden. Am besten gelingt das über die Darstellung einiger Potentialflächen in dem entsprechenden Feld.

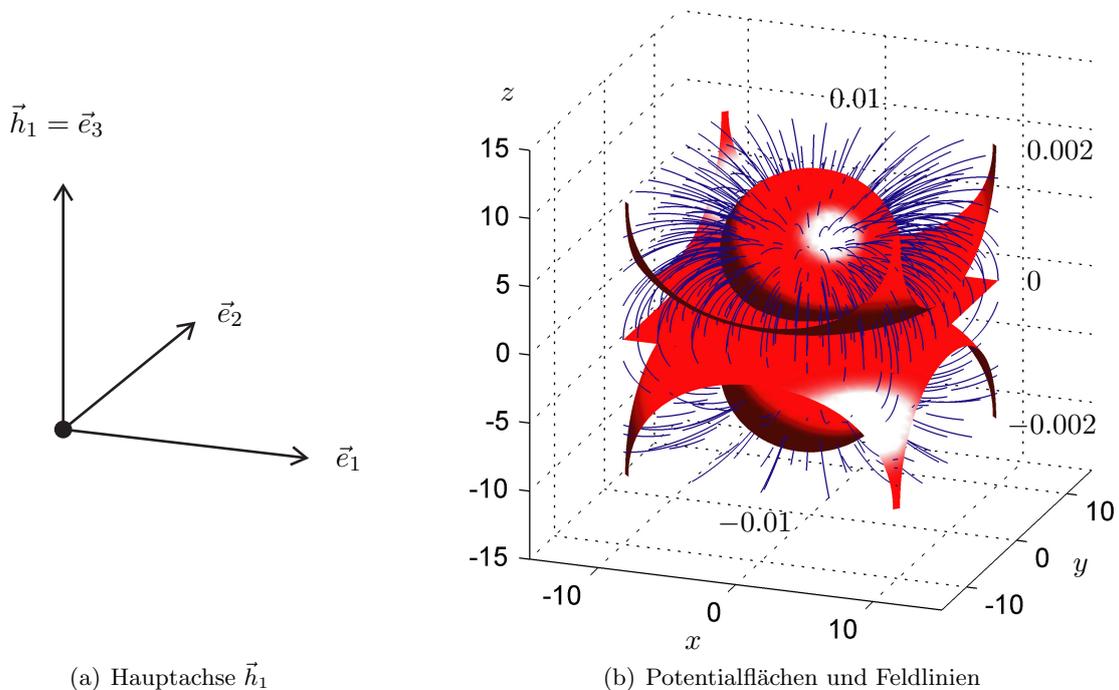


Abb. 3.9: Dipol  $v_1 = c_i = [-0.01, -0.002, 0, 0.002, 0.01]$  mit  $M_1 = 1 \text{ m}^4/s^2$

Die Potentialflächen einer Punktmasse werden durch konzentrische Kugelschalen um den Pol gebildet. Die entsprechenden Feldlinien stehen senkrecht auf den Flächen in radialer Richtung. In Abb. 3.9(b) und 3.10(b) sind die Potentiale eines Dipols  $v_1$  und eines Quadrupols  $v_2$  durch ihre Äquipotentialflächen (rot) und Feldlinien (blau) dargestellt. Im Fall des Dipols liegt die Hauptachse in  $\vec{h}_1 = \vec{e}_3$ -Richtung. Für den Quadrupol befinden sich beide Hauptachsen in Richtung der dritten Koordinatenachse  $\vec{h}_1 = \vec{h}_2 = \vec{e}_3$ . Liegen sämtliche Hauptachsen eines Multipols  $n$ -ten Grades in radialer Richtung, bezeichnet man diese als radiale Pole. Der Dipol ist durch einmalige und der Quadrupol durch zweimalige Differentiation des Punktmassenspotentials in  $\vec{e}_3$ -Richtung entstanden. Für die folgenden Grafiken wurde die Gl. 3.35 zur Berechnung des Potentials eines Multipols verwendet. Die räumliche Anordnung der Hauptachsen des Multi-

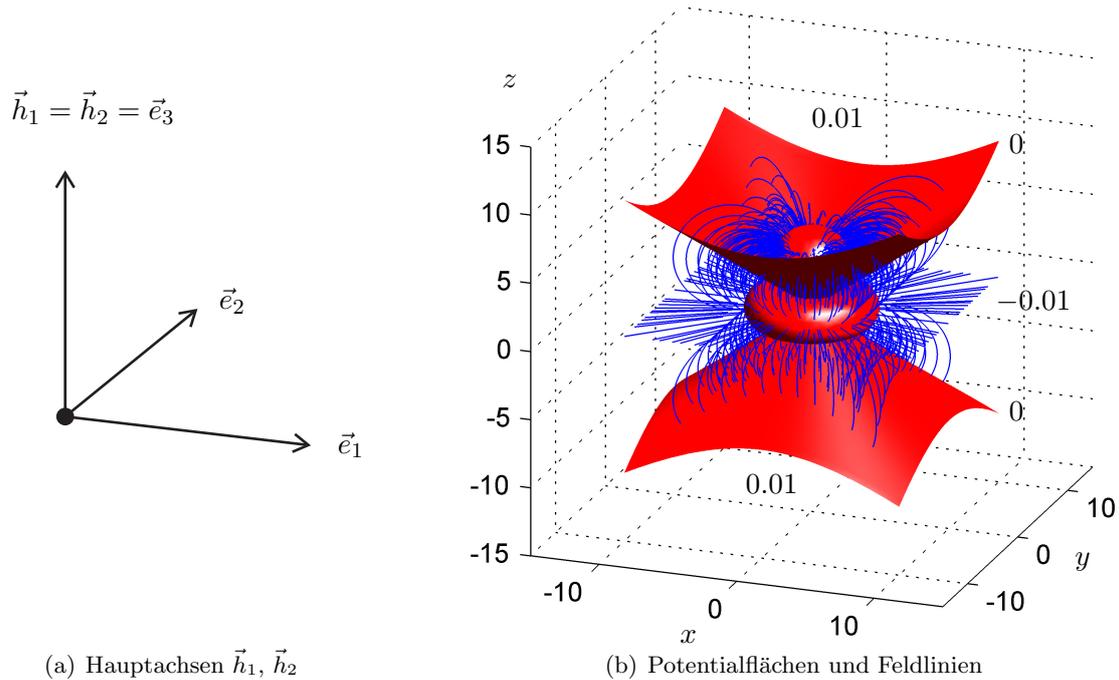


Abb. 3.10: radialer Quadrupol  $v_2 = c_i = [-0.01, 0, 0.01]$  mit  $M_2 = 1 \text{ m}^5/\text{s}^2$

pols ist charakteristisch für das hervorgerufene Feld. Eine Differentiation des Dipolpotentials in  $\vec{e}_2$ -Richtung ergibt das Potential eines orthogonalen Quadrupols (Abb. 3.11(b)). Die beiden Hauptachsen  $\vec{h}_1 = \vec{e}_3$  und  $\vec{h}_2 = \vec{e}_2$  stehen diesmal senkrecht aufeinander. Im Allgemeinen können die Hauptachsen in beliebigen Richtungen liegen. Um die Eigenschaften des radialen und des orthogonalen Quadrupols miteinander zu vergleichen, kann das Potential in einem bestimmten Abstand um einen zentrisch gelagerten Pol berechnet werden (Abb. 3.12). Das Potential einer Punktmasse ist längen- und breitenunabhängig und wird somit durch eine Ebene parallel zur  $(\lambda, \phi)$ -Ebene abgebildet. Ein Vergleich des orthogonalen und des radialen Quadrupols lässt erkennen, dass der radiale Pol ein breitenabhängiges aber längenunabhängiges Potential hervorruft, wohingegen das des orthogonalen Pols längenabhängig wird.

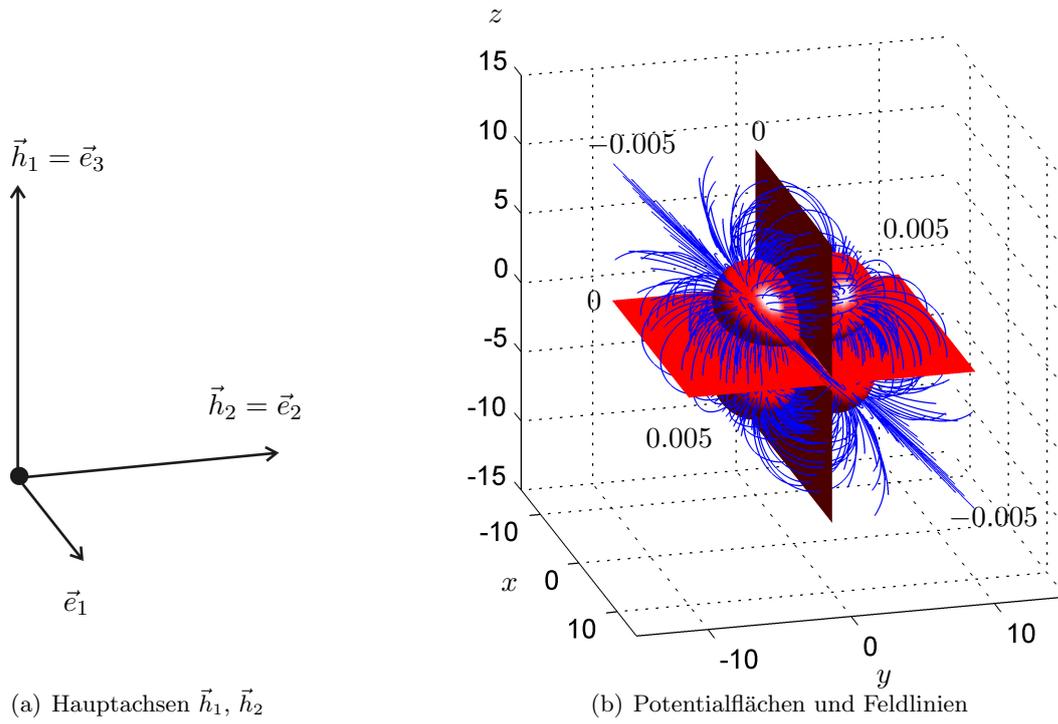


Abb. 3.11: orthogonaler Quadrupol  $v_2 = c_i = [-0.005, 0, 0.005]$  mit  $M_2 = 1 \text{ m}^5/\text{s}^2$

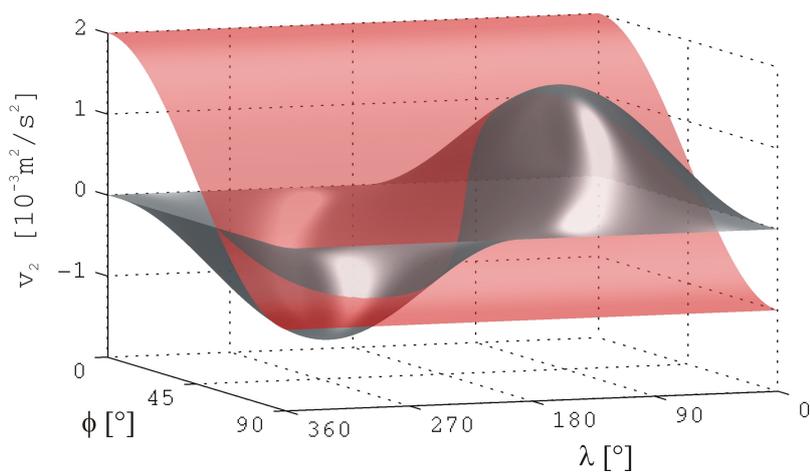


Abb. 3.12: Quadrupolpotentiale (rot=rad., grau=orth.),  $M_2 = 1 \text{ m}^5/\text{s}^2$ ,  $r=10 \text{ m}$

### 3.3.3 Maxwellsche Darstellung der Kugelfunktionen

Die Theorie der Multipole ist sehr eng mit der Theorie der Kugelfunktionen verknüpft. Ziel dieses Abschnittes ist es, die Verbindungen zwischen Kugelfunktionen und Potentialen von Multipolen anschaulich darzustellen. Die Kugelflächenfunktionen werden in (Hobson, 1931) in der folgenden Schreibweise angegeben:

$$Y_n = r^{n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \vec{h}_1 \partial \vec{h}_2 \dots \partial \vec{h}_n} \frac{1}{r} \quad (3.37)$$

Aus dem Abschnitt 3.1.1, in dem die Kugelfunktionen eingeführt wurden, ist bekannt, dass Kugel- und Kugelflächenfunktionen über die Beziehung 3.5 verknüpft sind. Es ist auffällig, dass die Kugelfunktion  $n$ -ten Grades aus Gl. 3.37 bis auf eine Konstante mit der Formel zur Berechnung des Potentials eines Multipols  $n$ -ten Grades in Gl. 3.35 übereinstimmt. Zur Festlegung des Multipolpotentials  $v_n$  muss über  $2n+1$  Konstanten verfügt werden. Diese setzen sich aus  $2n$  Winkeln zur Beschreibung der Einheitsvektoren der  $n$  Hauptachsen des Pols und der Konstante  $M_n$  zusammen. Im Vergleich dazu wird die Kugelflächenfunktion  $n$ -ten Grades  $Y_n$  in Gl. 3.6 ebenso aus  $2n+1$  unabhängigen Termen mit den Konstanten  $a_{nm}$  gebildet. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass es sich bei Gl. 3.35 um eine Kugelfunktion  $n$ -ten Grades handelt (Kautzleben, 1965). Multipolpotentiale ergeben sich folglich als Maxwellsche Darstellung der Kugelfunktionen.

In einer Reihe nach Kugelfunktionen unterscheidet man zonale, tesserale und sektorielle Terme. Zonale Terme entstehen in  $Y_n$ , wenn die Ordnung  $m = 0$  gesetzt wird. Tesserale Kugelflächenfunktionen werden solche genannt, die für  $m \neq n$  und  $m \neq 0$  aus der Summe  $Y_n$  hervorgehen. Schließlich entstehen die sektoriellen Terme, wenn die Ordnung dem Grad  $m = n$  entspricht. Für die anschließenden Betrachtungen befindet sich der Multipol im Ursprung des Koordinatensystems. Bei spezieller Lagerung der Achsen des Multipols, können Potentiale durch bestimmte Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden. Diese Zusammenhänge werden in den beiden folgenden Abschnitten angedeutet.

