

Mathematische Methoden in der Geomagnetik – Verbesserung der Modellauflösung

Reyko Schachtschneider, Ingo Wardinski, Martin Rother, Vincent Lesur
Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, Potsdam

Measuring and monitoring the geomagnetic field is an important task for our life. The Earth's magnetic field has an impact on climate and the biosphere and also gives us an insight to the hidden processes inside the Earth's core. Magnetic signatures of the lithosphere are used for prospection and to answer geological questions. The magnetic field surrounding the Earth protects the biosphere from cosmic radiation. Extraterrestrial sources such as eruptions on the sun's surface can have big influences on technical equipment on Earth, therefore early-warning systems are essential. In order to obtain information about signatures from inside the Earth or from outer space, the magnetic field must be known very precisely and be in a form that is easily understandable and easy to handle numerically. Geomagnetic field models help to describe the complex structure of the field with a small number of parameters. With the number of measurements of the geomagnetic field increasing drastically, especially since the satellite era, there is the possibility of high resolution field models. In order to achieve a numerically stable model at very high resolutions, careful data selection and sophisticated inversion techniques are applied. This enables us to reduce the influence of noise from satellite measurements and contribution of unknown ionospheric and magnetospheric sources.

Tripel-Satellitenmission Swarm (Abb. ESA/AOES Medialab)



Das die Erde umgebende Magnetfeld schützt uns vor kosmischer Strahlung und ist eine Voraussetzung für das Leben auf der Erde. Die Vermessung und die genaue Kenntnis des Erdmagnetfelds sind für unser Leben daher von enormer Bedeutung. Das Erdmagnetfeld hat einen direkten Einfluss auf das Klima, die Biosphäre und technische Anlagen. Es liefert uns zudem einen Einblick in die verborgenen Prozesse im Erdkern. Einflüsse von außen, wie z.B. Eruptionen auf der Sonne, können große Auswirkungen auf die vom Menschen eingesetzte Technik haben. So sind elektrische Anlagen anfällig für Störungen durch magnetische Stürme und eine Frühwarnung vor solchen Ereignissen ist von großer Wichtigkeit. Um Informationen über die magnetischen Signaturen aus dem Erdinneren und dem Weltraum ziehen zu können, muss das Erdmagnetfeld genau vermessen und in eine numerisch leicht handhabbare Form (ein sogenanntes Feldmodell) gebracht werden. Magnetische Modelle dienen dazu, die komplexe Struktur des Magnetfelds mit einer kleinen Anzahl von Parametern möglichst genau zu beschreiben. Die ständige Verbesserung dieser mathematischen Modelle, sowohl in der Genauigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt als auch in ihrem zeitlichen Verlauf, ist die Hauptaufgabe der Geomagnetik. Dazu werden immer neue Möglichkeiten der Datenerhebung genutzt. Ein weltweites Netz geomagnetischer Observatorien bildet mit deren sehr genauen Messungen die Grundlage vieler Forschungsarbeiten. Da die räumliche Auflösung eines Modells nur so gut sein kann wie die Auflösung der Daten, ist es notwendig, die Lücken zwischen den lokalen Observatoriumsdaten zu füllen. Das geschieht mit Schiffsmessungen, Repeat-Station-Messkampagnen, flugzeuggestützten Messungen sowie mit geomagnetischen Satellitenmissionen. Das Deutsche GeoForschungsZentrum GFZ betreibt zwei geomagnetische Observatorien in Deutschland, war maßgeblich an der Satellitenmission CHAMP beteiligt, engagiert sich im Projekt GEOHALO mit einer flugzeuggestützten geomagnetischen Messkampagne und leistet Beiträge für die Vorbereitung der Tripel-Satellitenmission Swarm. Im Folgenden soll ein Überblick über die Modellierung des Erdmagnetfelds gegeben und anhand eines Beispiels aus der Lithosphärenfeld-Modellierung veranschaulicht werden.

Wozu dienen Magnetfeld-Modelle?