#### 3.3.3.1 Zonale Kugelflächenfunktionen

Radiale Multipole sind Pole, bei denen sämtliche Achsen in Richtung des Radiusvektors verlaufen. Hierfür vereinfacht sich die allgemeine Formel 3.35 zu

$$v_n = \frac{(-1)^n M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \vec{e}_3^n} \frac{1}{r}, \quad (3.38)$$

wenn sämtliche Hauptachsen in Richtung der  $\vec{e}_3$ -Achse liegen. Das Moment wurde in diesem Fall etwas abweichend von der Festlegung in Gl. 3.35 skaliert. In (Hobson, 1931) wird die Formel für die Legendre-Polynome in der Multipoldarstellung angegeben:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \vec{e}_3^n} \frac{1}{r} \quad (3.39)$$

Wird diese in Gl. 3.38 eingesetzt, folgt die Vorschrift zur Berechnung des Potentials eines radialen Multipols:

$$v_n = \frac{M_n P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \quad (3.40)$$

Beachtet man lediglich den  $n$ -ten zonalen Term einer Kugelfunktionsentwicklung 3.6, ergibt sich:

$$V_n = \frac{a_{n0} P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \quad (3.41)$$

Beim Vergleich von Gl. 3.40 und Gl. 3.41 wird deutlich, dass das Potential eines radialen Pols in  $\vec{e}_3$ -Richtung ausschließlich durch eine zonale Kugelflächenfunktion zu beschreiben ist. Es ist ersichtlich, dass sich beide Gleichungen für  $M_n = a_{n0}$  entsprechen. Die Information über die Lage der Hauptachsen ist durch die  $\vec{e}_3$ -Richtung vorgegeben, weshalb nur über eine Konstante, dem Multipolmoment  $M_n$ , verfügt werden muss. Analog muss in der Kugelflächenfunktion lediglich die Konstante  $a_{n0}$  festgelegt werden. Für radiale, in  $\vec{e}_3$ -Richtung ausgerichtete Multipole, welche im Ursprung konzentriert sind, genügen zonale Kugelflächenfunktionen zur Beschreibung des Potentials. In Abb. 3.13 ist dies am Beispiel eines Multipols 5-ten Grades veranschaulicht.

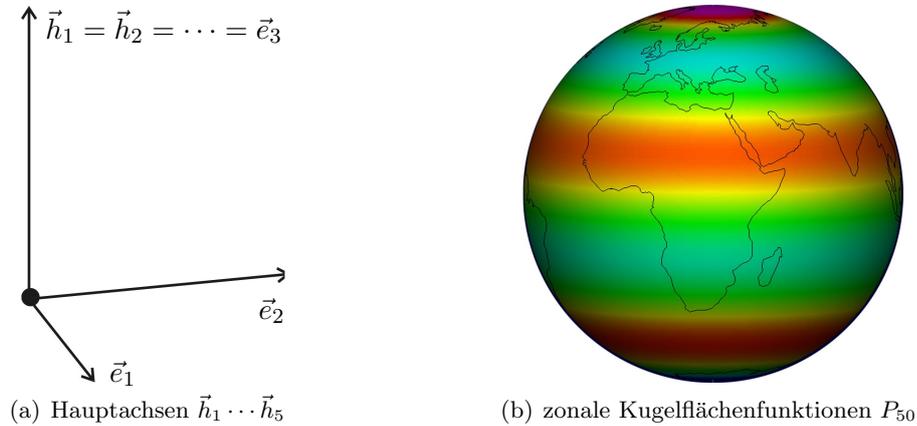


Abb. 3.13: Potential eines Multipols 5-ten Grades

### 3.3.3.2 Tesserale und sektorielle Kugelflächenfunktionen

Es besteht auch die Möglichkeit, die Achsen eines Multipols so zu legen, dass das Potential durch eine tesserale oder eine sektorielle Funktion zu beschreiben ist. Dieser Zusammenhang wird in diesem Abschnitt herausgestellt. Zunächst wird die Verbindung mit den tesselaren Kugelflächenfunktionen erläutert. Wenn  $n - m$  Achsen eines Multipols  $n$ -ten Grades mit der  $\vec{e}_3$ -Richtung koinzidieren und die restlichen  $m$  Hauptachsen symmetrisch in der Äquatorebene verteilt sind, lässt sich das entsprechende Potential durch einen tesselaren Term ausdrücken. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Hauptachsen in der Äquatorebene muss dabei  $\alpha = \pi/m$  betragen (Hobson, 1931). Für die Erzeugung einer reinen Sinus- oder Kosinusfunktion ist entscheidend, wo die erste äquatoriale Achse bezüglich der Koordinatenachse  $\vec{e}_1$  angeordnet wird. Die Funktion  $P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda)$  wird in diesem Zusammenhang als Kosinusfunktion und  $P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda)$  als Sinusfunktion bezeichnet. In Abb. 3.14 ist ein Multipol 6-ten Grades dargestellt, dessen Potential durch

$$v_6 = C \frac{P_{6,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)}{r^7} \quad (3.42)$$

mit Hilfe der tesselaren Kugelflächenfunktion  $P_{6,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$  und einer Konstanten  $C$  beschrieben werden kann. Drei Achsen sind in  $\vec{e}_3$ -Richtung und die verbleibenden drei symmetrisch in der Äquatorebene angeordnet.

Wenn sämtliche Hauptachsen eines Multipols  $n$ -ten Grades symmetrisch in der  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ -Ebene angeordnet werden, kann das Potential durch eine sektorielle Kugelflächenfunktion beschrieben werden. Angewendet auf den skizzierten Fall in Abb. 3.14, müssen die ersten drei Achsen entfernt werden, so dass ein Oktupol ( $n = 3$ ) entsteht, dessen Potential

$$v_3 = C \frac{P_{3,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)}{r^4} \quad (3.43)$$

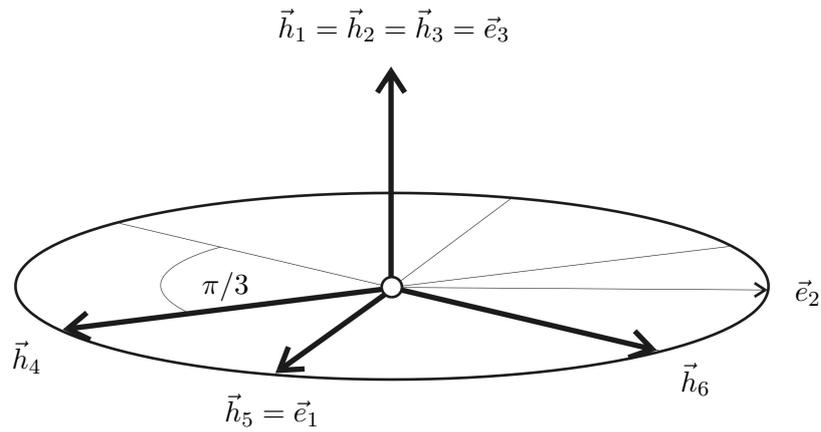


Abb. 3.14: Multipol 6-ten Grades mit Multipolachsen

durch die sektorielle Funktion  $P_{3,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$  und eine Konstante  $C$  beschrieben ist. In Abb. 3.15 und Abb. 3.16 sind die tesserale und die sektorielle Kugelflächenfunktion mit ihren Vorzeichen auf der Erdkugel dargestellt.

Die beschriebene Anordnung des Achsensystems in Abb. 3.14 ist nicht die einzige, die auf eine reine tesserale oder sektorielle Kugelflächenfunktion führt. Durch die Abhängigkeit dieser Kugelflächenfunktionen  $P_{63}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$  und  $P_{33}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$  vom Winkel  $\lambda$  existieren in Abhängigkeit der Ordnung ( $m = 3$ ) drei Maxima entlang eines Breitenkreises. Aus diesem Grund kann das Achsensystem auch so gedreht werden, dass die  $\vec{h}_5$ -Hauptachse bezüglich der  $\vec{e}_1$ -Koordinatenachse einen Winkel  $\lambda = 60^\circ$  oder  $\lambda = 120^\circ$  einschließt. Auch in diesen Fällen ergibt die Richtungsdifferentiation in Gl. 3.35 die entsprechende tesserale oder sektorielle Kugelflächenfunktion. Dabei darf die Lage der Achsen zueinander nicht verändert werden.

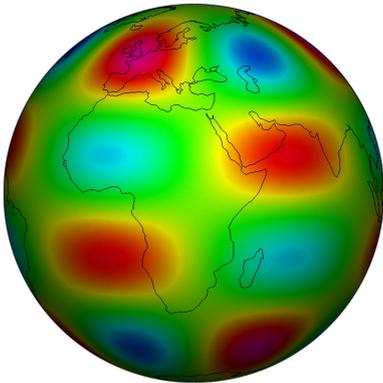


Abb. 3.15:  $P_{6,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$

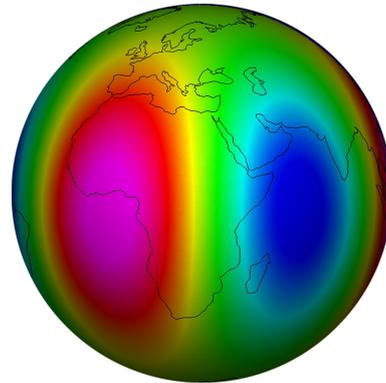


Abb. 3.16:  $P_{3,3}(\cos \theta) \cos(3\lambda)$

### 3.3.4 Radiale Multipole nach Alexander N. Marchenko

Dieser Abschnitt dient der Hinführung zu den praktischen Anwendungen der Approximation des Störpotentials. Dazu werden im Folgenden lediglich radiale Multipole betrachtet, die nun nicht mehr zentrisch, sondern exzentrisch angeordnet werden. Die globale Deutung von zentrischen

Multipolen als Kugelfunktionen tritt in diesem Zusammenhang etwas in den Hintergrund. Das Potential  $v_n^i$  eines radialen Multipols  $n$ -ten Grades an der Stelle  $i$  kann mit der Formel

$$v_n^i = M_n^i \tilde{v}_n^i = \frac{M_n^i}{n!} \frac{\partial^n}{\partial d_i^n} \frac{1}{r_i} \quad (3.44)$$

berechnet werden (Marchenko, 1998). Weiterhin bezeichnen die Größen  $M_n^i$  das Multipolmoment,  $d_i$  den Abstand zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und dem Multipol, und  $r_i$  ist der Abstand des Multipols vom Punkt  $P$ . Dieser kann auch durch

$$r_i^2 = r^2 + d_i^2 - 2rd_i \cos(\psi_i) \quad (3.45)$$

als Funktion des sphärischen Winkels  $\psi$  ausgedrückt werden. Abb. 3.17 gibt einen Überblick über die verwendete Geometrie und die eingeführten Bezeichnungen. Die Hauptachsen  $\vec{h}_n$  fallen

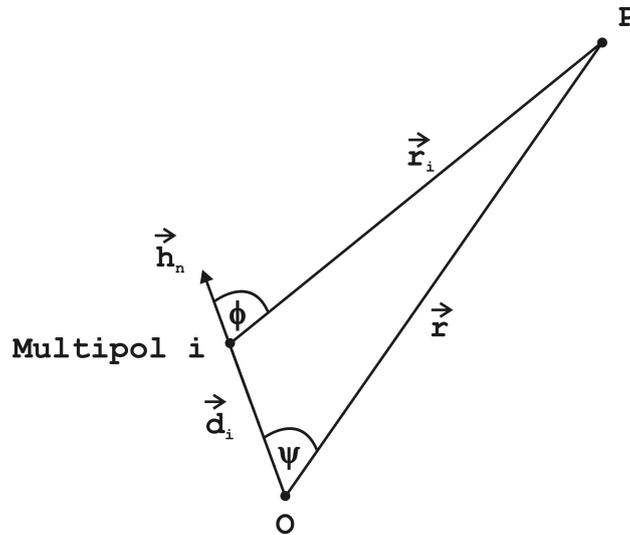


Abb. 3.17: Exzentrischer, radialer Multipol  $i$

entsprechend der Differentiation in Richtung  $\vec{d}_i$ . Der Winkel im Punkt  $i$ , unter dem  $P$  bezüglich der radialen Richtung sichtbar ist, wird als Winkel  $\phi$  bezeichnet. Es ergeben sich nach der Vorschrift 3.44 die folgenden Potentiale:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0^i &= \frac{1}{r_i} \\ \tilde{v}_1^i &= \frac{r \cos(\psi_i) - d_i}{r_i^3} = \frac{\cos(\phi_i)}{r_i^2} \\ &\dots \\ \tilde{v}_n^i &= \frac{P_n(\cos(\phi_i))}{r_i^{n+1}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Beziehung zwischen  $\cos(\phi)$  und  $\cos(\psi)$  lässt sich über die Skalarprodukte der Vektoren  $\langle \vec{d}_i, \vec{r}_i \rangle$  und  $\langle \vec{d}_i, \vec{r} \rangle$  in Abb. 3.17 herleiten. Für radiale Multipole entstehen entsprechend Abschnitt 3.3.3.1 nur die zonalen Kugelfunktionen. Sie lassen sich demnach als Funktionen der Legendreschen Polynome des Winkels  $\phi$  darstellen (3.46). Der reziproke Abstand  $1/r_i$  kann in eine Taylorreihe entwickelt und nach Legendre-Polynomen des Winkels  $\psi$  ausgedrückt werden (Marchenko, 1998):

$$\frac{1}{r_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_i^k}{r^{k+1}} P_k(\cos(\psi_i)) \quad (3.47)$$

Das Einsetzen von Gl. 3.47 in 3.44 liefert nach Differentiation die folgende unendliche Summe:

$$\tilde{v}_n^i = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \frac{d_i^{k-n}}{r^{k+1}} P_k(\cos(\psi_i)) \quad (3.48)$$

Über die Gl. 3.48 lässt sich eine Verbindung zu den Kernfunktionen aus Abschnitt 3.1.5 herstellen. Marchenko gibt die Verbindung  $\tilde{v}_n(P, Q) = \hat{v}_n^i(P)\sigma^{n+1}$  zwischen den Kernfunktionen und den Potentialen der Multipole an. Die dimensionslosen Funktionen  $\hat{v}_n^i(P)$  werden wie folgt definiert:

$$\hat{v}_n^i = \tilde{v}_n^i r^{n+1} = \left(\frac{r}{r_i}\right)^{n+1} P_n(\cos(\phi_i)) \quad (3.49)$$

Sie sind dimensionslos und werden für die Darstellung des Störpotentials in Abschnitt 3.3.4.2 verwendet.

### 3.3.4.1 Potentialverlauf exzentrischer, radialer Multipole

Um die Charakteristika von Multipolen unterschiedlichen Grades zu verdeutlichen, sollen im Anschluss die Potentiale vier radialer Multipole der Grade  $n = 0, 1, 2, 3$  verglichen werden. Dazu werden sie exzentrisch im Punkt  $i$  angeordnet (Abb. 3.18). Der Punkt  $P$ , in dem das

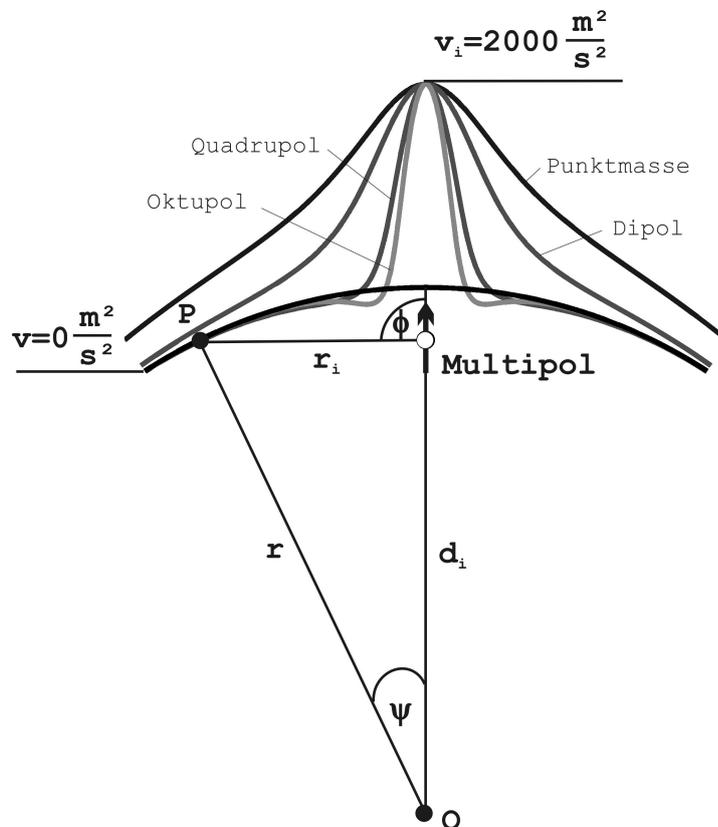


Abb. 3.18: Potentiale radialer Multipole  $v_n^i$  mit  $r = 5000$  m und  $d_i = r - 500$  m

Potential mit Gl. 3.44 berechnet wird, gleitet entlang des Radius'  $r$ . Die Bahn, auf der er sich bewegt, ist durch den schwarzen Kreisbogen gekennzeichnet. Gleichzeitig stellt dieser Halbkreis auch die Nulllinie für den Betrag des Potentials dar. Die Potentialwerte sind jeweils senkrecht in radialer Richtung abzulesen. Der Unterschied zu der in Abb. 3.12 dargestellten Potentialverteilung besteht darin, dass sich hier der Radius  $r_i$  zwischen dem Punkt  $P$  und dem Pol  $i$  aufgrund seiner Exzentrizität ständig ändert. Das betrachtete Intervall beschränkt sich auf  $[-33^\circ \leq \psi \leq 33^\circ]$ . Für diese Darstellung wurden die Multipolmomente  $M_0^i = 10^6 m^3/s^2$  für die Punktmasse,  $M_1^i = 5 \cdot 10^8 m^4/s^2$  für den Dipol,  $M_2^i = 2.5 \cdot 10^{11} m^5/s^2$  für den Quadrupol und  $M_3^i = 1.25 \cdot 10^{14} m^6/s^2$  für den Oktupol verwendet. Zunächst ist erkennbar, dass sich sämtliche Maxima in radialer Richtung über dem Pol ausbilden. Außerdem wird eine zweite wichtige Eigenschaft der radialen Pole sichtbar. Je höher der Grad des Pols, desto steiler verlaufen die Flanken links und rechts des Maximums, und desto stärker ist die Wirkung des Pols lokalisiert. Aus diesem Grund werden in der Multipol-Analyse höhere Pole genutzt. In der Praxis gilt es Schwerefeldgrößen im Raum zu approximieren. Diese können in Abhängigkeit vom Ort, etwa im Himalaya oder im Norddeutschen Raum, unterschiedlich große Steigungen aufweisen. Deshalb kann es sinnvoll sein, Multipole höheren Grades zur Approximation zu benutzen. Grundsätzlich ist es ebenso möglich, ausschließlich Punktmassen zur Schwerefeldapproximation zu verwenden (Lehmann, 1993), wobei die Lokalisierung dann durch die Tiefe der Punktmasse gesteuert wird (Abschnitt 3.3.5).

### 3.3.4.2 Approximation des Störpotentials

Im Folgenden soll das Prinzip der Approximation von Schwerefeldgrößen im Raum dargelegt werden. Begonnen wird mit der Beschreibung des Störpotentials:

$$T(P) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i^n \tilde{v}_n^i(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i^n}{r^{n+1}} \hat{v}_n^i(P) \quad (3.50)$$

Diese Vorschrift ist im Wesentlichen eine empirische Approximationsformel. Dazu werden nach (Marchenko, 1998) die Funktionen  $\tilde{v}_n^i$  oder  $\hat{v}_n^i$  verwendet. Die Koeffizienten  $m_i^n$  können als Momente von Multipolen betrachtet werden. Der geozentrische Abstand zum Punkt  $P$  wird mit  $r$  bezeichnet. Jedes Potential, welches durch einen Pol  $i$  hervorgerufen wird, besitzt seinen eigenen adäquaten Grad  $n$ . Um das Potential im Punkt  $P$  zu berechnen, ist die Auswirkung sämtlicher Multipole auf diesen Punkt zu addieren (Abb. 3.19). Die Funktion der Schwerestörung

$$\delta g(P) = -\frac{\partial T(P)}{\partial r} \quad (3.51)$$

kann in sphärischer Näherung aus der des Störpotentials berechnet werden. Für die ausführlichen Formeln wird auf (Marchenko und Abrikosov, 2002) verwiesen. Diese Funktionen können nach der Festlegung der Multipole durch die Bestimmung des Ortes, des Moments und des Grades eines jeden einzelnen Multipols exakt berechnet werden. Damit ist die Funktion der Schwerestörungen durch Festlegung von Multipolen approximiert. Laut Theorie müssen sämtliche Pole innerhalb der Regularisierungskugel  $\sigma_B$  positioniert werden (Marchenko, 1998). Diese sog. Bjerhammerkugel dient bei der Berechnung als Randfläche und muss im betreffenden Gebiet vollständig von der Erdoberfläche  $\tau$  eingehüllt werden. Die Hilfsfläche  $\sigma_A$  wird durch die Gesamtheit der Multipole durch die Bestimmung der Tiefe eines jeden einzelnen gebildet (Abb. 3.19). Der Algorithmus zur Festlegung der Parameter der Multipole wird in Abschnitten 3.3.4.3 und 3.3.4.4 näher beschrieben.

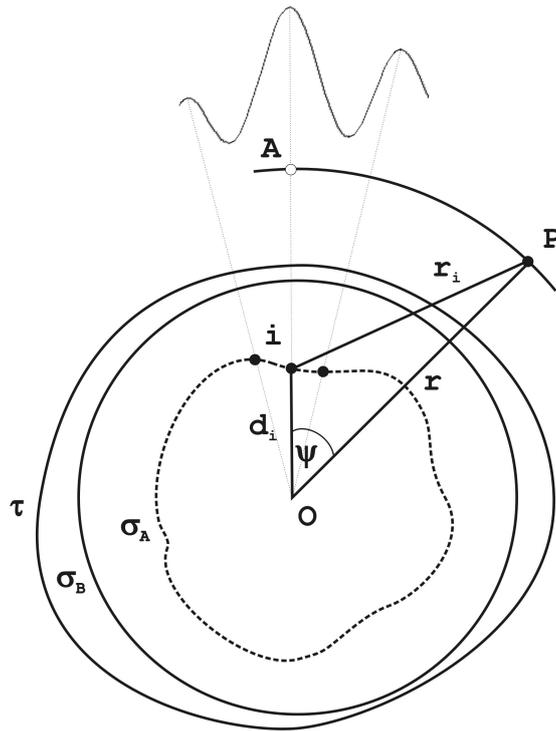


Abb. 3.19: Erdoberfläche  $\tau$ , Bjerhammerkugel  $\sigma_B$ , Hilfsfläche  $\sigma_A$

### 3.3.4.3 Isotrope Funktionen und Parameterschätzung

Die für die praktische Umsetzung der Multipolanalyse notwendigen Werkzeuge werden in diesem Abschnitt näher erläutert. Das Konzept der Analyse besteht darin, Multipole mit bestimmten Eigenschaften so anzuordnen, dass das Messsignal am besten approximiert wird. Die Eigenschaften und die Lage eines Multipols werden durch die Multipolparameter beschrieben. Dazu zählen die Tiefe  $d_i$ , das Moment  $m_i^n$  und der Grad  $n_i$ . Kern der Analyse ist die Bestimmung dieser Parameter. Sie werden mit Hilfe der empirischen isotropen Funktion (EIF) und der essentiellen

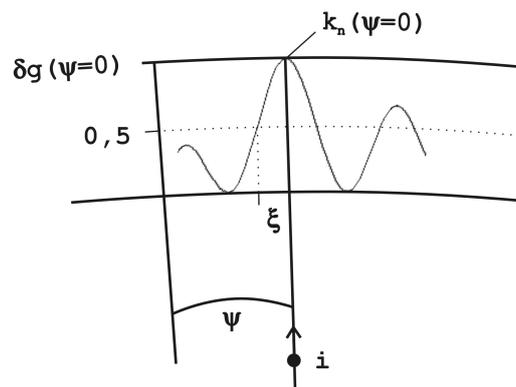


Abb. 3.20: Essentielle Parameter

Parameter festgelegt. Der Begriff der Isotropie steht für Richtungsunabhängigkeit. Die EIF wird aus den Messdaten gewonnen, indem um jedes Maximum in einem bestimmten Umkreis  $\psi_0$  über das Azimut gemittelt wird. Der Begriff der Isotropie ist eng mit den Kovarianzfunktionen

verknüpft (Abschnitt 3.1.5). Die Kovarianz von zwei nebeneinander liegenden Punkten hängt somit lediglich vom sphärischen Abstand  $\psi$  nicht aber von der Richtung des Azimuts  $\alpha$  ab. Die essentiellen Parameter beschreiben das lokale Verhalten der EIF (Abb. 3.20). Beim ersten essentiellen Parameter  $\delta g_n^i(\psi = 0)$  handelt es sich um den Betrag der Schwerestörung am Epizentrum  $A$  (Abb. 3.19). Der zweite essentielle Parameter beschreibt die Steilheit der Flanken. Er wird durch diejenige Größe  $\psi = \xi$  festgelegt, bei der die Hälfte des Betrages erreicht ist. Die Krümmung  $k_n(A)$  im Epizentrum stellt schließlich den dritten essentiellen Parameter dar.

### 3.3.4.4 Ablauf der sequentiellen Multipol-Analyse

Mit Hilfe der essentiellen Parameter und der isotropen Funktionen aus Abschnitt 3.3.4.3 können in einem iterativen Prozess die Multipolparameter  $n_i$ ,  $d_i$  und  $m_i^n$  bestimmt werden. In Abb. 3.21 wird ein Schritt der Analyse, das Platzieren eines Multipols, schematisch dargestellt. Bevor man mit der Berechnung beginnt, muss im Bedarfsfall eine topographische Reduktion stattfinden. Danach wird entsprechend der Remove-Restore-Technik der globale Einfluss auf die gemessenen Schwerestörungen eliminiert. Das dadurch entstehende Restsignal wird durch die Multipol-Analyse approximiert (Abb. 3.21). Dazu wird zunächst der betragsmäßig größte Wert in den

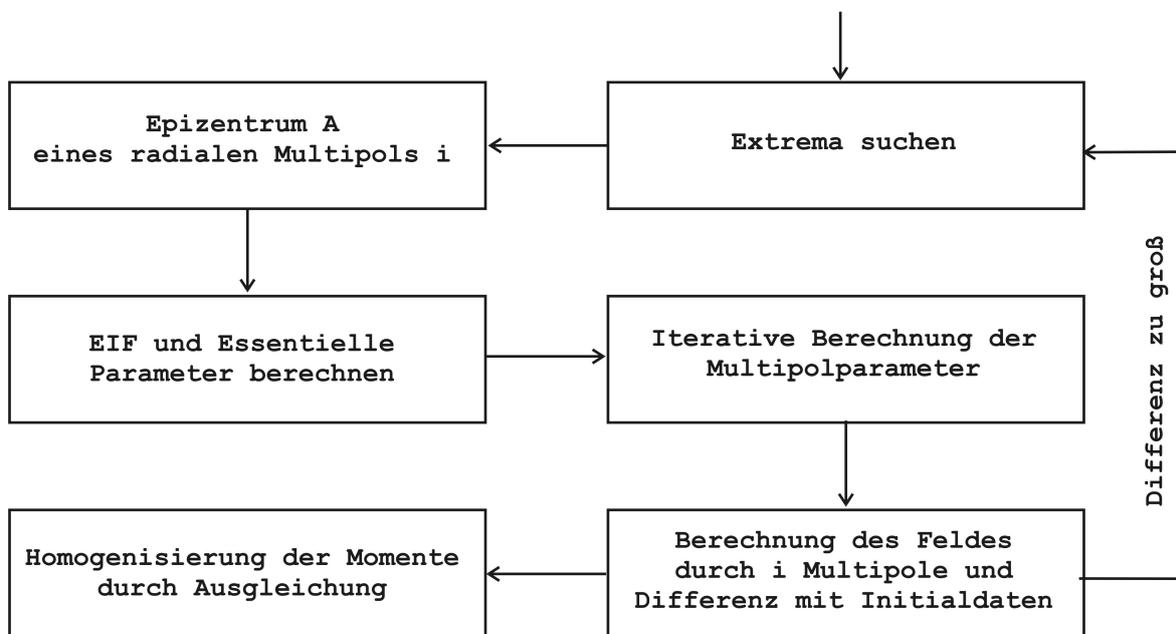


Abb. 3.21: Schema zur sequentiellen Multipol-Analyse

Messdaten gesucht. Der Multipol muss sich in radialer Richtung unter dem Extremum befinden. Damit ist die Lage des Pols festgelegt, jedoch nicht seine Tiefe unterhalb der Bjerhammer-Kugel. Nach der Berechnung der EIF und der essentiellen Parameter werden in einem iterativen Prozess die Multipolparameter bestimmt (Marchenko und Abrikosov, 2002). Anschließend wird das Gesamtfeld entsprechend Gl. 3.50 und Gl. 3.51 berechnet. Ist die Differenz zu den Messdaten zu groß, wird diese Prozedur wiederholt. Andernfalls findet eine abschließende Homogenisierung der Momente statt und die Multipol-Analyse ist abgeschlossen.