Um den Zustand des Erdmagnetfelds zu einem bestimmten Zeitpunkt möglichst genau zu beschreiben, entwickelt man sogenannte Modelle. Sie ermöglichen es, den Zustand des Felds

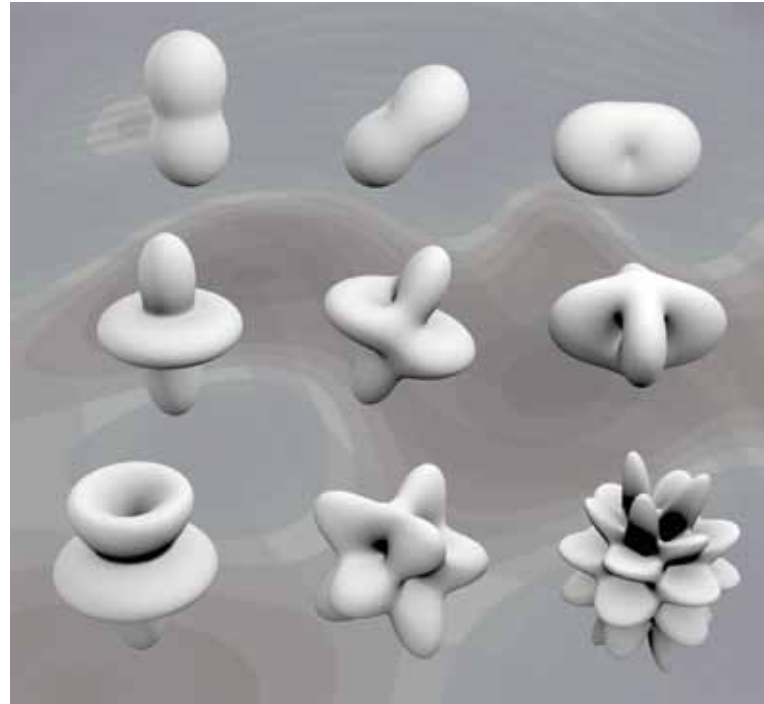


Abb. 1: Beispiele für Kugelflächenfunktionen verschiedener Ordnungen und Grade. Dargestellt sind die Werte als willkürlich skalierte Auslenkung der Einheitskugel für die Funktionen $Y_{2,0}$, $Y_{2,1}$ und $Y_{2,2}$ (v.l.n.r. in der oberen Reihe), $Y_{4,0}$, $Y_{4,1}$ und $Y_{4,4}$ (v.l.n.r. in der mittleren Reihe) sowie $Y_{5,0}$, $Y_{5,3}$ und $Y_{10,3}$ (v.l.n.r. in der unteren Reihe).

Fig. 1: Examples of spherical harmonics of different degrees and orders. Plotted are the functions $Y_{2,0}$, $Y_{2,1}$ and $Y_{2,2}$ (f.l.t.r., top row), $Y_{4,0}$, $Y_{4,1}$ and $Y_{4,4}$ (f.l.t.r, middle row) and $Y_{5,0}$, $Y_{5,3}$ and $Y_{10,3}$ (f.l.t.r, bottom row).

an jedem Punkt einer Bezugsfläche (z.B. der Erdoberfläche) anzugeben. Diese Feldmodelle stellen eine Vereinfachung in der Beschreibung des Erdmagnetfelds dar. Würde man das Feld durch eine Wertetabelle beschreiben wollen, so bräuchte man eine sehr große Anzahl an Werten, um eine hohe Abdeckung der Erdoberfläche zu erreichen. Anstatt also jeden Punkt einzeln durch den Wert des Felds an dieser Stelle zu beschreiben, verwendet man mathematische Basisfunktionen, in die sich das Feld eindeutig zerlegen lässt und berechnet dann die Größe eines jeden Anteils aus Messwerten. Diese Koeffizienten bilden dann das Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt. Bestimmt man zusätzlich die zeitliche Abhängigkeit der Koeffizienten, erhält man ein zeitlich variables Modell. Der Einfachheit halber wollen wir uns hier nur auf zeitlich konstante Modelle beschränken.