### 3.3.4.5 Geoidbestimmung

Das in Abschnitt 3.3.4.4 erläuterte Verfahren beschäftigt sich also nur mit der Positionierung der Multipole. Zur Geoidberechnung steht noch ein weiterer Schritt aus. Wie in der Einleitung beschrieben, wendet dieses Verfahren keine Schwerefortsetzung nach unten an. Stattdessen werden residuale Höhenanomalien in Flughöhe berechnet (Abb. 3.1(b)). Für die Geophysik ist der Unterschied zwischen Höhenanomalie und Geoidundulation oft nicht maßgeblich. Als Grundlage für diese Behauptung kann eine Geoidberechnung in der Schweiz angeführt werden. In (Marti, 1997) sind die Differenzen zwischen Geoidundulationen und Höhenanomalien am Beispiel der Schweiz gelistet worden. Obwohl es sich dort um ein gebirgiges Gebiet handelt, sind die Unterschiede bis  $H = 400$  m im Bereich  $N - N_P < 5$  cm. Da das Untersuchungsgebiet der CHICAGO-Messkampagne ausschließlich über Wasser liegt und die Flughöhe maximal  $H = 300$  m beträgt, nimmt man an, dass die Differenzen noch geringer sind. Im Gegensatz dazu kann es in der Geodäsie notwendig sein, diesen Unterschied zu berücksichtigen. Der Übergang von Höhenanomalien in Geoidhöhen über eine Schwerefortsetzung wird in der praktischen Auswertung nicht berücksichtigt. Die Höhenanomalien  $\delta N_P$  können nach der Vorschrift

$$\delta N(P) = \frac{T(P)}{\gamma_Q} \quad (3.52)$$

entsprechend Bruns' Formel 3.12 ausgedrückt werden. Zu beachten ist, dass entsprechend der Remove-Restore-Technik lediglich das residuale Störpotential  $T(P)$  berechnet wurde. Somit ergibt sich die gesamte Geoidundulation

$$N = N_{EGM96} + \delta N_T + \delta N(P) \quad (3.53)$$

aus der Summe des globalen Anteils  $N_{EGM96}$ , dem indirekten topographischen Effekt  $\delta N_T$  und dem durch die Multipol-Analyse bestimmten Anteil  $\delta N(P)$  (Marchenko und Abrikosov, 2002).

### 3.3.5 Punktmassen- und Dipolpotentiale

In diesem Abschnitt soll an einem Beispiel gezeigt werden, dass die Flankensteilheit eines Dipols ebenso mit einer Punktmasse hervorgerufen werden kann. Dazu wird das Potential entlang einer Kreisbahn mit dem Radius  $r = 6345300$  m um den exzentrisch gelagerten Dipol mit einer Tiefe  $d = r - 1000$  m betrachtet (Abb. 3.18). Um das Potential der Punktmasse dem des Dipols anzugleichen, werden sein Moment und seine Tiefe variiert. Dieses gelingt über einen Ansatz nach der Methode der kleinsten Quadrate, indem die Quadratsumme der Differenzen  $V_i = v_1^i - v_0^i$  minimiert wird. Die Verbesserungen  $V_i$  sind über die Differenz der beiden Funktionswerte der Potentialfunktionen  $v_1^i$  und  $v_0^i$  gegeben und entsprechen in Abb. 3.22 den Abständen zwischen den Graphen. Die Parameter  $M_0$  und  $\Delta d$  werden dabei bei einem festen  $M_1$  und  $d$  des Dipols geschätzt. Es ergibt sich folgendes Ergebnis aus der Berechnung: Damit eine Punktmasse den in Abb. 3.22 angedeuteten Potentialverlauf erzeugt, muss sie im Gegensatz zum Dipol um  $\Delta d \approx 686$  m nach oben verschoben werden und das Moment  $M_0 \approx 1/2984 M_1$  besitzen. In diesem Fall sind die Kurven im Bereich  $-2' \leq \psi \leq 2'$  am besten angepasst. Die Flankensteilheit des Punktmassenpotentials entspricht annähernd der des Dipolpotentials. Das Problem ist jedoch, dass die Punktmasse nun außerhalb einer bestimmten Referenzkugel  $R = r - 500$  m positioniert werden müsste. Laut (Marchenko, 1998) müssen aber sämtliche Pole unterhalb einer Regularisierungskugel angeordnet werden. Die Flexibilität bezüglich der Multipoltiefe ist also größer, wenn höhere Grade als  $n = 0$  zugelassen werden. Entsprechend der Zielstellung gleiche Flankensteilheit zu erzeugen, müsste eigentlich die Differenz der Steigungen der beiden Potentialfunktionen als Ansatz eingeführt werden. Zur Verdeutlichung des Prinzips soll dieses Beispiel jedoch genügen.

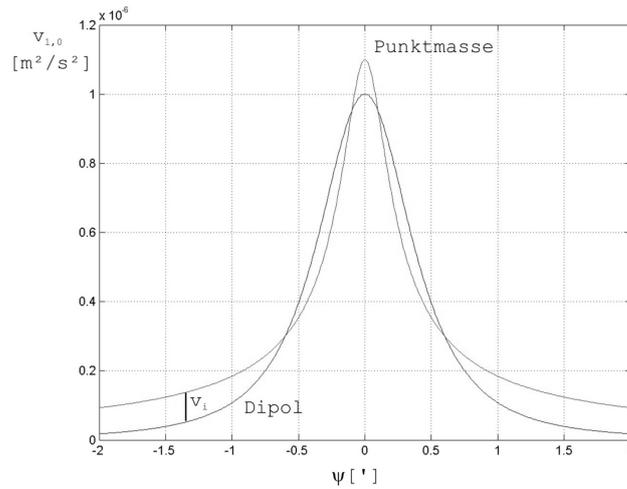


Abb. 3.22: Multipolpotentiale nullten und 1-ten Grades

### 3.4 Kollokationsverfahren

Bei der Kollokation handelt es sich um empirische Verfahren, die mit Kovarianzfunktionen arbeiten. Diese bilden ein wichtiges Hilfsmittel bei der Durchführung der Berechnungsverfahren. Sie lassen sich durch Kernfunktionen beschreiben und nach der Theorie der Kernfunktionen ableiten (Abschnitt 3.1.5). Das Ziel dieses Abschnitts ist die Einführung des Begriffs der Kovarianzfunktionen aus der statistischen Sichtweise und die Ableitung der für diese Problemstellung notwendigen speziellen Kovarianzfunktionen in der Geoidberechnung.

#### 3.4.1 Mittelwert und Kovarianzfunktion

Dieser Abschnitt soll zur Kovarianzfunktion des Störpotentials führen und die enge Beziehung zu den Kernfunktionen erkennen lassen. Zunächst wird eine Größe eingeführt, die als Überleitung zu den Kovarianzfunktionen dient. Der Mittelwert des Störpotentials  $T$  wird auf einer Kugeloberfläche bei vorausgesetzter Isotropie folgendermaßen definiert:

$$M\{T\} \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} T d\sigma = 0 \quad (3.54)$$

Dies ist nur dann der Fall, wenn dem Ellipsoid, welches das Normalpotential bestimmt, die gleiche Masse wie die der Erde zugeordnet wird und zweitens, das Potential an der Ellipsoidoberfläche gleich dem des Geoids ist ( $U_0 = W_0$ ) (Heiskanen und Moritz, 1967). Um eine Funktion zu bilden, die die Kovarianz des Störpotentials zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  beschreibt, muss eine sog. Kovarianzfunktion eingeführt werden. Diese wird über das innere Produkt des Störpotentials im Punkt  $P$  und im Punkt  $Q$  in der folgenden Weise gebildet (Moritz, 1980):

$$M\{T(P), T(Q)\} = cov(T(P), T(Q)) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} T(\theta_P, \lambda_P) T(\theta_Q, \lambda_Q) d\sigma \quad (3.55)$$

Bei vorausgesetzter Isotropie ist diese Kovarianzfunktion ausschließlich vom sphärischen Abstand  $\psi$  abhängig. Eine Entwicklung von Gl. 3.55 in Kugelfunktionen führt auf die in Abschnitt

3.1.5 angegebene Kernfunktion.

$$M\{T(P), T(Q)\} = \text{cov}(T(P), T(Q)) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi_{PQ})) \quad (3.56)$$

Der Koeffizient  $k_n$  summiert sich bei der Verwendung einer bestimmten Reihenentwicklung mit den normalisierten Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  für das Störpotential zur Gradvarianz

$$k_n = \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2) \quad (3.57)$$

auf. Da diese Geoidberechnung durch Kollokation die Schwerestörung als Messgröße und die Höhenanomalie als Signal betrachtet, soll im folgenden Abschnitt ein Ausdruck für die abgeleiteten Kovarianzfunktion erbracht werden.

### 3.4.2 Abgeleitete Kovarianzfunktionen

Die Schwerestörung  $\delta g$  lässt sich als Funktion der Höhenanomalien  $N_P$  in sphärischer Näherung folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} N_P &= \frac{T_P}{\gamma_Q} \\ \delta g_P &= -\frac{\partial T_P}{\partial r_P} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Aufgrund der Linearitätseigenschaften kann in einem ersten Schritt die Kovarianzfunktion

$$\text{cov}(N(P), \delta g(Q)) = M \left\{ \frac{T(P)}{\gamma_Q}, -\frac{\partial}{\partial r_Q} T(Q) \right\} = -\frac{\partial}{\gamma_Q \partial r_Q} M \{T(P), T(Q)\} \quad (3.59)$$

zwischen der Höhenanomalie im Punkt  $P$  und der Schwerestörung im Punkt  $Q$  angegeben werden. Die Kovarianzfunktion

$$\text{cov}(\delta g(P), \delta g(Q)) = M \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_P} T(P), -\frac{\partial}{\partial r_Q} T(Q) \right\} = \frac{\partial}{\partial r_P \partial r_Q} M \{T(P), T(Q)\} \quad (3.60)$$

zwischen der Schwerestörung in beiden Punkten wird durch zweifache Differentiation der Kovarianzfunktion des Störpotentials berechnet. Die rechten Seiten in Gl. 3.59 und 3.60 können durch Gl. 3.56 substituiert werden. Die abgeleiteten Kovarianzfunktionen werden für die Durchführung der Geoidberechnung im Abschnitt 3.4.3 benötigt.

### 3.4.3 Kollokationsansatz und Schätzung der Höhenanomalien

Nach dem allgemeinen Kollokationsansatz besteht die Messung  $l$  aus der Summe eines systematischen Einflusses  $Ax$ , des Signals  $t$  und den zufällig verteilten Messfehlern  $n$ :

$$l = Ax + t + n \quad (3.61)$$

In diesem Fall wird angenommen, dass kein globaler Trend vorhanden ist ( $x = 0$ ). Der Ansatz in Gl. 3.61 kürzt sich zu:

$$l = t + n = \mathbf{L}N + n \quad (3.62)$$

Der lineare Operator  $\mathbf{L}$  kennzeichnet den funktionalen Zusammenhang zwischen Schwerestörungen und Höhenanomalien in Gl. 3.58. Eine Schätzung des Signals  $\hat{N}_P$  hat nach der Methode der kleinsten Quadrate die folgende Gestalt (Moritz, 1980):

$$\hat{N}_P = C_{st}(C_{tt} + C_{nn})^{-1}l \quad (3.63)$$

Wenn die Anzahl der Messpunkte mit  $f$  bezeichnet wird, besitzt die Kovarianzmatrix  $C_{st}$  das Format  $(1, f)$ . In ihr befinden sich die Kovarianzen zwischen der Höhenanomalie  $N_P$  und der Beobachtung  $\delta g_P$  pro Messpunkt. Die Matrix  $C_{tt}$   $(f, f)$  beinhaltet die Kovarianzen zwischen allen Beobachtungspunkten. Die mittleren Fehler der Beobachtungen müssen in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen  $C_{nn}$  berücksichtigt werden. Für eine detailliertere Erläuterung der Matrizen und deren Inhalt wird auf (Moritz, 1980) verwiesen. Zur Berechnung der Elemente der Matrizen werden die in Abschnitt 3.4.2 abgegebenen Kovarianzfunktionen benötigt. Für die Matrix  $C_{st}$  wird die Funktion 3.59 und für  $C_{tt}$  die Kovarianzfunktion 3.60 verwendet. Der Wert dieser Funktionen kann bei Angabe des Ortes der Punkte  $P$  und  $Q$  und des Faktors  $k_n$  berechnet werden. Ein Problem ist die Bestimmung dieses konstanten Faktors, welcher durch Analyse des Gravitationsfeldes vorher festgelegt werden muss (Marchenko und Abrikosov, 2002). Bei diesem Verfahren wird ebenfalls die Remove-Restore-Technik angewendet. Die gesamte Geoidundulation kann abschließend mit Gl. 3.53 berechnet werden.

# Kapitel 4

## Vorverarbeitung der Rohdaten

Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung der Schwerestörungen aus den Messdaten. Nachdem im Abschnitt 4.1 die wesentlichen Schritte der Vorverarbeitung genannt werden, dienen die Abschnitte 4.1.1 und 4.1.2 der näheren Erläuterung wichtiger Sachverhalte. Dazu zählen die Bestimmung der Beschleunigung aus GPS und die Korrektur der Flieh- und Corioliskräfte. Schließlich werden in Abschnitt 4.2 die Ergebnisse der Vorverarbeitung zusammengestellt und hinsichtlich ihrer Genauigkeit und räumlichen Auflösung untersucht.