Mögliche Basisfunktionen, aus denen ein Erdmagnetfeldmodell zusammengesetzt werden kann, sind die Kugelflächenfunktionen oder kurz Kugelfunktionen. Diese sind auf der Oberfläche einer Kugel definiert. In Abb. 1 sind einige Beispiele



Kontakt: R. Schachtschneider
(reyko@gfz-potsdam.de)

für Kugelfunktionen zu sehen. Je höher Grad und Ordnung einer Kugelfunktion sind, desto mehr Schwingungen sind darin enthalten und desto kleinere Strukturen kann man damit darstellen. Eine Kugelfunktion des Grades l und der Ordnung m wird mit Y_l^m bezeichnet. Ziel ist es, möglichst hochauflösende Modelle für das Erdmagnetfeld zu erhalten, das heißt Modelle, in denen hohe Grade und Ordnungen von Kugelfunktionen verwendet werden. Bei der Projektion der Magnetfelddaten aus Satellitenmessungen auf die Erdoberfläche werden aber störende Einflüsse, wie z.B. Messunsicherheiten oder unbekannte Quellen des Magnetfelds von außerhalb des Erdkörpers mit steigendem Grad der Kugelfunktionsdarstellung weiter verstärkt. Die Berechnung hochauflösender Modelle stellt daher sehr hohe Ansprüche an die verwendeten Inversionsmethoden und die Qualität der Messdaten. Für letztere werden geomagnetische Indizes herangezogen, anhand derer man einschätzen kann, zu welchen Zeiten die störenden Einflüsse von ionosphärischen Magnetfeldern, also solchen, die ihre Quelle außerhalb der Erde in der Ionosphäre haben, gering sind.

Messung des Magnetfelds

Grundlage eines Erdmagnetfeldmodells sind Messdaten. Ein weltweites Netz von rund 120 geomagnetischen Observatorien vermisst das Erdmagnetfeld ständig sehr genau. Der Vorteil dieser Genauigkeit wird allerdings durch die geringe Abdeckung der Erdoberfläche mit Observatorien gemindert. In ozeanischen Bereichen sowie in weiten Teilen Südamerikas,

Afrikas oder Asiens gibt es nur wenige Observatorien. Mit sogenannten Repeat-Station-Messungen versucht man, dies auszugleichen. Repeat-Stations stellen Netzwerke von Messpunkten dar, die in regelmäßigen Abständen aufgesucht werden, um dort das Erdmagnetfeld zu vermessen. Sie sind besser verteilt, man erhält aber weniger Werte pro Jahr und die Genauigkeit ist geringer als bei den Observatorien. Abb. 2 zeigt eine Karte der weltweiten Observatorien, sowie ein Beispiel für ein Repeat-Station-Netzwerk aus Messkampagnen des GFZ.

Mit Schiffsmessungen, flugzeuggestützten Messungen und Satellitenmessungen kann die Dichte an Daten weiter erhöht werden. Schiffsmessungen haben den Nachteil, dass Schiffe relativ langsam sind und somit nur geringe Flächen in einer Kampagne erfasst werden können. Das GFZ ist in der Vergangenheit an flugzeuggestützten Messkampagnen mit dem HALO-Flugzeug im Zug der Messkampagne GEOHALO beteiligt gewesen. Hierbei wurde das Magnetfeld der Erde erstmalig mit einem sehr schnell fliegenden Flugzeug mit langer Reichweite vermessen. Außerdem war das GFZ federführend an der Entwicklung und dem Betrieb des Satelliten CHAMP (2000-2010) beteiligt, der weltweit einmalige Langzeitdaten für die Modellierung des Erdmagnetfelds geliefert hat, die auch heute noch wissenschaftlich ausgewertet werden.

Derzeit wird die CHAMP-Nachfolgemission, die Tripel-Satelliten-Mission Swarm, vorbereitet. In dieser Mission werden drei Satelliten in zwei unterschiedlichen Orbits die Erde umkreisen. Das erhöht auf der einen Seite die Anzahl an Messwerten und