### 4.1 Generierung von Schwerestörungen

Um mit der praktischen Berechnung von Schwerestörungen zu beginnen, muss zunächst das Normalpotential definiert werden. Dazu ist es nötig, die Parameter des Referenzellipsoids festzulegen (Abschnitt 3.1.2). In dieser Arbeit wurden die in Tab. 4.1 aufgezeigten Parameter des WGS84-Referenzsystems verwendet. Sämtliche Schritte in der Vorverarbeitung werden mit dem

Parameter	Wert	Beschreibung
$a$	6378137 m	große Halbachse des Ellipsoids
$J_2$	$1082.62998905 \cdot 10^{-6}$	dynamische Abplattung
$GM$	$398600.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3/\text{s}^2$	geozentrische Gravitationskonstante
$\omega$	$7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$	Rotationsgeschwindigkeit

Tab. 4.1: definierende Parameter des WGS84

Programm AGS<sup>1</sup> durchgeführt (Abb. 4.1). GPS-Positionen, INS-Daten und die im Gravimeter ermittelten Beschleunigungen stellen die Ausgangsdaten der Berechnung dar. Die Positionen der Antenne sind in Form von ellipsoidischen Koordinaten  $(\phi, \lambda, h)$  im Referenzsystem WGS84 für jeden Zeitpunkt eines Profils gegeben. Das inertielle Messsystem liefert nach entsprechender Auswertung<sup>2</sup> die Orientierungswinkel<sup>3</sup> des Flugzeugs. Diese Winkel werden für die Korrektur der Fehlhorizontierung und des Hebelarms genutzt. Die Beschleunigung durch das Flugzeug wird durch zweifache Differentiation der Höhe der Antenne  $h$  nach der Zeit berechnet. Sie unterscheidet sich von der des Gravimetersensors, da verschiedene Orte innerhalb des Flugzeugs unterschiedlich stark beschleunigt werden. Um den Beschleunigungsanteil des Sensors von den

<sup>1</sup>Airborne Gravimetry Software, Uwe Meyer, GFZ

<sup>2</sup>AeroOffice Version 4.0.7, Firma IGI

<sup>3</sup>Roll-, Nick- und Kurswinkel (engl. roll, pitch, yaw)

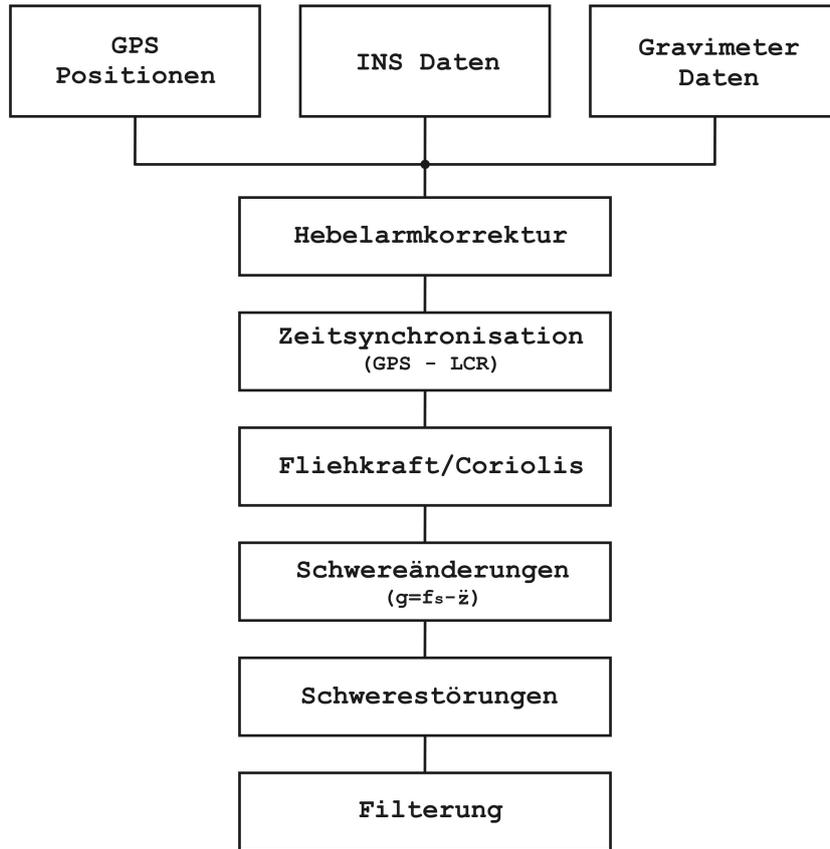


Abb. 4.1: Generierung der Schwerestörungen

Gravimetermessungen subtrahieren zu können, muss die Beschleunigung durch die Hebelarmkorrektur auf den Sensor reduziert werden. Anschließend erfolgt ein Vergleich der Zeitreihen der GPS-Beschleunigungen und der Gravimetermessungen. Eine eventuelle Zeitverschiebung der beiden Signale wird durch ein Korrelationsverfahren ermittelt und ggf. korrigiert. Danach erfolgt die Korrektur aufgrund der zusätzlich wirkenden Flieh- und Corioliskräfte. Nach dem allgemeinen Prinzip der Aerogravimetrie in Gl. 2.1 erfolgt nun die Trennung der Beschleunigung des Sensors von der Gravimetermessung durch Differenzbildung. Theoretisch sollte lediglich die Änderung der Schwerebeschleunigung im Signal verbleiben. Zur Bildung der Schwerestörung  $\delta g$  muss die Normalschwere  $\gamma$  in Flughöhe subtrahiert werden. Um diese berechnen zu können, ist zunächst die Normalschwere

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_E \cos^2(\phi) + b\gamma_P \sin^2(\phi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi)}} \quad (4.1)$$

am Referenzellipsoid zu bestimmen (Heiskanen und Moritz, 1967). In Gl. 4.1 stehen  $a$  und  $b$  für die große bzw. kleine Halbachse des Referenzellipsoids,  $\phi$  für die geographische Breite,  $\gamma_E$  und  $\gamma_P$  sind die Normalschwere am Äquator bzw. am Pol des Referenzellipsoids. Anschließend kann mit

$$\gamma_h = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2(\phi))h + \frac{3}{2}h^2\right) \quad (4.2)$$

die Normalschwere in der Höhe des Flugprofils errechnet werden (Heiskanen und Moritz, 1967). Die Abplattung ist mit  $f$  und die ellipsoidische Höhe mit  $h$  gekennzeichnet. Die Hilfsgröße

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{kM} \quad (4.3)$$

enthält zusätzlich die Rotationsgeschwindigkeit der Erde  $\omega$  und die geozentrische Gravitationskonstante  $kM$ . Die Schwerestörung kann nun nach Gl. 3.11 durch Differenz mit der Normal-schwere berechnet werden. Eine abschließende Filterung mit einem Butterworth-Tiefpassfilter (Hamming, 1987) beendet die Vorverarbeitung der Rohdaten.

#### 4.1.1 Differentielles, kinematisches GPS

Die Nutzung des GPS ist für die Auswertung in der Aerogravimetrie unverzichtbar. Die Beschleunigung der Antenne wird durch zweifache Differentiation der ellipsoidischen Höhe  $h$  berechnet. Für die Berechnung der Koordinaten des Rovers<sup>4</sup> wird der differentielle, kinematische Modus verwendet (Abb. 4.2). Der kinematische Modus bedeutet, dass sich die Antenne während der Messung in Bewegung befindet. In der Auswertung werden eine Vielzahl von Koordinaten berechnet, die sich zum Pfad der Antenne zusammensetzen lassen. Eine differentielle Konfiguration trägt zur Steigerung der Genauigkeit bei. Bei dieser Auswertungsart müssen mindestens zwei Empfänger gleichzeitig messen. Zum einen die Basis<sup>5</sup>, welche am Boden fest aufgebaut wird, und zum anderen der Rover, der sich auf dem Flugzeug befindet. Schließlich werden Koordinatendifferenzen zwischen der Basis und dem Rover bestimmt. Die Koordinaten der Basisstation müssen zuvor separat bestimmt werden. Im Rahmen dieser Arbeit muss auf einen vollständigen Abriss der Theorie verzichtet werden. Einen detaillierten Einblick in die umfangreiche Theorie und Anwendung des GPS gibt (Xu, 2003).

Für die Auswertung standen zwei Programme zur Verfügung: KSG-Soft<sup>6</sup> und eine kommerzielle Software<sup>7</sup>. Um die Koordinaten der Basis berechnen zu können, wurde eine Station des IGS<sup>8</sup> in Concepción verwendet. Für die Berechnung der Basislinie zwischen Concepción und Temuco ( $s \approx 220$  km) im statischen differentiellen Auswerteverfahren kam KSG-Soft zur Anwendung. Damit konnten die Koordinatendifferenzen mit einer Genauigkeit von  $m \approx 5$  cm bestimmt werden. Die kommerzielle Software erreichte für diese Aufgabe lediglich eine Genauigkeit, die um den Faktor zehn schlechter war. Die Koordinaten der Basis in Temuco wurden dann durch Anbringen der Koordinatendifferenzen an die Koordinaten der IGS-Station berechnet. Für die kinematische Auswertung der Flugprofile selbst unterschieden sich die beiden Programme kaum. Deshalb wurde wegen der einfacheren Bedienung auf die kommerzielle Software zurückgegriffen. Da auf

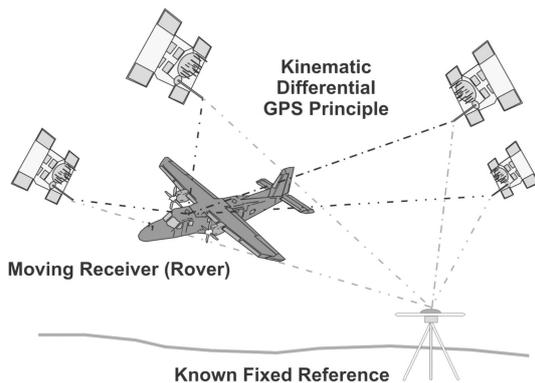


Abb. 4.2: Kinematisches, differentielles GPS

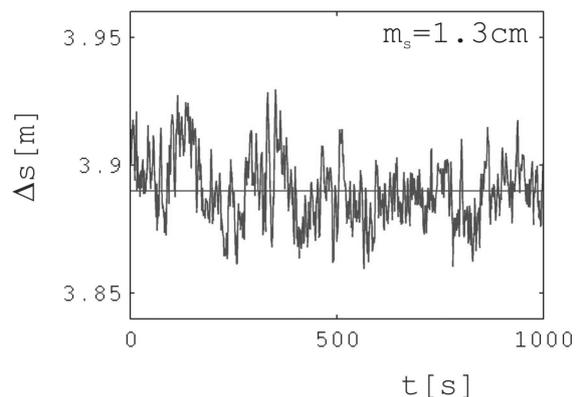


Abb. 4.3: Differenz der Antennen 1 und 2

<sup>4</sup>GPS-Antenne auf dem Flugzeug

<sup>5</sup>in der Nähe des Hangars auf dem Flugplatz Temuco

<sup>6</sup>Kinematic Static GPS Software, Guochang Xu, GFZ

<sup>7</sup>Trimble Total Control, Trimble

<sup>8</sup>International GPS Service

dem Flugzeug drei GPS Antennen montiert waren (Abb. 2.1), konnte durch Differenzbildung eine Genauigkeitsabschätzung der Koordinaten im kinematisch-differentiellen Modus vorgenommen werden. Für diese Gegenüberstellung wurden die Positionsdaten der Antenne 1 und der Antenne 2 des Profils ANGEL-10-01 benutzt (Abb. 1.1(b)). Der Abstand, der aus der Differenz der GPS-Koordinaten der beiden Punkte berechnet wurde, ist in Abbildung (4.3) dargestellt. Aus diesen Differenzen konnte die Standardabweichung über den Mittelwert errechnet werden ( $m_s = 1.3$  cm). Bei der Annahme, dass alle drei Koordinaten der beiden Antennen gleich genau und stochastisch unabhängig sind, ergibt sich ein mittlerer Fehler pro Koordinate von  $m = 1$  cm. Mit geeigneten Differenzier- und Filtermethoden lassen sich für die Beschleunigung Genauigkeiten zwischen 2 mGal und 4 mGal erreichen (Bruton u. a., 1999). Eine Abschätzung der Genauigkeit erfolgt hier jedoch durch Vergleich mit unabhängigen Daten einer Schiffsvermessung (Abschnitt 4.2.1).

#### 4.1.2 Fliehkraft- und Corioliskraft-Korrektur

Da die Messungen in einem rotierenden Bezugssystem stattfinden, treten dabei auf einer bewegten Plattform zusätzliche Trägheitsbeschleunigungen auf. Diese sind von der Position, der Geschwindigkeit und der Richtung der Bewegung bezüglich der Rotation der Erde abhängig. Die Zentrifugal- und Corioliskräfte bezeichnet man als Scheinkräfte, da sie nur in nichtinertialen Systemen auftreten. Dieser Einfluss muss in der Vorverarbeitung korrigiert werden und berechnet sich in ellipsoidischer Approximation folgendermaßen (Harlan, 1968):

$$\delta e_E = \frac{v_N^2}{a} \left(1 - \frac{h}{a} + f(2 - 3 \sin^2(\phi))\right) + \frac{v_E^2}{a} \left(1 - \frac{h}{a} - f \sin^2(\phi)\right) + 2v_E \omega_e \cos(\phi) \quad (4.4)$$

Die Größen  $v_E$  und  $v_N$  bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten in Ost- bzw. in Nordrichtung. Die ellipsoidische Höhe  $h$  ist nach der GPS-Auswertung gegeben. Die große Halbachse  $a$  und die geometrische Abplattung  $f$  sind durch das Referenzellipsoid WGS84 festgelegt. Bei  $\phi$  handelt es sich um die geographische Breite und bei  $\omega_e$  um die Drehgeschwindigkeit der Erde. Durch die höheren Geschwindigkeiten der fluggestützten Messung und einer nicht vernachlässigbaren Flughöhe kann diese Korrektur Werte bis zu  $\pm 2500$  mGal annehmen. Diese sog. Eötvös-Korrektur setzt sich aus einem Fliehkraftanteil in den ersten beiden Termen und einem Coriolisanteil im dritten Term zusammen. Für einen Flug mit Ost-Westkomponente in der Geschwindigkeit vergrößert sich die Korrektur um den Coriolisanteil. Das heißt nicht, dass in Nord-Süd Richtung keine Corioliskräfte wirken. In jeder Flugrichtung wirken diese Scheinkräfte, außer wenn die Richtung der Bewegung des Flugzeugs parallel zur Rotationsachse der Erde steht. Ausschlaggebend ist hier jedoch, dass nur die Korrekturen in Richtung der Erdschwerebeschleunigung maßgeblich sind. Diese treten nur auf, wenn die Geschwindigkeit eine Ost-West Komponente aufweist. Für einen Flug nach Norden auf der nördlichen Hemisphäre wird das Flugzeug nach Osten abgelenkt. Da der Kraftvektor keine Komponente in Radiusrichtung hat, ist in diesem Fall keine Coriolis-Korrektur anzubringen.

## 4.2 Ergebnisse der Vorverarbeitung

Die Ergebnisse der Vorverarbeitung können Abb. 4.4 entnommen werden. Der Betrag der Schwerestörung ist innerhalb des weiß umrandeten Rechtecks dargestellt. Dieses Gebiet ist hinsichtlich der Geoidberechnung verkleinert worden. Die außerhalb der Rechteckbox hinterlegten Schwerestörungen wurden mit dem globalen Modell EGM96 berechnet. Der rot gekennzeichnete Teil überlagert sich mit der Vermessung einer Schiffskampagne und wird zur Abschätzung der Genauigkeit in Abschnitt 4.2.1 benutzt. Die Ergebnisse der Vorverarbeitung können am Beispiel eines Profils<sup>9</sup> illustriert werden. Die Diagramme zu diesem Profil sind der Arbeit als Anhang A beigefügt.