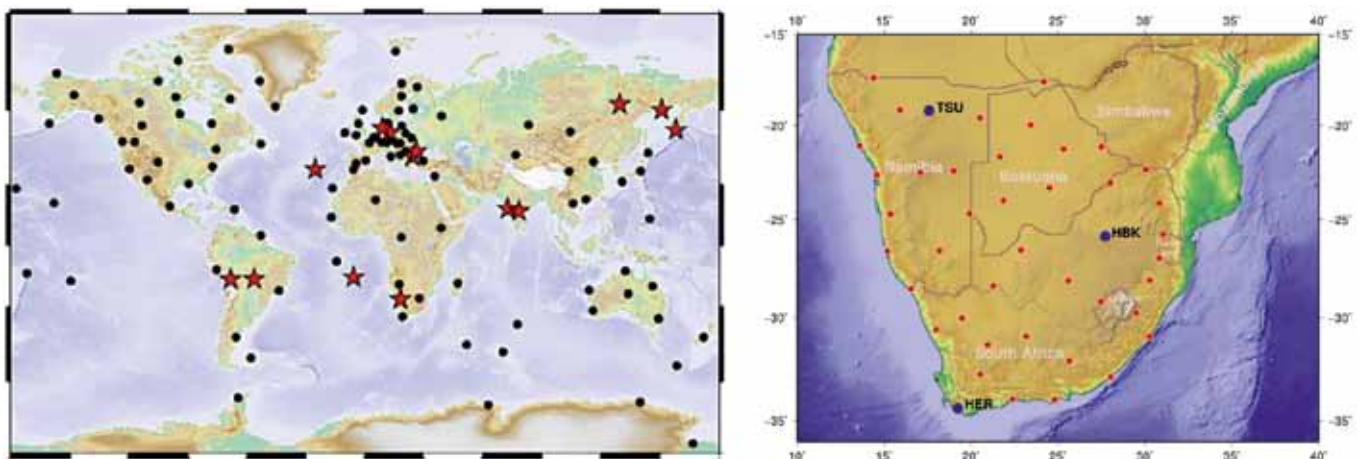


Abb. 2: Links: Globale Verteilung von INTERMAGNET-Observatorien (schwarze Punkte). Observatorien mit GFZ-Beteiligung sind mit einem roten Stern markiert. Es existieren Lücken in der Verteilung, insbesondere in Sibirien, der Antarktis und den ozeanischen Regionen. Rechts ein Beispiel für ein Repeat-Station-Netzwerk in Südafrika (rote Punkte; Observatorien in blau). An diesen Orten werden jährlich Messungen vorgenommen, um die zeitliche und kleinräumige Entwicklung des Erdmagnetfelds in dieser Region genauer zu studieren.

Fig. 2: Left: Global distribution of INTERMAGNET observatories (black dots). Observatories with GFZ contribution are marked with a red star. There are gaps in the distribution, especially over Siberia, Antarctica, and the oceans. Right: repeat station network operated by GFZ in South Africa (red dots; observatories in blue). Annual readings at these locations are used to monitor the temporal evolution of the geomagnetic field in this region.

hilft außerdem, räumliche von zeitlichen Variationen zu trennen. Die Swarm-Satelliten werden helfen, das Erdmagnetfeld in sehr hoher Präzision zu beschreiben. Der Start der Satelliten ist für Ende 2013 vorgesehen.

Vom Messwert zum Modell

Wie bereits erwähnt, ist es das Ziel der Modellierung, eine einfache aber möglichst genaue Beschreibung des Zustands des Erdmagnetfelds zu finden. Es handelt sich dabei um ein indirektes Problem: die Messwerte lassen sich nicht direkt durch eine Rechenvorschrift in die gesuchten Parameter umwandeln. Es existiert aber eine Abbildungsvorschrift in die umgekehrte Richtung, also von den gesuchten Modellparametern zu den Messwerten. Diese Abbildungsvorschrift ist eine mathematische Abbildungsmatrix, \mathbf{A} , mit der die Werte des Erdmagnetfelds aus den Modellparametern bestimmt werden können:

$$\mathbf{A}\mathbf{m}=\mathbf{D}$$

Dabei ist \mathbf{m} der Vektor der Modellparameter und \mathbf{d} der Vektor der Messdaten. Durch Inversion der Systemmatrix kann man von den Daten auf die Parameter schließen:

$$\mathbf{m}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{m}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$$

wobei \mathbf{A}^{-1} die zu \mathbf{A} inverse Matrix darstellt. Diese Beschreibung ist allerdings nur für den idealen Fall ohne Messrauschen oder sonstige Fehler genau. In der Realität sind die Messwerte fehlerbehaftet und man muss eine Lösung (d. h. einen Satz Modellparameter) finden, der im Mittel die Messwerte möglichst gut erklärt. Eine eindeutige Lösung existiert meist nicht. Zu jedem Messwert wird der „Abstand“ zur Modelllösung berechnet und die Quadrate dieser Abweichungen werden minimiert. Das nennt man die Methode der kleinsten Quadrate. Danach ergibt sich die Lösung aus