### 4.2.1 Räumliche Auflösung und Genauigkeitsabschätzungen

Die räumliche Auflösung in Profiltrichtung kann durch die kleinste Halbwellenlänge  $x_l$  beschrieben werden. Sie ist eine Funktion der Flugzeuggeschwindigkeit  $s$  und der Periodenlänge  $T$  der Filterung. In (Bruton u. a., 2002) ist die Formel

$$x_l = \frac{sT}{2} \quad (4.5)$$

angegeben. Angewendet auf diesen speziellen Fall bedeutet das bei einer mittleren Flugzeuggeschwindigkeit von  $s = 70$  m/s und einer Filterlänge  $T = 200$  s eine Auflösung in Längsrichtung von  $x_l \approx 7$  km Halbwellenlänge. Quer zur Flugrichtung ist die Auflösung abhängig vom Abstand  $\Delta D$  der Flugprofile. Mindestens drei Messpunkte sind notwendig, um eine Welle vollständig zu beschreiben. Daraus folgt eine räumliche Auflösung der Halbwellenlänge in Querrichtung  $x_q$  von:

$$x_q = \Delta D \quad (4.6)$$

Bei einem Profilabstand von etwa  $\Delta\phi \approx 0.1^\circ$  oder sechs Bogenminuten entspricht das einer Querauflösung von  $x_q \approx 11$  km Halbwellenlänge.

Nun soll die Frage der Genauigkeit der Messwerte im Vordergrund stehen. Eine Möglichkeit diese abzuschätzen, besteht im Vergleich mit unabhängigen Daten<sup>10</sup>. Dieser wird auch bei (Bruton u. a., 1999) erwähnt und erweist sich als geeignetes Hilfsmittel zur Abschätzung der Genauigkeit in der Praxis. Die Messungen einer Schiffskampagne<sup>11</sup> (Reichert und Schreckenberger, 2002) fallen mit einem Profil der CHICAGO-Messkampagne zusammen (Abb. 4.4). Dies ermöglicht die Gegenüberstellung dieser beiden unabhängigen Messungen (Abb. 4.5). Die blaue Kurve in diesem Diagramm beschreibt den Tiefenverlauf des Ozeanbodens, welcher an der rechten Skala abgelesen werden kann. Die SPOC-Daten waren zunächst in Form von Absolut-Schwerewerten gegeben und mussten somit noch in Schwerestörungen umgerechnet werden. Anschließend lag das Schiffsprofil in Form von Schwerestörungen in Höhe der Meeresoberfläche vor. Da beide Profile nicht in der gleichen Höhe gemessen wurden, müsste nun eine Schwerefortsetzung erfolgen. Darauf wird an dieser Stelle jedoch verzichtet, da es sich lediglich um einen Höhenunterschied von  $h \approx 300$  m handelt. Es ist somit nur eine geringe Änderung des Signals zu erwarten. Im Rahmen einer Abschätzung des Fehlers ist diese Annahme zulässig. Dadurch konnte die mittlere quadratische Abweichung der CHICAGO-Schwerestörungen dieses Profils von den Schwerestörungen der Schiffsvermessung berechnet werden ( $rms = 5.5$  mGal). In der Fluggravimetrie können derzeit

<sup>9</sup>Profil: ANGEL-02-02-01 auf der Breite  $\phi = -38.9^\circ$

<sup>10</sup>Vergleich mit groundtruth-Daten

<sup>11</sup>SPOC, Subduction Processes Off Chile, Forschungsschiff SONNE

Genauigkeiten zwischen 2 – 4 mGal erreicht werden (Bruton u. a., 1999). Unter der Berücksichtigung, dass der rms<sup>12</sup>-Wert von 5.5 mGal die Genauigkeit der Schiffs- und Fluggravimetrie beinhaltet, dürfte die CHICAGO-Messung innerhalb dieser Bandbreite liegen.

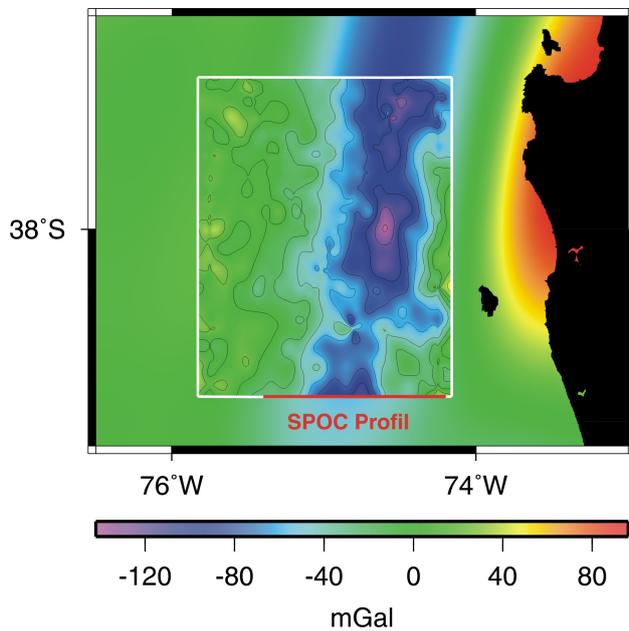


Abb. 4.4: CHICAGO-Schwerestörungen

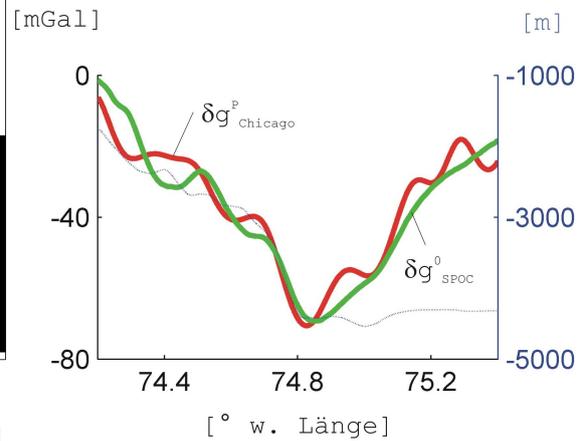


Abb. 4.5: Vergleich mit SPOC-Profil

<sup>12</sup>rms, root mean square

# Kapitel 5

## Vergleich der Ergebnisse zur Geoidberechnung

Dieses Kapitel beinhaltet die Zusammenstellung der Daten für die Geoidberechnung sowie den Vergleich der Ergebnisse. Ziel ist es, die Lösungen gegenüberzustellen und mit unabhängigen Daten zu vergleichen. Die Geoidberechnungen mit dem Verfahren der Multipol-Analyse und dem Verfahren der Kollokation wurden vom Autor persönlich mit dem Programmsystem AGF am GFZ-Potsdam durchgeführt. Das Verfahren der Integration wurde von Pavel Novak an der Universität in Stuttgart übernommen.

### 5.1 Zusammenstellung der Daten

Zu Beginn war es notwendig, das Berechnungsgebiet sinnvoll abzugrenzen, da die Profile in ihrer Länge unterschiedlich ausgewertet werden können und an den Rändern oftmals keine verlässlichen Ergebnisse liefern. In Abb. 4.4 ist der Bereich für die Geoidberechnung in weißer Umrandung hervorgehoben. In diesem Gebiet liegen die Messdaten in ausreichender Dichte vor. Der Ausschnitt befindet sich ausschließlich über dem Ozean, so dass keine topographische Korrektur notwendig ist. Die restlichen Profile, welche in Nord-Süd Richtung über dem Festland geflogen wurden (Abb. 1.1(b)), werden für die Geoidberechnung nicht genutzt, da sie kaum Überdeckung mit den marinen Profilen bieten. In geographischen Koordinaten ausgedrückt, lässt sich das Gebiet im Längenbereich  $-75.8333^\circ \leq \lambda \leq -74.1667^\circ$  und im Breitenbereich  $-38.8711^\circ \leq \phi \leq -37.2018^\circ$  abgrenzen. Die verwendete Samplingrate wurde auf  $\Delta\phi = \Delta\lambda = 2.5'$  Bogenminuten festgelegt. Demnach handelt es sich im Bogenmaß um ein quadratisches Raster aus  $41 \times 41$  Punkten (Abb. 5.1). Beim Abtasten<sup>1</sup> muss sorgfältig gearbeitet werden, denn bei zu langen Abtastraten können Signale verschwinden oder verfälscht werden (Hamming, 1987). Die verwendete Abtastrate ist aufgrund der zu erwartenden Auflösung ausreichend (Abschnitt 4.2.1). Die Maschenweite entspricht in etwa 4.6 km in Längenrichtung und 3.6 km bis 3.7 km auf den Breitenkreisen. Die Koordinaten und die zugehörigen Schwerestörungen sind im System WGS84 mit den Parametern aus Tab. 4.1 gegeben. Diese Parameter bilden sowohl die Referenz für die Koordinaten, als auch für die Berechnung der Normalschwere. Die Beachtung des Bezugssystems ist besonders wichtig, da die Ergebnisse vergleichbar sein müssen. Eine ASCII-Datei mit den zusammengestellten Daten hat den in Abb. 5.2 dargestellten Aufbau. Für die Anwendung der Integralmethode musste dieses Raster in Kugelkoordinaten umgerech-

---

<sup>1</sup>(engl. sampling)

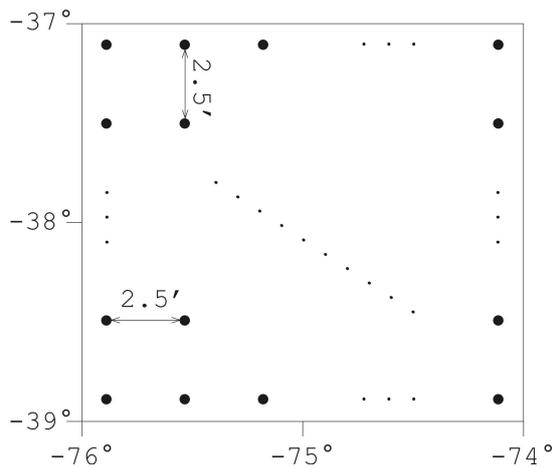


Abb. 5.1: Datenraster

<lat>	<long>	<height>	<g_dst>
-37.2018	-75.8333	307.78	8.83
-37.2018	-75.7917	308.30	6.27
-37.2018	-75.7500	324.26	0.85
.....			
-37.2435	-75.8333	326.00	11.68
-37.2435	-75.7917	325.79	5.19
.....			
.....			
.....			
-38.8711	-74.2083	293.15	28.66
-38.8711	-74.1667	246.00	32.23

Abb. 5.2: Datenformat

net werden. Vor der Durchführung dieses Verfahrens wurde es außerdem an den Rändern in Längenrichtung um je zwei Grad und in Breitenrichtung um je ein Grad erweitert. Dafür wurden Schwerstörungen aus dem globalen Geoidmodell EGM96 berechnet.

## 5.2 Vergleich mit den unabhängigen Daten

Der Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Methoden mit unabhängigen Daten ist ein wichtiger Aspekt bei der Evaluierung der Ergebnisse. Da z. Z. keine vergleichbar genauen und hochauflösten Geoidlösungen in diesem Gebiet zur Verfügung stehen, besteht die Möglichkeit des Vergleichs mit korrigierten Meeresoberflächen. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, stimmt das Geoid mit der ideellen Meeresoberfläche überein. Die KMS<sup>2</sup>- und AVISO<sup>3</sup>-Daten wurden aus der Satellitenaltimetrie abgeleitet. Es handelt sich dabei um korrigierte mittlere Meereshöhen (Andersen, 2002). Die Auflösung dieser Datensätze ist höher als die globaler Geoidmodelle, wodurch sie sich zum Vergleich eignen. Die Parameter des Systems der mittleren Meereshöhen sind in Tab. 5.1 aufgeführt. Nach Berücksichtigung der Meerestopographie können die mittleren

Parameter	Wert	Beschreibung
$a$	6378136.3 m	große Halbachse des Ellipsoids
$1/f$	1/298.257	geometrische Abplattung
$U_0$	62636858.702 m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Potential am Referenzellipsoid
$GM$	398600.4415 · 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>	geozentrische Gravitationskonstante

Tab. 5.1: Referenzsystem der mittleren Meereshöhen

Meereshöhen mit diesen Geoidlösungen verglichen werden. Die dynamische Meerestopographie<sup>4</sup> wurde als Differenz von vier Jahren Topex-Altmetrie und einem globalen Schwerefeldmodell<sup>5</sup> berechnet (Dobslaw, 2003). Die Meerestopographie aus diesem Modell berücksichtigt keine kurzwelligen Signaturen und lokalen Besonderheiten. Für dieses Auswerteggebiet ergibt sich deshalb ein nahezu konstanter Wert von  $\Delta H = 20$  cm als Differenz zwischen Geoid und mittlerer Meereshöhe. Die mittlere Meerestopographie wurde in Tab. 5.2 bei der Zusammenstellung der Er-

<sup>2</sup>Kort & MatrikelStyrelsen, Kopenhagen

<sup>3</sup>Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data

<sup>4</sup>Mean Dynamic Topography, MDT

<sup>5</sup>Schwerefeldmodell: EIGEN-GRACE01s

gebnisse berücksichtigt. Vor der Verwendung dieser Datensätze musste eine Transformation in das WGS84-Referenzsystem vorgenommen werden. Dazu wurde eine Koordinatentransformation berechnet.

### 5.3 Gegenüberstellung der Ergebnisse

Die Lösungen der Verfahren werden im Folgenden graphisch dargestellt. Dabei wird lediglich der in Abb. 4.4 weiß gekennzeichnete Bereich betrachtet. Außer den Differenzen der Geoidlösungen der drei Verfahren erscheinen jeweils die Differenzen mit den KMS-Daten. Das letzte Bild zeigt die Differenz zwischen KMS- und AVISO-Daten. Anschließend erfolgt eine Gegenüberstellung und Interpretation der Ergebnisse.

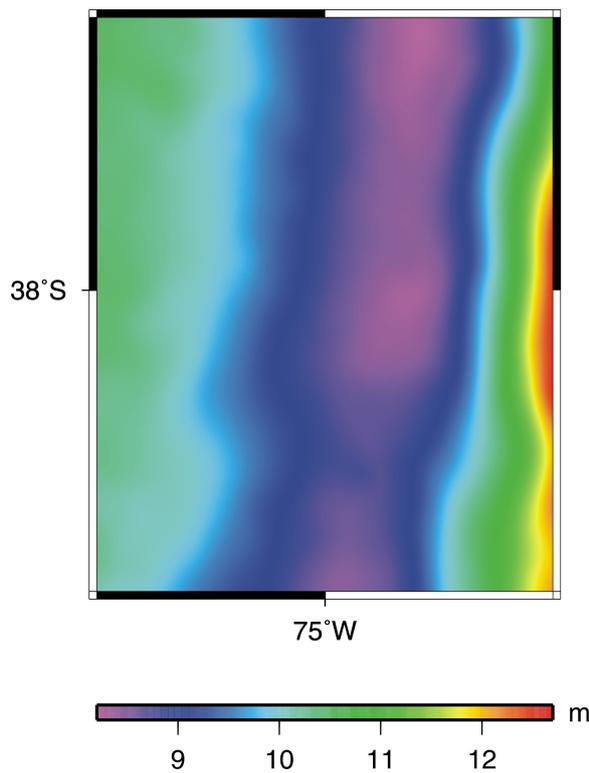


Abb. 5.3: Multipol-Analyse (SMA)

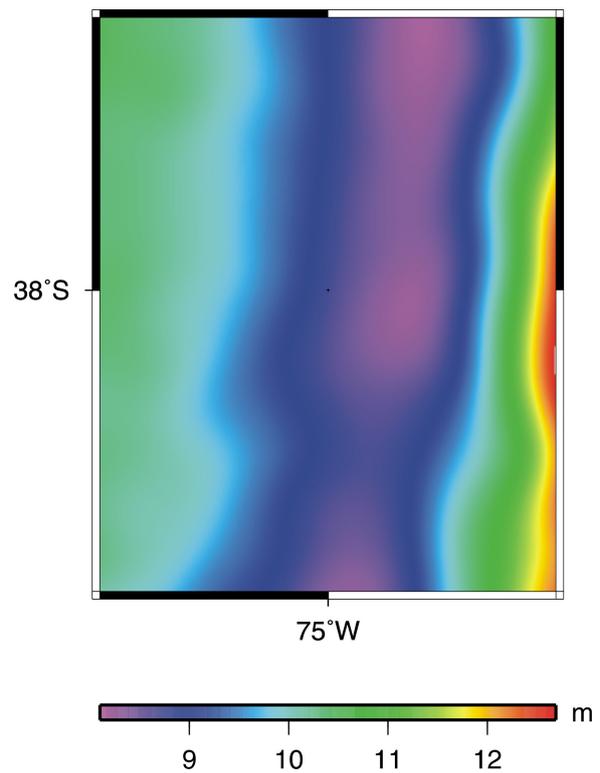


Abb. 5.4: Kollokationsverfahren (LSC)

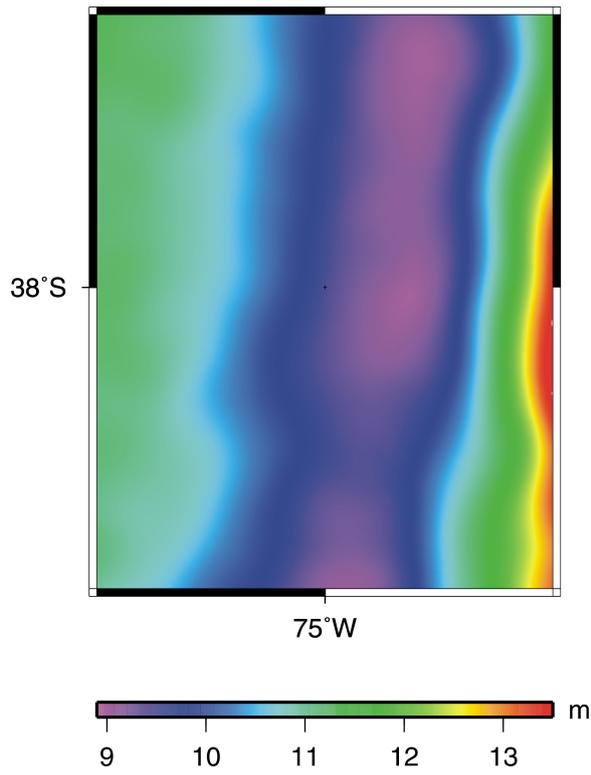


Abb. 5.5: Integralmethode (INT)

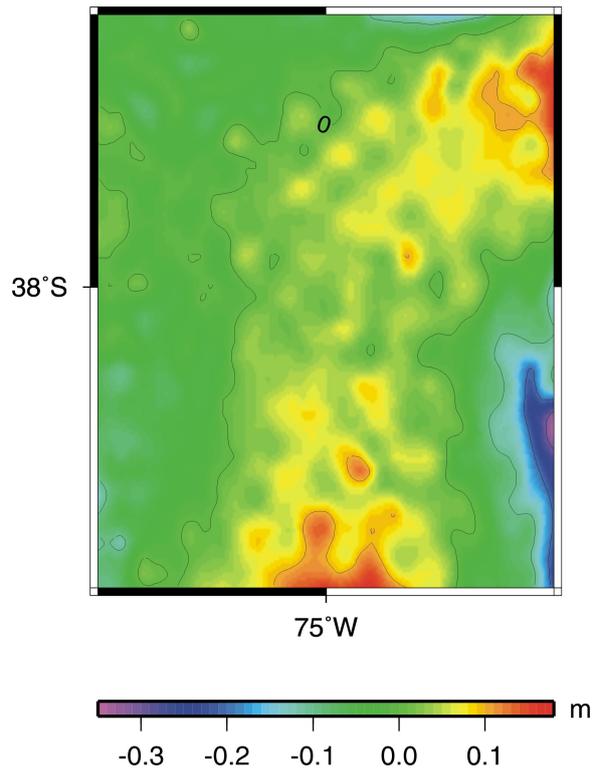


Abb. 5.6: Differenz SMA - INT

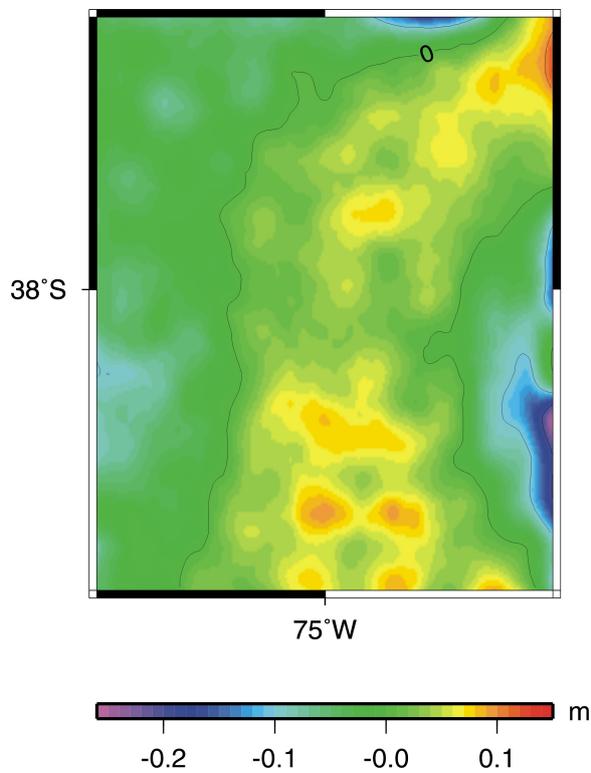


Abb. 5.7: Differenz LSC - INT

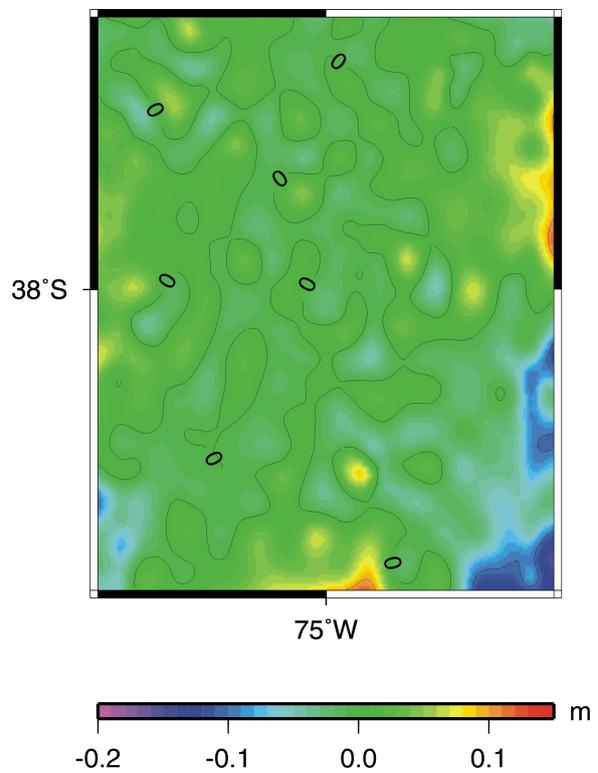


Abb. 5.8: Differenz SMA - LSC

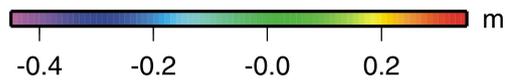
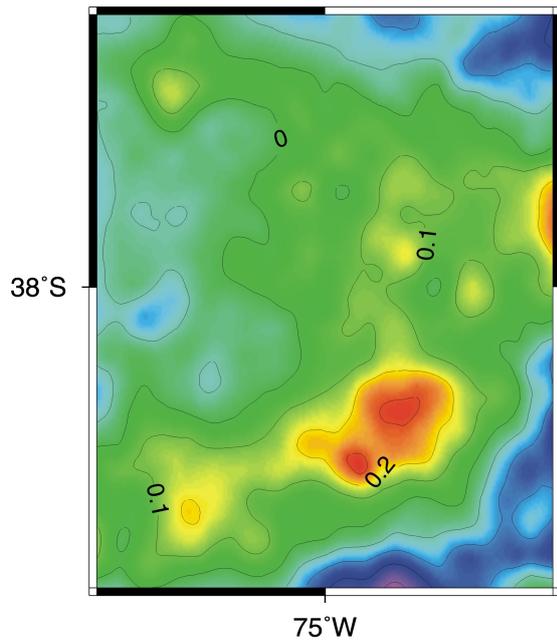


Abb. 5.9: Differenz SMA - KMS

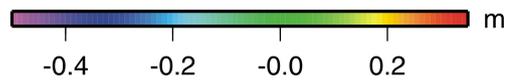
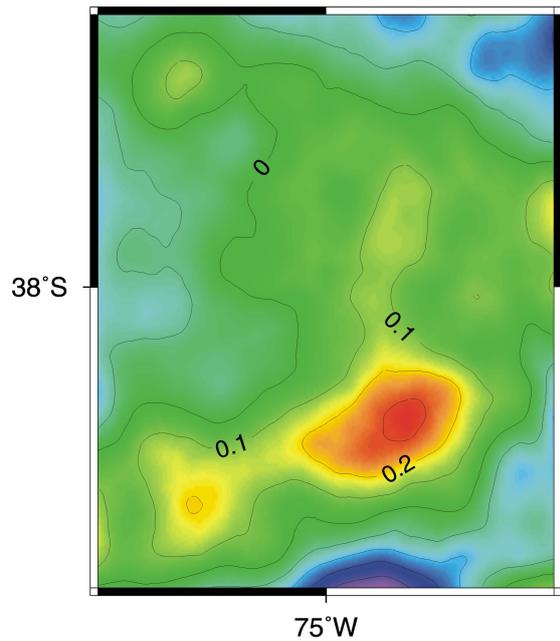


Abb. 5.10: Differenz LSC - KMS

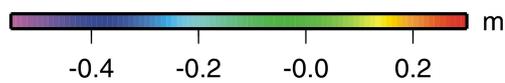
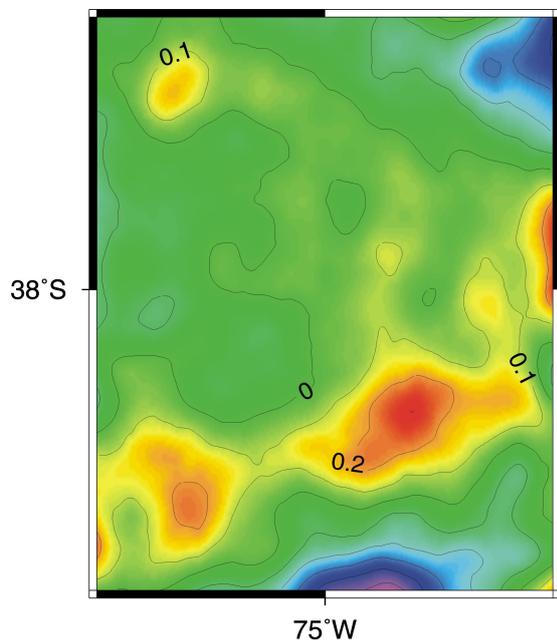


Abb. 5.11: Differenz INT - KMS

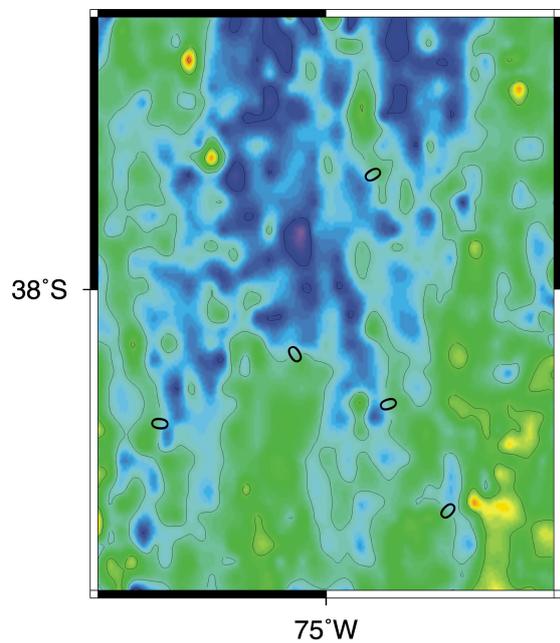


Abb. 5.12: Differenz KMS - AVISO

<b>Differenz</b>	<b>Verschiebung [m]</b>	<b>rms [m]</b>	<b>min [m]</b>	<b>max [m]</b>
SMA-INT	-0.771	0.054	-0.349	0.171
LSC-INT	-0.806	0.041	-0.254	0.116
SMA-LSC	0.035	0.026	-0.155	0.115
SMA-KMS	-0.327	0.091	-0.417	0.313
LSC-KMS	-0.362	0.093	-0.462	0.338
INT-KMS	0.443	0.093	-0.537	0.293
KMS-AVISO	-0.042	0.034	-0.163	0.218

Tab. 5.2: Statistik der Ergebnisse

Die Ergebnisse unterscheiden sich nach den Abb. 5.3 bis 5.5 nur geringfügig. Eine Genauigkeitsabschätzung ist nur durch eine Fehlerfortpflanzung innerhalb der Kollokationsverfahren möglich gewesen. Im Mittel ergab sich hier eine Genauigkeit von  $m = \pm 4$  cm bei einem angenommenen mittleren Fehler der Schwerstörungen von  $m = \pm 5.5$  mGal. Die Statistik der Ergebnisse ist in Tab. 5.2 zusammengestellt. Dazu wurden zunächst die Differenzen der einzelnen Lösungen untereinander und danach die mit den unabhängigen KMS-Daten gebildet. Schließlich ist die Differenz zwischen KMS- und AVISO-Daten in der letzten Zeile der Tabelle aufgeführt. Als Maß der Übereinstimmung wurden die absolute Verschiebung, die mittlere quadratische Abweichung (rms), das Minimum und das Maximum der Differenz zweier Lösungen genutzt.