$$\mathbf{m}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{d}.$$

Hier bezeichnet das Superskript „T“ die transponierte Matrix, also die an der Hauptdiagonalen gespiegelte Matrix. Dieses Inversionsschema ist jedoch meistens numerisch instabil, weil der inverse Operator schlecht konditioniert ist. In diesem Fall muss die Lösung regularisiert werden, das heißt, sie wird stabilisiert (und damit häufig geglättet). Dazu führt man in den Term, der die Abweichung der Messwerte vom errechneten Modell beschreibt (kleinste Quadrate) einen zusätzlichen Term ein. Dieser sorgt dafür, dass die Lösung nicht zu stark oszilliert. Das resultierende Inversionsschema sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{m}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{d}.$$

\mathbf{I} ist die Einheitsmatrix und α der sogenannte Dämpfungsparameter. Mit dem Dämpfungsparameter lässt sich der Grad der Glättung beeinflussen. Je größer der Dämpfungsparameter ge-

wählt wird, desto stärker wird die Lösung geglättet. Das Modell \mathbf{m} , das man mit diesem Schema erhält, besteht aus einer Menge von Koeffizienten für die Kugelfunktionen (die Basisfunktionen auf der Kugel). Diese Koeffizienten heißen Gauss-Koeffizienten. Addiert man die mit den entsprechenden Gauss-Koeffizienten skalierten Kugelfunktionen, erhält man das gesuchte Magnetfeld.

Messungenauigkeiten

Ein besonders großes Problem bei der Inversion von Erdmagnetfelddaten, insbesondere wenn man bis zu sehr hohen Ordnungen gehen will, sind unbekannte Störquellen. Im Fall des Erdmagnetfelds sind das beispielsweise die externen Felder, d. h. Felder, deren Quellen außerhalb der Erdoberfläche liegen (z. B. in der Magnetosphäre oder der Ionosphäre). Für bestimmte externe Felder existieren Modelle, die es erlauben, diese Anteile aus den Daten zu entfernen. Das ist aber nicht für alle externen Quellen der Fall. Einige sind zeitlich so variabel, dass man sie kaum mit einem Modell beschreiben oder gar eine Vorhersage für sie treffen kann. Darum werden für Modellierungen der internen Quellen, also des Lithosphären- bzw. des Kernfelds, die Daten sehr sorgfältig ausgewählt. Anhand geomagnetischer Indizes werden nur Daten aus solchen Zeiträumen ausgewählt, in denen die Aktivität in der Ionosphäre gering ist und somit nur kleine Störfelder zu erwarten sind. Trotzdem kann man die unbekannt externen Quellen nie ganz ausschließen und muss eine Methode finden, Magnetfelder, die aus dem Erdkern oder der Lithosphäre stammen, von solchen aus der Ionosphäre und Magnetosphäre bzw. von induzierten Feldern in der Lithosphäre zu trennen. Dies ist eines der großen Probleme bei der Inversion geomagnetischer Daten.

Will man z. B. das Lithosphärenfeld aus Satellitendaten bestimmen, ist das Rauschen zwischen benachbarten Bahnen häufig korreliert und damit statistisch schwer zu beschreiben. Mit gewissen vereinfachenden Annahmen ist es dennoch möglich, ein Modell für das Rauschen zu finden und es durch Nachbearbeitung des Modells, also nach Berechnung des Erdmagnetfeldmodells aus dem Modell zu entfernen, oder es zumindest zu minimieren.

Dazu betrachten wir die Radialkomponente von Magnetfeldmessungen auf Halborbits des Satelliten CHAMP, jeweils von der Nachtseite der Erde. Vereinfachend nehmen wir an, dass die Halborbits Meridianen folgen und alle Messungen auf gleicher Höhe stattfanden. Die Modelle für das externe Feld sind nicht sehr genau. Die Residuen, d. h. die Abweichungen des errechneten Modells von den tatsächlichen Messwerten entlang der Halborbits enthalten noch relativ lange Wellenlängen. Wir nehmen nun an, dass man diese Residuen durch die Radialkomponente eines externen Felds ohne zeitliche Variation relativ genau beschreiben kann. Zudem betrachten wir ein zeitlich konstantes Feld inneren Ursprungs, das lithosphärische Rauschmodell. Es ist nun mit Messungen entlang der Halborbits nicht möglich, das innere Feld vom äußeren