Zunächst kann festgestellt werden, dass die Verschiebung der einzelnen Lösungen zueinander unterschiedlich groß ist. Während die Ergebnisse der Kollokation (LSC) und der Multipole (SMA) dicht beieinander liegen, ist die Differenz mit dem Niveau der Integrallösung (INT) größer ( $\Delta \approx 80$ cm). Die Ursache dafür liegt in der Festlegung der globalen Parameter und Referenzsysteme. Der Unterschied erklärt sich durch die Lage des globalen Modells in beiden Berechnungen. Nach der Remove-Restore-Technik bestimmt jedoch das globale Modell maßgeblich die absolute Lage des Geoids. Dadurch kann die Differenz zum Integralverfahren erklärt werden. Die Kollokation und die Multipolmethode wurden mit einem Programmsystem gerechnet, wodurch viele Fehlerquellen ausgeschlossen werden können. Die absoluten Differenzen stellen jedoch kein großes Problem dar, da die Lage des Geoids in praktischen Anwendungen ohnehin nicht aus einer lokalen Geoidberechnung bestimmt wird. Hierfür werden globale Modelle benutzt, in die die lokalen Lösungen eingebunden werden. Die absoluten Differenzen mit den unabhängigen KMS- und AVISO-Daten sind nach der Transformation der Meereshöhen in das WGS84 und der Berücksichtigung der Meerestopographie in einem akzeptablen Rahmen ( $\Delta \approx 35$ cm). Die Meerestopographie ist nicht in ausreichender Auflösung und Genauigkeit bestimmt worden. Außerdem besteht die Möglichkeit, dass der Einfluss der permanenten Gezeiten in den Meereshöhen enthalten ist. Deshalb können diese Differenzen ebenfalls erklärt werden. Die Meereshöhen aus AVISO- und KMS-Daten sind in der absoluten Lage nur geringfügig verschieden.

Die relative Übereinstimmung der einzelnen Lösungen ist das wichtigste Maß, um Aussagen über die Qualität der Geoidlösungen zu treffen. Nach relativer Verschiebung einer Lösung zur anderen kann eine mittlere quadratische Abweichung berechnet werden. Diese Werte sind in der zweiten Spalte aufgelistet. Hierbei lässt sich feststellen, dass die Lösungen im Bereich  $3 \text{ cm} \leq rms \leq 5$  cm im Rahmen der Genauigkeit gut übereinstimmen. Auch der Vergleich mit den unabhängigen Daten liegt bei allen Lösungen bei ca.  $rms \approx 9$  cm. Demzufolge weisen die drei Ergebnisse eine ähnliche Abweichung von den unabhängigen Meereshöhen auf.

Bei der Betrachtung der Abb. 5.6 bis 5.8 ist auffällig, dass die Differenzen zwischen den einzelnen Lösungen an den Rändern, insbesondere am Ost- und Südrand am größten sind. Durch eine Verkleinerung des Vergleichsgebietes ließe sich demnach noch eine Steigerung der Übereinstimmung

erreichen.

## 5.4 Schlussfolgerungen

Zunächst kann festgestellt werden, dass die Fluggravimetrie in der Lage ist, globale Schwerefeldmodelle zu verfeinern und somit detailliertere Geoidstrukturen zu bestimmen. Alle Verfahren weisen im Rahmen der Maßnahmen, die zum Vergleich zur Verfügung stehen, keine großen Unterschiede auf. Sie sind somit alle drei für die lokale Geoidberechnung und Geoidverdichtung geeignet, obwohl sie sich in der generellen Herangehensweise und Durchführung stark voneinander unterscheiden. Im Rahmen dieser Untersuchung wurden keine signifikanten Unterschiede der Ergebnisse festgestellt. Die Methode der Kollokation und die der Multipole stimmen am besten überein. Hierfür spielt der Umstand eine wichtige Rolle, dass beide innerhalb eines Programmsystems ausgewertet worden sind. Außerdem stimmen die Ergebnisse der Integrationsmethode und die der Kollokation im Rahmen dieser Untersuchung am zweitbesten überein. Schließlich lässt sich noch hinzufügen, dass die Schwerefeldfortsetzung innerhalb des Integrationsverfahrens im Rahmen dieser Untersuchung zu keinen signifikanten Unterschieden in den Ergebnissen führte.

# Literatur

- Andersen, O. B. (2002). *Marine Gravity and Geoid From Multi-Satellite Altimetry and Applications: Summer Lecture Series and Scientific Applications*. Technical Report, Wuhan, China, <http://research.kms.dk/~oa/wuhan/contents.htm>.
- Barthelmes, F. (1986). *Untersuchungen zur Approximation des äußeren Gravitationsfeldes der Erde durch Punktmassen mit optimierten Positionen*. PhD thesis, Zentralinstitut für Physik der Erde, Potsdam.
- Bruton, A. M., Glennie, C. L. und Schwarz, K. P. (1999). *Differentiation for High-Precision GPS Velocity and Acceleration Determination*. GPS Solutions, Vol.2, No.4.
- Bruton, A. M., Schwarz, K. P., Ferguson, S., Kern, M. und Wei, M. (2002). *Deriving Acceleration from DGPS: Toward Higher Resolution of Airborne Gravimetry*. GPS Solutions, Vol.5, No.3.
- Claessens, S. J., Featherstone, W. E. und Barthelmes, F. (2001). *Experiences with Point-Mass Gravity Field Modelling in the Perth Region, Western Australia*. Geomatics Research Australasia, No. 75 December.
- Dobslaw, H. (2003). *Kombinierte Nutzung von aktuellen Altimeter- und Schwerefeldmissionen für ozeanographische Anwendungen*. Master's thesis, Technische Universität Dresden.
- Hamming, R. W. (1987). *Digitale Filter*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim.
- Harlan, R. B. (1968). *Eotvos Correction for Airborne Gravimetry*. Journal of Geophysical Research, 3, 4675-4679.
- Heiskanen, W. A. und Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco [u.a.].
- Hobson, E. W. (1931). *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, University Press.
- Hofmann-Wellendorf, B. (1983). *Representation of the Gravitational Potential by Multipoles*. Habilitation, Technische Universität Graz.
- Kautzleben, H. (1965). *Geomagnetismus und Aeronomie*. Band 1, Ergänzungsband. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig.
- LaCoste and Romberg, LLC (1998). *Instruction Manual LaCoste and Romberg Model „S“ Air-Sea Dynamic Gravity Meter with „Airsea 3.0“ Digital Control System*. 11002 Metric Blvd., Ste 100, Austin, Texas 78758.
- Lehmann, R. (1993). *The method of free-positioned point masses - geoid studies on the gulf of bothnia*. Bulletin Geodesique, 67:31-40.

- Lelgemann, D. und Marchenko, A. (2001). *On Concepts for modelling the earth gravity field*. Verlag der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S., Factor, J., Trimmer, R., Pavlis, N., Chinn, D., Cox, C., Klosko, S., Luthcke, S., Torrence, M., Wang, Y., Williamson, R., Pavlis, E., Rapp, R. und Olson, T. (1998). *The Development of the Joint NASA GSFC and the National IMagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. NASA Technical Paper NASA/TP1998206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, USA.
- Marchenko, A. N. (1998). *Parametrization of the Earth's Gravity Field*. Lviv Astronomical and Geodetic Society, Lviv, Ukraine.
- Marchenko, A. N., Barthelmes, F., Meyer, U. und Schwintzer, P. (2001). *Regional Geoid Determination: An Application to Airborne Gravity Data in the Skagerrak*. Scientific Technical Report STR01/07, GFZ Potsdam.
- Marchenko, D. und Abrikosov, O. (2002). *AGF 4.2 Software Theory Description, Extension, Operator Manual*.
- Marti, U. (1997). *Geoid der Schweiz 1997*. Technical Report Sechshundfünfzigster Band, Schweizerischen Geodätischen Kommission, Zürich, Switzerland.
- Meyer, U., Boedecker, G. und Pflug, H. (2003). *Airborne Navigation and Gravimetry Ensemble & Laboratory (ANGEL)*. Scientific Technical Report STR03/06, GFZ- Potsdam.
- Meyer, U. und Pflug, H. (2003). *CHICAGO CHilean AeroGeophysical Observations Survey Report*. GFZ Potsdam, Department 1 „Geodesy and Remote Sensing Section“, Section 1.3 „Gravity Field and Earth Models“.
- Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Novak, P., Kern, M., Schwarz, K.-P. und Heck, B. (2002a). *Evaluation of band-limited topographical effects in airborne gravimetry*. Journal of Geodesy, 76: 597-604.
- Novak, P., Kern, M., Schwarz, K.-P., Sideris, M. G., Heck, B., Ferguson, S., Hammada, Y. und Wei, M. (2002b). *On geoid determination from airborne gravity*. Journal of Geodesy, 76: 510-522.
- Reichert, C. und Schreckenberger, B. (2002). *Fahrbericht SONNE 161 (Leg 2+3), Subduktionsprozesse vor Chile, SPOC*. BGR Bericht, BGR, Hannover.
- Schwarz, K.-P. und Li, Y. C. (1996). *What can airborne gravimetry contribute to geoid determination*. Journal of Geophysical Research, Vol. 101, No. B8, Pages 17,873-17,881, August 10.
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin [u.a.].
- Torge, W. (2003). *Geodäsie*. Walter de Gruyter, Berlin [u.a.].
- Tscherning, C. C. (1972). *Representation of Covariance Functions Related to the Anomalous Potential of the Earth Using Reproducing Kernels*. Technical Report, The Danish Geodetic Institut, Kobenhavn.
- Xu, G. (2003). *GPS Theory, Algorithms and Applications*. Berlin, Springer Verlag.

# Anhang A

## Profil: ANGEL-02-02-01

Das erste und zweite Diagramm zeigen die eigentlichen Messwerte für die Federvorspannung (ST) und die Balkengeschwindigkeit ( $\dot{B}$ ). Diese sind in der Einheit Skalenteile (Skt) bzw. Skalenteile pro Sekunde (Skt/sec) angegeben. Das dritte Fenster beinhaltet die Korrekturen aufgrund der Kreuzkopplung (CC) und der Plattformneigung. Die Eötvös-Korrektur entlang des Flugprofils ist in der nächsten Box dargestellt. Die Haltungswinkel des Flugzeugs erscheinen in dem folgenden Diagramm. Die spezifische Kraft  $f_s$  (blau), welche aus den Gravimetermessungen berechnet wurde, und die aus dem GPS abgeleitete Beschleunigung (rot) sind im nächsten Diagramm dargestellt. In der letzten Box ist die Schwerestörung abgebildet.

Profil ANGEL-02-02-01 mit Butterworth-Tiefpassfilter T=180 sec.

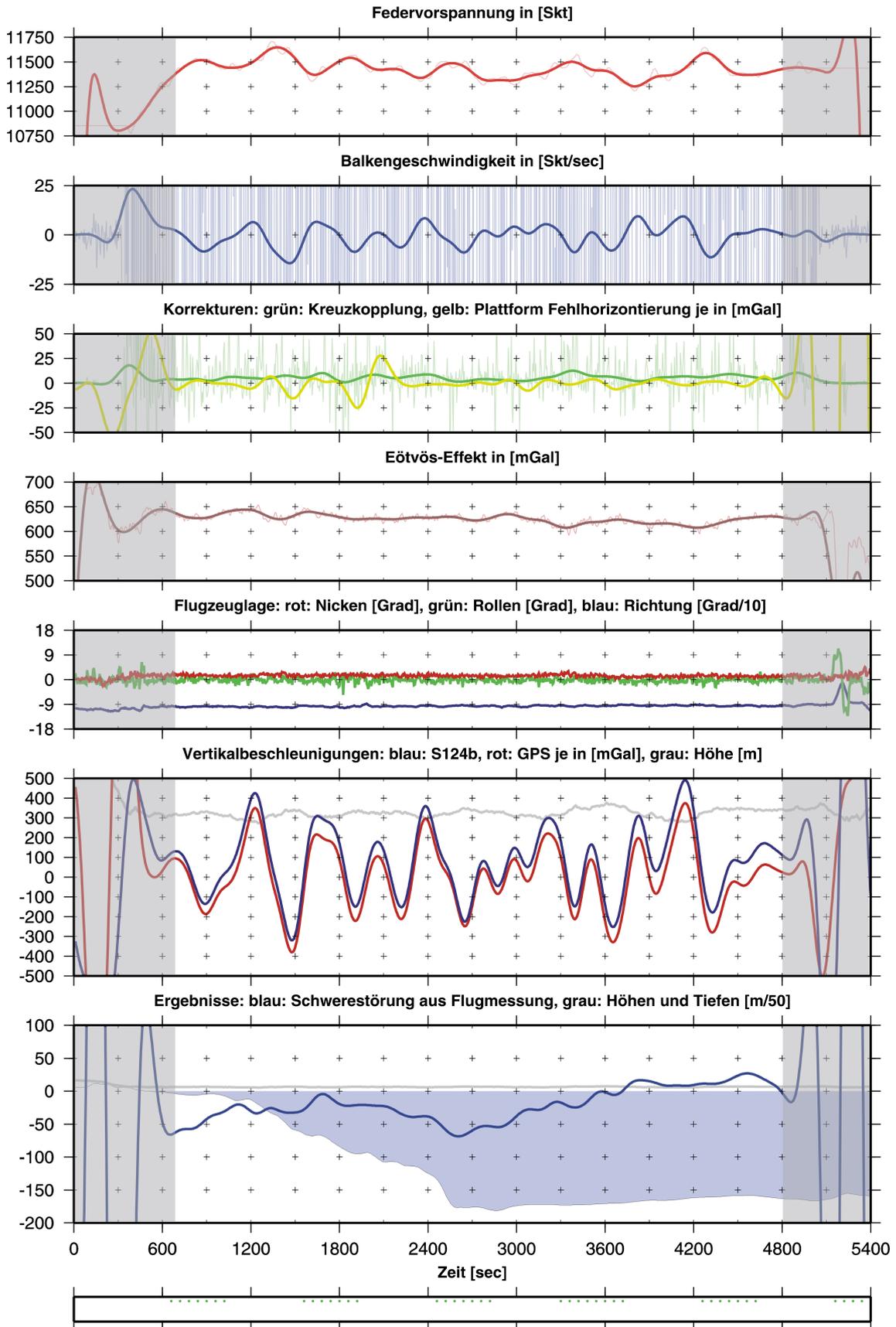


Abb. A.1: Profil: ANGEL-02-02-01