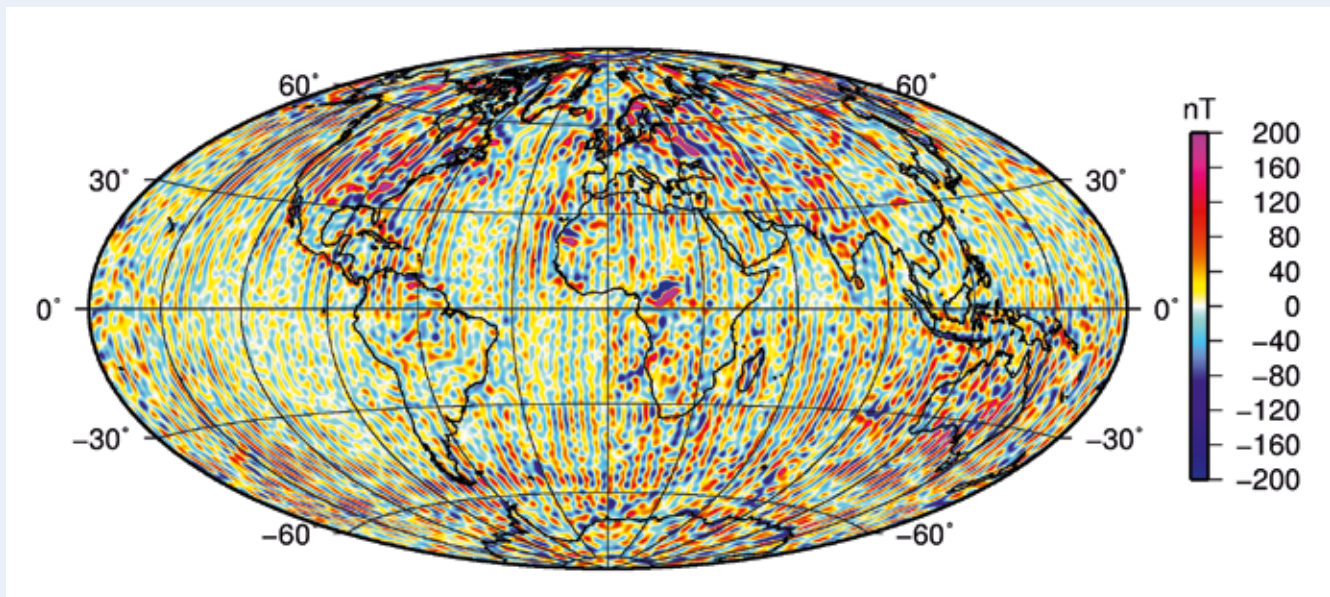


Abb. 3: Karte der Radialkomponente des geomagnetischen Lithosphärenfelds an der Erdoberfläche nach dem ersten Inversionsschritt. Deutlich zu sehen sind Rauschartefakte entlang der Satellitenbahnen nahe der Antarktis, im Atlantik und im östlichen Pazifik.

Fig. 3: Map of the vertical down component of the lithosphere magnetic field model at the Earth's surface. Along track noise is particularly visible around Antarctica, and in the Indian, Atlantic and eastern Pacific Ocean.

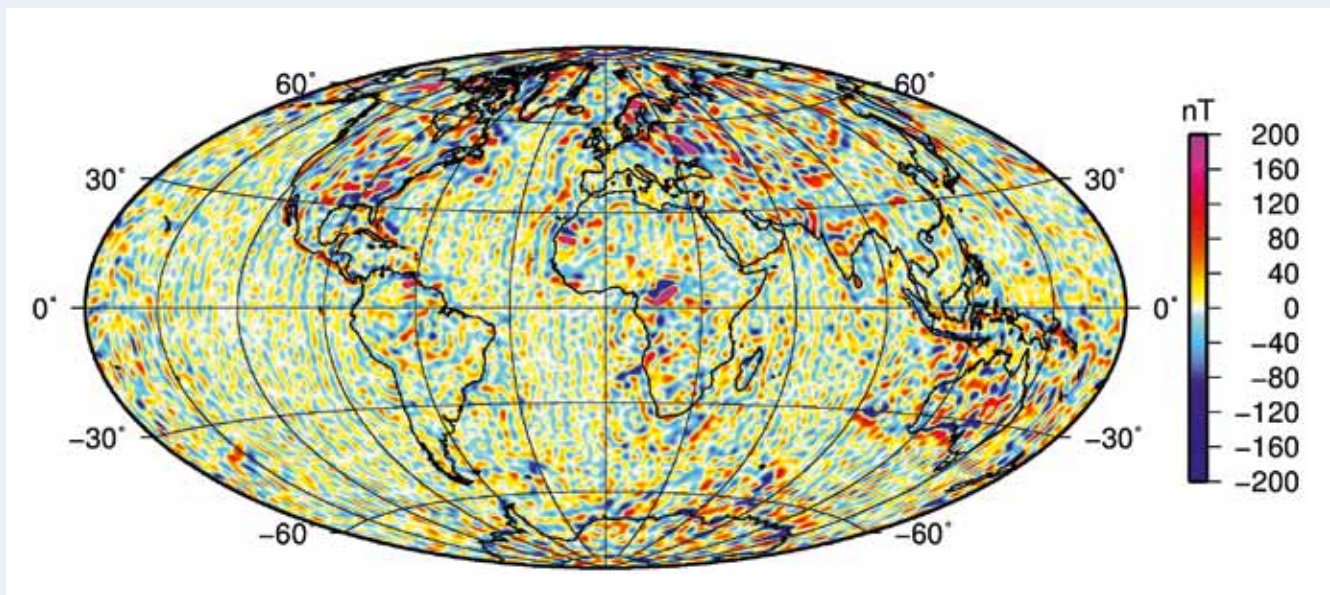


Abb. 4: Radialkomponente des Lithosphärenfelds an der Erdoberfläche nach der Nachbearbeitung. Das Rauschen, das sich im unprozessierten Modell durch starke Streifenbildung in Nord-Süd-Richtung äußert, ist deutlich reduziert. Die Anomalien sind am deutlichsten über den Kontinenten sowie über dem Indischen und dem Pazifischen Ozean.

Fig. 4: Map of the vertical down component of the final lithospheric field model at the Earth's surface. The noise has been significantly reduced. Anomalies are particularly well defined over continents, and Indian and Pacific oceans.

Feld zu unterscheiden. Daher können wir die Residuen des äußeren Felds mit dem Modell des inneren Felds modellieren (mit der Methode der kleinsten Quadrate) und finden eine von Null verschiedene Lösung für jeden Halborbit. Aus der Kombination aller verfügbaren und geeigneten Halborbits kann man ein globales Modell des Lithosphärenrauschfelds berechnen und erhält damit ein Lithosphärenfeldmodell, das durch die nicht erfassten Beiträge der externen Feldkomponenten in der Radialkomponente des Erdmagnetfelds entstehen würde. In gleicher Weise berechnet man das Rauschen im Lithosphärenmodell, das durch eine Störung des internen Felds erzeugt werden würde. Solche Rauschmodelle wurden dann für verschiedene in Frage kommende Quellen berechnet, so z. B. für ein Dipolfeld, wie es durch globale, induzierte Ströme in den leitfähigen Schichten der Erde erzeugt werden würde oder für Stromsysteme in der Ionosphäre.

Um diese Ergebnisse für die Verbesserung eines Lithosphärenfelds zu nutzen, wird zuerst ein grobes Lithosphärenmodell aus den vorhandenen Satellitendaten berechnet. In einem zweiten Schritt, der Nachbearbeitung, werden ein neues Lithosphärenmodell und ein Rauschmodell gleichzeitig bestimmt. Dabei wird von dem Modell des ersten Schritts ausgegangen. Diese Dateninversion ist nicht-linear und wird iterativ gelöst, d. h. in mehreren Schritten, wobei das Modell in jedem Schritt verbessert wird bis die Verbesserung einen bestimmten Schwellenwert unterschreitet. In Abb. 3 ist das Lithosphärenmodell nach dem ersten Schritt dargestellt. Deutlich sind noch die Rauschartefakte entlang der Satellitenbahnen zu sehen. Das ist besonders deutlich über den Polen der Fall, wo feldparallele Ströme die Messwerte stark beeinflussen, sowie über Teilen der Ozeane, wo keine unterstützenden Observatoriumsdaten zur Verfügung stehen. Abb. 4 zeigt das Lithosphärenfeld nach der Nachbearbeitung. Das Rauschen ist deutlich schwächer, während tatsächliche Anomalien, z. B. im westlichen Zentral-Afrika oder Australien, deutlich sichtbar sind.

Ausblick

Die Anzahl der verfügbaren Messungen des Erdmagnetfelds und ihre Genauigkeit haben in den letzten Dekaden stark zugenommen. Das liegt an der Realisierung von innovativen Satellitenmissionen (z. B. CHAMP) und verbesserten Messinstrumenten. Um die Flut von Geomagnetfelddaten bestmöglich für die Modellierung des Lithosphärenfelds zu nutzen, sind sorgfältige Datenselektion sowie immer wieder innovative Methoden notwendig, die es z. B. ermöglichen, die Quellen des Erdmagnetfelds voneinander zu trennen oder das Rauschen zu charakterisieren. Am GFZ haben wir Methoden entwickelt, die mithilfe eines Modells für das Messrauschen bei Satellitenmessungen helfen, die Qualität der Lithosphärenfeldmodelle in einem Nachbearbeitungsschritt weiter zu verbessern. Die kommende Satellitenmission Swarm, für die derzeit Auswertungs-Software am Deutschen GeoForschungsZentrum GFZ

und anderen führenden Instituten in Europa entwickelt wird, wird mit den zu erwartenden Mengen an hochpräzisen Geomagnetfelddaten zu weiteren Verbesserungen der Kernfeld- und Lithosphärenfeldmodelle beitragen.

Literatur

- Blakely, R. J. (1995): *Potential theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge [u.a.], 441 p.
- Lesur, V., Rother, M., Vervelidou, F., Hamoudi, M., Thébault, E. (2013): *Post-processing scheme for modelling the lithospheric magnetic field*. - *Solid Earth*, 4, 1, 105-118, 10.5194/se-4-105-2013.
- Menke, W. (1984): *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*, Orlando [u.a.], 260 p.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992): *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, Cambridge [u.a.], 994 p.
- Reigber, C., Lühr, H., Schwintzer, P. (2002): *CHAMP mission status*. - *Advances in Space Research*, 30, 2, 129-134, 10.1016/S0273-1177(02)00276-4.
- Schachtschneider, R. (2011): *Error distribution in regional inversions of potential fields from satellite data*, Potsdam, 96 p.

Glossar

- Basis:** Eine (in praktischen Fällen unendliche) Menge von linear unabhängigen Funktionen, die einen bestimmten Raum aufspannen. Alle Funktionen aus diesem Raum lassen sich durch eindeutige Linearkombinationen dieser Basisfunktionen darstellen.
- Inversion:** Berechnung der Modellparameter aus Messwerten. Das ist ein indirektes Problem. Die idealen, fehlerfreien (und daher theoretischen) Messwerte lassen sich mit Hilfe einer Abbildungsmatrix direkt aus den Modellparametern ableiten.
- Kugelfunktionen:** global auf der Kugel definierte Funktionen. Sie bilden je nach Normierung eine orthogonale oder gar ortho-normale Basis auf der Kugeloberfläche. Mit Hilfe der K. lassen sich Funktionen auf der Kugel in ihren spektralen Bestandteilen darstellen (s. Spektrum).
- Lithosphäre:** oberste feste, durchschnittlich 100 km dicke Schicht der Erde. In den oberen Schichten der L. kann remanente Gesteinsmagnetisierung existieren. Methode der kleinsten Quadrate: Inversionsmethode (s. Inversion), bei der die Summe der euklidischen Abstände der Messwerte zum errechneten Modell minimiert wird.
- Regularisierung:** Stabilisierung der Inversion, z. B. durch Addition einer Diagonalmatrix zur Systemmatrix (Tikhonov-Regularisierung).
- Remanente Magnetisierung:** Teil der Gesteinsmagnetisierung, der nach Verschwinden des umgebenden Feldes erhalten bleibt. R.M. ist nur unterhalb der materialspezifischen Curie-Temperatur möglich und daher auf Tiefen kleiner als ca. 50 km beschränkt.
- Spektrum:** Energieverteilung einer Funktion oder eines Felds auf verschiedene Wellenlängen.